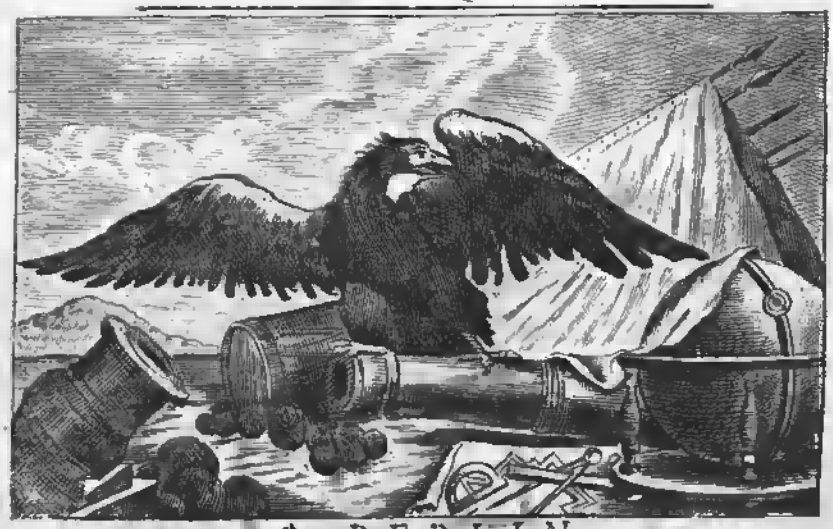
HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

ANNÉE MDCCLXV.



A BERLIN.
CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour et de l'Académie Royale.
MDCCLXVII.

Imprimé
par ordre de l'Académie.

TABLE.

CLASSE
DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.

Conſidérations *ſur le Globe.* Troiſieme Mémoire. *Sur le Continent Antarctique*, *par* M. le Comte DE REDERN. pag. 3

— — Quatrieme Mémoire. *Sur les Isles de Salomon.* 14

— — Cinquieme Mémoire. *Sur le Continent Auſtral ou Méridional.* 17

Sur *les préſervatifs les plus efficaces contre la petite vérole*, *par* M. COTHÉNIUS. 25

Nouvelles Expériences phyſiques *ſur l'accroiſſement & la diminution du mouvement extérieur par lequel les plantes s'écartent de leur direction perpendiculaire, ſuivant la diverſe température de l'air*, *par* M. GLÉDITSCH. 52

Obſervations anatomiques *ſur la glande pinéale, ſur la cloiſon tranſparente, & ſur l'origine du nerf de la ſeptieme paire*, *par* M. MECKEL. 91

Mémoire *ſur la réſiſtance des fluides avec la ſolution du probleme baliſtique*, *par* M. LAMBERT. 102

CLASSE

CLASSE
DE MATHÉMATIQUE.

Sur *la probabilité des ſéquences dans la Lotterie de Genes*, *par* M. EULER. 191

Sur *les ſuites ou ſéquences dans la Lotterie de Genes*, *par* M. BEGUELIN. Premier Mémoire. 231

—— —— Second Mémoire. 257

Mémoire *ſur les vibrations des cordes d'une épaiſſeur inégale*, *par* M. DANIEL BERNOULLI. 281

Sur *le mouvement d'une corde qui au commencement n'a été ébranlée que dans une partie*, *par* M. EULER. 307

Eclairciſſemens plus détaillés *ſur la génération & la propagation du ſon & ſur la formation de l'Echo*, *par* M. EULER. 335

Sur *les Courbes Tautochrones*, *par* M. DE LA GRANGE. 364

Sur *les Tautochrones*, *par* M. D'ALEMBERT. 381

Recherches *des forces dont les corps céleſtes ſont ſollicités en tant qu'ils ne ſont pas ſphériques*, *par* M. J. A. EULER. 414

CLASSE
DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.

Diſcours ſur ces Queſtions:

Quel eſt le degré de certitude dont ſont ſuſceptibles les preuves tirées de la conſidération de cet Univers pour démontrer l'exiſtence d'une Divinité?

Et quelle eſt la meilleure maniere de faire uſage de ces Argumens a poſteriori, *pour établir cette importante vérité?*

Par M. FORMEY. 435

Diſcours

Diſcours *ſur la Métaphyſique*, *par* M. MERIAN. 450

De *l'énergie dans les ouvrages des Beaux-Arts*, *par* M. SULZER. 475

CLASSE
DE BELLES-LETTRES.

Des *inductions qu'on peut tirer du langage d'une Nation par rapport à ſa culture & à ſes moeurs*, *par* M. TOUSSAINT. 495

Diſcours de réception *par* M. LAMBERT. 506

Diſcours de réception, *où l'on traite des principaux avantages que les Académies offrent à ceux qui en ſont Membres*, *par* M. THIEBAULT. 515

Eloge de M. DE PRÉMONTVAL. 526

Eloge de M. le Baron DE DANCKELMANN. 541

ERRATA.

page 138. lin. 15. au lieu de *chacune* liſez *l'une de l'autre.*

p. 169. lin. 10. après *termes intégrables* ajoutez *moins compliqués que ceux que nous venons de trouver pour x.*

p. 179. lin. 14. au lieu de $+\frac{27\delta\epsilon}{\gamma\gamma}\ldots-\frac{90\mu\delta}{\gamma\gamma}\ldots$ liſez $-\frac{27\delta\epsilon}{\gamma\gamma}-\frac{60\mu\delta}{\gamma\gamma}\ldots$

ibid. lin. 17. au lieu de $\frac{81\delta^4}{\gamma^4}$ liſez $\frac{81\delta^4}{2\gamma^4}$.

p. 180. lin. 4. au lieu de $+\frac{6\gamma\xi^2\delta}{a^3a}$ liſez $-\frac{6\gamma\xi^2\delta}{a^3a}$.

p. 182. lin. penult. au lieu de $\frac{2.\sin\omega m^2\xi^4}{2.\ 3.\ 4.\ 5}$ liſez $\frac{4\sin\omega m^2\xi^5}{2.\ 3.\ 4.\ 5}$.

p. 183. lin. 9. lin. 15. & pag. 185. lin. 23. même correction à faire.

p. 184. lin. 8. au lieu de $\frac{1}{30}m\sin\omega.\xi^2$ liſez $\frac{1}{15}m\sin\omega.\xi^3$.

p. 188. lin. 9. au lieu de $\frac{m\sin\omega.\xi^4}{96}$ liſez $\frac{5m\sin\omega.\xi^4}{96}$.

p. 455. lin. 8. au lieu de *de Phyſique* liſez *de la Phyſique.*

p. 456. lin. dern. au lieu de *n'opere pas par des projections* liſez *n'opere que par des projections.*

p. 465. lin. 14. au lieu de *conjectures* liſez *conjonctures.*

p. 466. lin. 22. au lieu de *vues, compaſſé* liſez *vues, & compaſſé.*

p. 467. lin. 7. au lieu de *paroiſſent* liſez *paroiſſoient.*

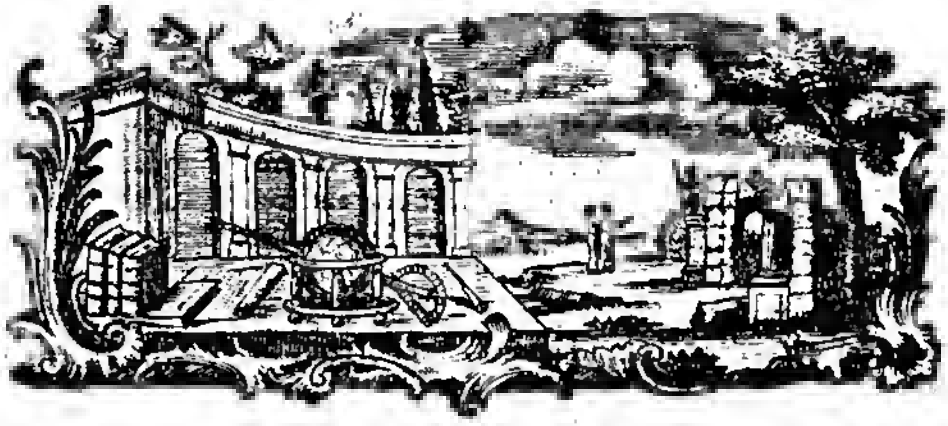
p. 470. lin. 13. au lieu de *elle-même* liſez *en elle même.*

p. 473. lin. 13. après *tous ces* liſez *ſpéculateurs aimables & de tous ces.*

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.

* * *



CONSIDÉRATIONS
SUR
LE GLOBE *)
TROISIEME MÉMOIRE
SUR
LE CONTINENT ANTARCTIQUE.

PAR M. LE COMTE DE REDERN.

QUand *Colomb* propoſa à ſa Patrie & aux Princes les plus puiſſants de l'Europe d'étendre leurs Empires dans des nouveaux Mondes, il fut renvoié avec dédain; ſa propoſition fondée ſur des Conjectures & des probabilités géographiques, & phyſiques, au deſſus de la portée du commun des hommes, occupés de

*) Lues dans les ſeances de l'Académie de 1758.

toutes les petites miſeres de la vie, dans les grandes places du gouvernement qu'ils rempliſſent, fut traitée de chimere.

S'il revenoit aujourd'hui renouveller ſa propoſition, appuyée ſur des faits incontestables qui donnent une entiere certitude; il auroit peut être le même ſort à la honte du ſiecle éclairé dans lequel nous vivons.

J'expoſerai dans ce Mémoire les témoignages des Navigateurs que j'ai cités dans deux Mémoires précédents, inſérés dans ceux de l'Académie; je tâcherai de ſuivre, de comparer, & de combiner avec attention toutes leurs découvertes, & leurs obſervations; & j'y joindrai quelques navigations nouvelles qui n'ont pas été imprimées, & que j'ai eu le bonheur de raſſembler.

L'étendue du premier continent, dont je hazarde de fixer la poſition, & marquer le giſſement des côtes par les différentes parties qui en ont été appèrçues, paroit être d'une étendue très conſidérable; & comme il eſt iſolé, & ſéparé par des vaſtes mers de tous les autres continents, s'étendant dans des climats très variés depuis les Tropiques juſqu'aux Poles, on doit s'attendre à y trouver des ſingularités qu'on ne peut pas prévoir, & des productions peut-être très différentes de tout ce que nous connoiſſons.

J'en ferai le tour de l'Eſt à l'Oueſt en commençant par ſes côtes dans l'Océan entre l'Amérique & l'Afrique.

Elles paroiſſent retirées dans ces mers à une latitude très élevée, à peu de diſtance ou peut-être même au delà du Pole, & toutes les terres qu'on a apperçues juſqu'à préſent à l'Eſt de la Terre des Etats, ne ſont ſelon toutes les apparences que des Iſles qui le bordent. Elles ſont la preuve de ſon exiſtence, mais la conſéquence qu'on a voulu tirer du peu d'éloignement des côtes de ce continent, dans ces parages, ne me paroit pas fondée de même. Amériс Veſpuce pénetra le premier dans ces mers en 1502; il découvrit à 52 degrés de latit. le premier Avril, qui répond à la ſaiſon de notre Octobre, une terre qu'il courut l'eſpace de 20 lieues ſans appercevoir d'habitans; les Géographes la placent ſous la longitude du premier méridien; je croi-

croirois ne pas me tromper en lui attribuant la vue ou la découverte des Isles Malouines; toutes les circonſtances de ſa navigation, ſon abord aux côtes de l'Amérique ſous la latitude environ de la riviere de la Plata qui fut le lieu de ſa partance, pour ſe porter au-ſud, les vents de ſud-oueſt qui regnent dans ces parages, avec lesquels il navigea, le froid extréme qu'il éprouva ſans qu'il faſſe mention de glaces, fondent cette conjecture. Le célébre Halley pouſſa de même ſa navigation juſqu'au 52 degré de latitude entre les 340 & 350 degrés de longitude; il y trouva des glaces, ſans appercevoir des terres.

D'autres navigateurs, la Roche & Brauer, qui traverſerent ces mers pour paſſer dans la Mer du Sud, ont apperçu des terres, mais peu curieux de les connoître, leurs rélations n'en parlent que de la maniere la plus vague. C'eſt à la France à qui les ſciences ont tant d'obligation, que nous devons la connoiſſance la plus exacte que nous ayons juſqu'à préſent de ces mers.

Les recherches que la Compagnie des Indes a fait faire dans ces mers en 1738, nous donnent une entiere certitude de l'exiſtence de terres fort étendues dans ces parages. Les Capitaines Lozier & Hay qui les cotoierent de l'oueſt à l'eſt entre les 50, & les 54 degrés de latitude, par une longitude de plus de 20 degrés, ou de 3 à 400 lieues, virent des marques continuelles du voiſinage des terres, & furent à la vue du Cap de la Circonciſion, pendant pluſieurs jours ſans pouvoir y attérer. Les brumes & les glaces les en empêcherent; ils vinrent deux mois trop tôt.

Le vaiſſeau le Lyon revenant en 1756. de la Mer du Sud découvrit à la hauteur de 55 degrés 17 min. de lat. à 19 degrés à l'Eſt de la Terre des Etats, des terres très étendues & fort élévées, & les apperçut à environ 30 lieues de diſtance, & deux montagnes qui devoient être d'une élévation conſidérable à 60 lieues; il les rangea en faiſant route à l'Eſt de ces terres. Cette navigation ne laiſſe pas de doute que toutes les terres apperçues à l'eſt de la Terre des Etats juſqu'au Cap de la Circonciſion, & peut-être d'autres plus à l'Eſt, ne

ſoient des Isles ſituées à peu près ſous le même parallele qui bordent le continent, retiré comme j'ai déjà dit peut être au delà du Pole.

Vis à vis de la Terre des Etats & du Cap Horn, ce continent ſe retire de même extrémement vers le Pole. Il n'a été apperçu par des glaces & d'autres marques que par des navigateurs qui, en doublant la Terre du feu, ont pouſſé leur navigation au delà de 60 degrés, en avançant déjà à l'oueſt dans la Mer du Sud; ſous le méridien du Cap Horn, la mer paroit plûtôt ouverte à cette hauteur. Le fameux Drack le découvrit, & y attéra à une latitude fort élevée. Une tempête le jetta dans une baie presque ſous le cercle polaire, à 10 degrés environ à l'oueſt du Cap Horn; où, ſelon toutes les apparences, ſes côtes prennent déjà une direction du ſud au nord-oueſt du Pole vers le Tropique.

Il paroit remonter de là dans la Mer du Sud à la diſtance de 4 à 500 lieues de l'Amérique, ſous les 280 degrés ou environ de longit. en faiſant face à la côte occidentale des Patagons & du Chili, & à la hauteur de quelques 30 degrés de lat. il paroit ſe replier vers l'oueſt, en remontant vers l'équateur, peut-être au delà du Tropique.

Gallego, en retournant en 1567. des Isles de Salomon par le ſud-oueſt au Chili, rangea une ſuite de terres depuis le Tropique juſqu'à la hauteur de la pointe méridionale de l'Amérique, faiſant face au Chili.

Pluſieurs vaiſſeaux Malouins, qui font le commerce de la Mer du Sud pendant la guerre de ſucceſſion, pouſſés à l'oueſt du Chili à 4 ou 500 lieues, virent à des différentes hauteurs des marques de terres voiſines; mais le marchand pourſuit ſon commerce ſans ſe mettre en peine de faire des découvertes.

L'année 1714, un Brigantin Eſpagnol fut jetté ſur des Terres à cette diſtance du Chili ſous le 37 degré de lat. Il les jugea par beaucoup de feu qu'il vit la nuit, fort habitées, la foibleſſe de ſon équipage l'empêcha d'y aborder.

Davids

Davids, un Flibuſtier Anglois, voulant repaſſer en 1689 du Pérou par le Cap Horn, vit des terres fort hautes & fort étendues, ſous les 27 degrés de lat. à cette même diſtance du Chili. Il paroit par les routes de Magellan & des trois vaiſſeaux envoiés en 1721 par la Compagnie des Indes occidentales de Hollande, que c'eſt une Isle.

Les trois vaiſſeaux envoiés en 1721 par la Compagnie des Indes occidentales de Hollande, virent depuis les 260 degrés de longitude juſqu'à leur arrivée à l'Isle de Pâques ſous les 28 degrés de lat. & les 239 degrés de longit. des marques continuelles de terres prochaines au ſud. Ils remonterent de là vers l'équateur, & les perdirent.

Zviros après avoir traverſé la Mer du Sud avec Mendagna en 1595 pour la recherche des Isles de Salomon, voulut reconnoitre cette mer par une route différente. Il partit en 1605 le 21 Decembre de Callao, & dirigea ſa route ſud-oueſt. Après 36 jours de navigation il découvrit une Isle ſous les 25 degrés de lat. & les 250 de longit. Il continua ſa navigation nord-oueſt juſqu'aux 230 degrés de longit. & fit de belles découvertes. Il s'arreta dans une Isle nommée Trumaco 10 jours; le roi de l'Isle nommé Tamai, homme de belle figure, & intelligent, le reçut avec beaucoup d'amitié, & lui fit comprendre, qu'il connoiſſoit plus de 60 Isles, & un grand continent, qu'il nomma Manicalo à quelque diſtance de ſon Isle. Zviros vérifia & viſita pluſieurs de ces Isles, qu'il nomme l'Incarnation, St. Jean Baptiſte, St. Guillaume, les 4 Couronnes, St. Michel, la Converſion de St. Paul, la Dixieme, le Chaſſeur, la Fugitive, Notre Dame de Secours, Monterey, St. Marc, la Verge, les larmes de St. Pierre, Porto belo, Pilate, Saragoſſa, Remond, les Isles de St. Marie. Le lendemain de ſon départ, il vit le pais de Manicolo dont le giſſement étoit ſud-eſt & nord-oueſt. C'eſt peut-être l'extrémité ſeptentrionale de ce Continent. Il en courut les côtes par une étendue de 60 lieues, & apperçut pluſieurs ports & rivieres. Il paroiſſoit très peuplé, & les habitans de l'Isle de Taumaco lui avoient exalté ſa fertilité, ſes richeſſes,

ſes, & particulierement la grande abondance des Perles qu'on y trouvoit. Il emmena quatre Indiens de l'Isle, dont trois lui échapperent; le quatrieme qui lui reſta ſe diſoit né dans une Isle nommée Chicagnara, à quatre journées de Taumaco, peuplée d'habitans noirs & blancs, fertile, & fort abondante en perles, qu'on trouvoit en trois ſortes de Moules, nommées Totoſes, Canoſes, & Taquila. Il ajouta qu'à deux journées de ſon Isle il y avoit une autre Isle appellée Gvaitapo, dont les habitans étoint blancs comme les Eſpagnols, & les femmes fort belles, portant un habit de ſoye, deſcendant de la tête aux pieds. Il en nomma d'autres, Tonefono, Tucopio, Pilen, Poupan &c. peu éloignées de ſon Isle, & fort abondantes en perles dont les Moules étoient à ſi peu de profondeur qu'on les prenoit de la main. Il raconta beaucoup d'un grand païs qu'il nomma Puro, qu'il n'avoit pas vû; mais dont pluſieurs de ſes compatriotes habiles navigateurs qui y avoient été, lui avoient parlé, que les habitans, en étoient très belliqueux & qu'il avoit vû de leurs flêches, dont les pointes étoient d'argent.

Cet Indien mourut au Mexique à l'âge de 25 ans. Zviros s'approcha enſuite de l'Equateur, & continua ſa route à l'oueſt entre les 10 & 12 degrés. Après 90 jours de navigation, il arriva ſans avoir rencontré aucune Isle à la terre du St. Eſprit, côte orientale, & partie du ſecond continent, dont j'ai rapporté la rélation avantageuſe, & circonſtanciée qu'il nous en donne, dans le ſecond Mémoire des Conſidérations ſur le Globe.

Abel Taſman, après avoir fait le tour du ſecond continent, y aborda par l'eſt à ſa partie occidentale, qu'il appella la nouvelle Zeelande. Cette côte court du nord au ſud ſous les 180 degrés de longit. & il paroit qu'elle ſe retire vers le Pole Antarctique, pour courir entre les 50 & 60 degrés de latit. de l'eſt à l'oueſt vis à vis du Cap Diemen, du Cap de Bonne Eſpérance, vers le Cap de la Circonciſion, dans la direction peut-être des côtes par leſquelles nous avons commencé dans l'Océan entre l'Amérique & l'Afrique.

Il

Il la cotoia par une étendue de 450 lieues depuis les 42 jusqu'aux 32 degrés de latit. C'eſt une terre élévée & montueuſe, mais fertile & bien ſituée. Les habitans reſſemblent aux Japonnois, ſont de haute taille, farouches, & ont le milieu du corps couvert de toile de cotton, ce qui ſuppoſe quelque induſtrie. Il quitta cette côte ſans y aborder, & ſans pénétrer dans le païs, pour aller à la découverte des Isles de Salomon, qu'il manqua.

Voici ce que j'ai pû trouver touchant le premier continent. Ce n'eſt pas pour prendre une idée parfaite de ſa qualité, de ſes productions, de ſes habitans, & de leurs moeurs; mais c'eſt ſuffiſant pour fixer & aſſurer les vues qu'on peut ſe propoſer dans ſa découverte.

Cette vaſte Mer du Sud, qui occupe presque la moitié de notre Globe, n'eſt encore gueres connue.

Les Eſpagnols en poſſeſſion de toutes les côtes de l'Amérique dans cette mer, n'ont que trop de païs, dans lesquels ils ont de la peine à ſe maintenir contre les habitans, & malgré la jalouſie des autres nations de l'Europe; trop indolens ſous les ſucceſſeurs de Philippe ſecond pour faire de nouvelles découvertes, & trop foibles pour faire de nouveaux établiſſemens, ils n'ont eu d'autres ſoins que d'éloigner les Puiſſances de l'Europe par des Traités de la navigation de cette Mer. Les Navigateurs des autres nations de l'Europe, qui y ſont allés jusqu'à préſent n'y ont été que pour piller, ou pour faire le commerce lucratif du Chili & du Perou: & la navigation ſe dirige auſſitôt qu'on a doublé le Cap Horn au Nord, pour courir le long des côtes de l'Amérique. Ceux qui y ſont allés dans le deſſein de faire des découvertes, ont dirigé leur route à peu près de même, & ont traverſé cette vaſte mer entre l'Equateur & le Tropique pour profiter des vents alisés, & pour reconnoitre cette partie de la mer, dans laquelle on ſavoit que Mendagna, Gallego & Zviros avoient fait des découvertes, que l'appas de richeſſes rendit intéreſſantes; mais dont la connoiſſance trop vague, & trop imparfaite, par les ſoins avec lesquels les Eſpagnols

nois en cachoient les rélations, & les routiers; le peu de progrès qu'avoient fait le Géographie; mais principalement la cabale, & la jalouſie empêcherent de profiter.

Ce continent paroit tenir par la continuité & l'enchainement des montagnes élévées ſur la ſurface de la terre & continuer dans le baſſin de la mer, aux continents de l'Amérique, de l'Afrique, & à celui que je nomme le continent méridional, en attendant la deſtinée glorieuſe de la Puiſſance de l'Europe qui lui impoſera le ſien, par trois points de liaiſon, premierement aux Cordelieres de l'Amérique, par la terre, ou au Port de Drack.

Les Andes, après avoir prolongé la continuité de leur chaine gigantesque, qui deſcend du Pole Arctique au Cap Horn, dans le baſſin de la mer Antarctique, reparoiſſent ſelon toutes les apparences ici, en continuant, par une chaine de montagnes, dont la direction eſt à peu-près celle de la côte du continent Antarctique dans l'Océan pacifique en ne s'éloignant pas extrèmement de la mer comme les Gordelieres. La rélation de Quiros, qui fait mention des richeſſes & de l'abondance de l'argent de ces côtes, ſur le témoignage des habitants des Isles auxquelles il abordoit, qui lui donnoient connoiſſance du voiſinage de la terre ferme de ce continent, fortifie cette conjecture.

Cette chaine de montagnes, en continuant ſon cours jusqu'à la nouvelle Zélande, lie, par un ſecond point de réunion, le continent Antarctique au Cap de Diemen, pointe la plus méridionale du continent méridional découverte par Taſman en 1642, ſous le 45 degré de latit. ſud.

Le troiſieme point de réunion avec l'Afrique par le Cap de Bonne Eſpérance, n'a pas le même degré de probabilité, par le giſſement peu certain des côtes à déterminer dans la Mer Atlantique & dans celles des Indes. Il paroit que cette chaine, ſi elle exiſte, en commençant au Port de Drack, formeroit un arc reconrbé, peut-être au delà du Pole, qui remonteroit en demi-cercle au nord, vers le Cap de la Circonciſion.

J'ai

J'ai fait remarquer l'obligation dont nous ſommes rédevables à la France par les navigations de Mrs. Bouvet & Hay. Les Géographes françois paroiſſent lui attribuer la gloire de la premiere découverte de ce continent, par la navigation de Gonneville faite en 1503.

Le vaiſſeau dont il fut le commandant, équipé par des marchands à Honfleur, pour les Indes orientales, eſſuya, après avoir doublé le Cap de Bonne Eſpérance une tempête, qui lui fit perdre la route & aborder dans une terre qu'on a prétendu faire partie de ce continent, & qu'on qualifie, dans l'extrait de la déclaration qu'il fit à ſon retour & rendu public en 1663, du nom des Indes méridionales. On a placé d'abord cette terre entre l'Afrique & l'Amérique vers le 42 degré de lat. & enſuite au ſud-eſt du Cap de Bonne Eſpérance ſous le nom de Gonneville & des Peroquets, parce que la rélation dit que ces Oiſeaux abondoient dans la terre où il avoit abordé.

La ſuppoſition imaginaire d'une terre qui mérite ce nom, par ſon étendue entre l'Amérique & l'Afrique à 42 degrés de latitude, eſt un fait avéré par tous les navigateurs, qui ont traverſé ces mers, & tout récemment par Mrs. Bouvet & Hay; il eſt également certain, que les terres de l'exiſtence desquelles on s'eſt aſſuré, ſont ſituées entre les 50 & 60 degrés de hauteur. Les climats les plus rigoureux de ces terres, dont les glaces & les frimats s'accordent très mal avec la beauté, les productions abondantes & la maniere de vivres des habitans des Indes méridionales de Gonneville, & ſont du ſéjour des Peroquets au Cap de la Circonciſion une conte fait à plaiſir, me diſpenſent d'inſiſter, pour réfuter abſolument cette ſuppoſition, ſur l'apparence très fondée que ces terres ne ſont que des Isles qui ne ſont pas partie du continent Antarctique.

Il me paroit aſſez vraiſemblable que Gonneville a abordé dans l'Isle de Madagaſcar, à laquelle ſa deſcription vague & tranſmiſe par tradition, juſqu'à la publication de l'extrait faite 150 ans après, ſeule peut convenir; & ſi l'amour de la verité m'a impoſé comme un devoir de débrouiller le vrai d'un évenement, dans lequel l'amour natio-

nal a facilité l'illuſion, je ne dois pas craindre le reproche de vouloir déroger à la gloire de la France trop belle pour recevoir de l'accroiſſement d'une découverte faite ſans deſſein prémedité & due au hazard, ſi elle étoit vraie même & bien conſtatée.

La certitude obtenue par toutes les navigations faites à l'eſt de la Terre des Etats, que les terres apperçues dans ces parages ſont des Isles; la mer ouverte vis à vis du Cap Horn à la hauteur de 60 degrés & au delà, & les maſſes immenſes de glaces flottantes de 2 à 300 pieds de haut & de 2 à 3 lieues de tour trouvées au mois de Juin à la hauteur de 52 degrés de latitude par Mrs. Bouvet & Hay depuis le 7 au 53 degré de longitude, & par l'illuſtre Halley, Davids & Scharp vers les 350 degrés, fondent la conjecture d'une mer ouverte ſous le Pole Antarctique, dans laquelle ſe forment ces glaces énormes, portées par les vents de ſud-oueſt & les courants dans les parages de la Mer Atlantique à l'eſt de la longitude de 340 degrés qui rendent les Isles, ou terres qui s'y trouvent, inabordables.

Et s'il eſt vrai, que les glaces ſous le baſſin du Pole Arctique ſont dues principalement aux rivieres de la Sibérie & de la grande Tartarie, il faudroit ſuppoſer le concours des mêmes circonſtances, des rivieres nombreuſes d'un cours proportionné, pour produire cette quantité immenſe de glaces, qu'il faudroit faire deſcendre de l'intérieur du Continent Antarctique, de la chaine des montagnes, qui fait le continent des cordelieres, juſqu'à la nouvelle Zélande.

Mais la cauſe de l'exiſtence des glaces dans la Mer Antarctique qu'on prétend attribuer abſolument aux rivieres de la Sibérie, me paroit très peu fondée. L'eau ſalée gele auſſi bien que l'eau douce, ſur quoi il n'eſt pas en place ici de rapporter les expériences que j'ai faites: & ſi la mer eſt plus libre du côté de l'Amérique que vers les côtes de la Siberie, les courants & la température très différente dans les mêmes latitudes, peuvent être les cauſes des glaces du côté de la nouvelle Zemble.

Le

Le froid outre cela beaucoup plus vif dans l'hémiſphere méridional n'eſt que trop ſuffiſant pour produire ces glaces énormes & abondantes ſans le ſecours d'aucune circonſtance étrangere; & leur conſervation juſqu'aux mois d'été les plus chauds, ſous une latitude dont la température dans toutes les mers de l'Hémiſphere ſeptentrional, eſt fort douce & exemte de glaces abſolument, en fait une preuve, qui me paroit très convaincante. Ce qui m'a déterminé à ne marquer dans la Carte de l'Hémiſphere méridional, faite & remiſe à l'Académie en 1742 pour l'éclairciſſement de ces Mémoires, que le giſſement général de ces côtes, ſuivant les navigations qui en fondent l'exiſtence, ſans vouloir en fixer une poſition ſur des ſuppoſitions & des conjectures, que le tems doit nous faire connoitre. L'Isle de Pepis & les Isles Malouines ou d'Anican préſentent des lieux de relâche ou d'établiſſement admirables lorsqu'on voudroit entreprendre la découverte de ce continent, tant dans la Mer Atlantique, que dans la Mer du Sud.

CONSIDÉRATIONS SUR LE GLOBE.

QUATRIEME MÉMOIRE SUR LES ISLES DE SALOMON.

Avant de détailler les découvertes qu'on a faites du ſecond continent auſtral, je tâcherai de faire connoître les Isles de Salomon, qui de tout tems ont excité l'attention & la curioſité des navigateurs, qui ſe ſont attachés aux découvertes. C'eſt un Archipel conſidérable par le nombre & l'étendue des Isles qui le compoſent, auquel les Eſpagnols ont donné le nom des Isles de Salomon, ſur l'idée de richeſſes qu'ils ont d'elles. La navigation de Savedra, & un vaiſſeau qui allant du Mexique aux Philippines avoit rencontré des terres, où il avoit trouvé de l'or, donna l'occaſion à la recherche de ces Isles. Le Marquis de Mendoze en reçut l'ordre de la Cour d'Eſpagne. Il chargea Alvaro de Mendagna ſon couſin de l'expédition, qui partit de Callao en 1567, & eut pour premier Pilote Gallego. Après avoir fait 16 à 1700 lieues valant 95 à 100 degrés de longit. il attéra au nord de l'Isle de St. Eliſabeth, dont la partie ſeptentrionale doit être par les 6 degrés 30 min. de latit. ſud. Il mouilla enſuite dans un Port, qu'il trouva, en ſuivant ſes côtes vers le ſud oueſt par les 7 degrés 30 min. & nomma le Port de l'Etoile, d'où il l'envoya reconnoître juſqu'à l'extremité méridionale, qu'on appella le Cap Prito ſous les 9 degrés 30 min. On eſtima ſa longueur 95 lieues. Il découvrit pluſieurs autres Isles, entre autres une très grande, qu'il nomma Guadalcanar, dont

dont il ne vit que la partie voiſine de St. Eliſabeth, avec un Volcan par la latit. ſud de 9 degrés 45 min. La foibleſſe de l'équipage que des maladies avoient diminué beaucoup, força Mendagna de s'en retourner ſans faire un établiſſement.

La crainte du fameux Drack, qui le premier troubla la profonde tranquillité dont les Eſpagnols jouiſſoient dans la Mer du Sud, fit remettre des établiſſemens qu'on projetta d'abord; & des changemens fréquens de Viceroi du Pérou, dès troubles au Pérou, & les révoltes des Chiliens firent perdre enfin tout à fait de vue les Isles de Salomon. Ce ne fut que 28 ans après 1595, que Mendagna obtint des vaiſſeaux ſur leſquels il embarqua des femmes, & tout ce qu'il croioit néceſſaire pour établir une colonie: il eut Zviros pour premier Pilote. Après avoir fait depuis Lima 1794 lieues de chemin, par les 10 à 11 degrés de latit. ſud, il aborda à l'Isle de Guadalcanar ou Ste. Croix, qu'il trouva être environ de 60 lieues de longueur. Il y mourut, ou ſe perdit, avec le vaiſſeau Amiral après s'y être arrêté 2 mois 8 jours. Sa mort rendit le ſecond voyage auſſi infructueux que le premier; & depuis ce tems la Monarchie Eſpagnole tomba dans un état de langueur, qui ne lui permit pas de penſer à de nouvelles découvertes & à de nouveaux établiſſements. La déſcription de ces Isles & de leurs habitans n'a jamais été rendue publique en entier. On envie aux autres un bien dont on ne peut pas jouir; & la foibleſſe a toujours mis ſa plus grande ſureté dans le ſecret. On ſait en général qu'elles ont l'air tempéré, qu'elles ſont très fertiles & excellentes pour y faire des établiſſemens, abondantes en épiceries, bétail & toutes les ſortes de fruits. Le volcan qu'on y a trouvé prouve qu'elles ſont élevées & montueuſes, & qu'on doit y trouver toutes les choſes précieuſes que la nature produit dans les climats ſous lequel elles ſont ſituées, & qui répondroient au nom faſtueux que les Eſpagnols leur ont donné.

Les habitans de ces Isles doivent être blancs, noirs, roux & blonds, fort doux & fort dociles. Je remarquerai à cette occaſion, qu'en général les habitans des terres de la Mer du Sud ſont très différens

rens. On en trouve de toutes les couleurs, de fort doux & traitables, & d'autres plus ſauvages & farouches. Il paroit que cela dépend des colonies de différentes nations de Chinois, de Japonnois, de Molucquois, de Négres de la nouvelle Guinée, &c. dont le hazard les a peuplé. Tous ces peuples vivent encore dans l'état de la premiere nature, & ſans défenſe, n'ayant d'autres armes, que les bâtons & la premiere pierre qu'ils ramaſſent. Voici leurs noms tirés d'Herrera & de Daviti, & ils ſont au nombre de 18.

1. Ste. Iſabelle ou Eliſabeth de 300 lieues de tour.
2. Guadalcanar ou Ste. Croix, un peu moins grande au ſud-oueſt de la premiere.
3. 4. St. Marc & St. Nicolas de 10 lieues de tour au ſud-eſt de St. Eliſabeth.
5. Arraciſe de la même grandeur au ſud-eſt de St. Eliſabeth.
6. St. Jerome à l'eſt de St. Eliſabeth de la même grandeur.
7. 8. 9. Buena Viſta, St. Diemar & Floride de 20 lieues chacune de tour.
10. Ramos de 200 lieues de tour à l'oueſt de St. Eliſabeth.
11. 12. 13. Malaita, Atregrada & les trois Maries n'en ſont pas loin.
14. St. Jaques de 200 lieues de tour au ſud de Malaita.
15. St. Chriſtophe au ſud-eſt de la précédente de la même grandeur.
16. 17. 18. Ste. Anne, Ste. Catherine & Nombre de Dios petites au nord, & éloignées des autres.

CONSIDÉRATIONS
SUR
LE GLOBE
CINQUIEME MÉMOIRE,
SUR
LE CONTINENT AUSTRAL OU MÉRIDIONAL.

Le ſecond continent méridional un peu mieux connu que le premier eſt ſitué dans les plus beaux climats depuis la ligne juſqu'au 45 degré latit. ſud: ſa découverte & ſa poſſeſſion feroient obtenir aſſurément les plus grand avantages par lui-même & par la communication facile avec les poſſeſſions Européennes en Afrique & aux Indes orientales. On trouveroit dans les Régiſtres de la Compagnie des Indes orientales de Hollande des Rélations de leurs Gouverneurs de Batavia qui ont fait viſiter une partie des côtes de ce continent, qui donneroient de grandes lumieres. Mais, comme il n'eſt pas de ſon intérêt, & au deſſus de ſes forces, d'y faire des établiſſemens, elle aime mieux qu'il reſte inconnu aux autres puiſſances de l'Europe, qui y trouveroient les denrées précieuſes qu'elle leur fournit à préſent. Une compagnie marchande, obligée de faire des fraix immenſes, d'entretenir des forces conſidérables de mer & de terre, pour ſe maintenir dans la poſſeſſion de païs très vaſtes, & de places en grand nombre très diſperſées, qui l'auroient renverſé depuis longtems, ſi le commerce excluſif des épiceries ne la ſoutenoit pas, ne peut pas étendre ſes poſſeſſions & faire de nouveaux établiſſemens, à moins qu'elle n'y trouve l'or & l'argent à prendre ſans la moindre dépenſe. Pour ſe maintenir dans la poſſeſſion excluſive de ſon commerce, elle a fait com-

comme les Eſpagnols & les Portugais, qui ſe firent partager notre Globe par le Pape. Elle a obtenu deux méridiens de démarcation par leſquels elle jouit du commerce excluſif & de la poſſeſſion de tous les païs découverts ou non découverts, des établiſſemens faits & à faire depuis les 50 juſqu'aux 200 degrés de longit. Sa jalouſie s'eſt avancée ſi fort dans la Mer du Sud pour empêcher la découverte des Isles de Salomon, & de la nouvelle Zélande, qu'ils défendent à la Compagnie occidentale & à tout Hollandois, de ne pas commercer, faire d'établiſſement ou de découverte dans cette immenſité des mers & des terres.

Elle eſt déjà obligée de détruire plus d'aromates qu'elle ne peut emploier & débiter; & elle n'a d'autre intérêt que d'empêcher que d'autres ne lui enlevent une partie de ſes poſſeſſions, & de ſon commerce, ou de dérober la connoiſſance de découvertes, & d'établiſſemens, qui, en procurant les mêmes productions, lui feroient les mêmes torts, & auxquels elle ne pourroit ni n'oſeroit s'oppoſer à force ouverte.

Je ne m'étendrai pas ſur l'extrémité méridionale de ce continent découverte en 1642 par Taſman, ſur les différentes parties de ſa côte occidentale, la Terre de Nuits découverte en 1627, la Terre de la Lionne en 1622, la Terre de la Concorde découverte en 1616, reconnue en 1696 par des vaiſſeaux de la Compagnie des Indes orientales de Hollande, & viſitée en 1699 par Dampiere, la Terre de With, découverte en 1628, & viſitée en 1688 & 1699 par Dampiere, les Terres de Diemen, d'Arnheim & Carpenterie, noms qu'elles ont reçues en partie des Gouverneurs de Batavia qui les ont fait reconnoitre. Le réſultat de ces découvertes eſt qu'une partie de ces côtes eſt baſſe, & inondée juſqu'à une certaine diſtance dans les terres, que ſes habitans comme ceux de toutes les nouvelles terres, ſont d'un caractere ſauvage, que ſes productions ne promettent pas de grands avantages, & que ce n'eſt qu'en pénétrant dans l'intérieur du païs qu'on pourroit eſpérer d'en trouver. La connoiſſance la plus intéreſſante eſt celle que donne la Rélation de Quiros d'une partie de ſa côte orien-

orientale, Terre heureuſe, dont il nous donne la connoiſſance la plus exacte & la plus circonſtanciée. J'ai déjà dit, qu'il avoit fait en 1595, avec Mendagna un voyage en qualité de premier Pilote pour la découverte des Isles de Salomon, qui n'eut pas beaucoup de ſuccès. Il obtint en 1605 deux vaiſſeaux, & eut ſous lui le Capitaine Louis Perez de Torres. Il partit de Callao le 21 Decembre 1605, dirigea ſa route ſud-oueſt, & fit après 36 jours de navigation les belles découvertes, entre les 25 & 18 degrés de lat. qui regardent le premier continent dont j'ai déjà parlé. Il continua de là ſa route entre les 10 & 11 degrés de lat. ſud, & après 90 jours de navigation il arriva ſans avoir rencontré aucune Isle aux côtes orientales de ce continent, qu'il parcourut par une étendue de 80 lieues, & qu'il nomma la Terre de St. Eſprit. Il retourna de cette côte, faiſant route par le nord-eſt au Mexique, en la dirigeant autant qu'il pouvoit, & que les vents aliſés le permettoient à l'eſt pour toucher aux Isles de Salomon. Il les manqua, ſoit qu'il ne les crut pas ſi fort à l'eſt qu'elles le ſont à l'égard des Terres dont il partit, ou qu'il ne lui fut pas poſſible de diriger aſſez à l'eſt ſa route. Il alla du Mexique en Eſpagne, & demanda avec les plus grandes inſtances à Philippe III. d'y faire des établiſſemens. Il ſollicita vainement pluſieurs années, & mourut en Eſpagne avec le chagrin d'avoir adreſſé ſes belles vues à un roi indolent, qui ſe conſola de la perte des plus belles provinces parce qu'une riviere ne s'aggrandit qu'en perdant de ſes bords, & qui n'avoit aucun des talens néceſſaires pour réparer les fautes de ſon pere, & arrêter ou appaiſer la haine & la jalouſie de toute l'Europe qu'il lui avoit laiſſé pour héritage. La politique vague ſuperſtitieuſe, cruelle, & intrigante de Philippe II. uniquement occupé à troubler l'Europe & à opprimer ſes peuples, avoit commencé la chûte de cette vaſte & ſuperbe Monarchie, fondée par le bonheur & le génie de Ferdinand, d'Iſabelle, & de Charles-quint, qui embraſſoit l'ancien & le nouveau monde, & n'avoit de bornes que celles de notre globe. Il ne comprit jamais que la politique des rois ne peut ni ne doit avoir d'autre but que le bonheur des peuples qu'ils gouvernent; il crut que c'étoit l'art de les tranniſer

& de faire du mal aux autres. Il prépara la perte de la Hollande, des Indes orientales, & du Bréſil, & ne fit une guerre continuelle, que pour diſſiper les Tréſors des deux Indes, & pour épuiſer l'Eſpagne dont il fit un déſert par la perſécution & l'expulſion des Maures.

Voici ſa rélation qui eſt ſa huitieme requête que j'ai tirée, & traduite des Mémoires qui ſe trouvent dans les Recueils des freres Bey.

„Votre Majeſté me permettra de l'informer que c'eſt la huitieme ſupplique, que moi Ferdinand de Zviros ai l'honneur de lui adreſſer, dans lesquelles, je l'ai prié avec autant d'inſtance que l'importance de la choſe le mérite, de faire des établiſſements dans les païs méridionaux inconnus juſqu'ici, mais découverts par moi. Au lieu de la réſolution la plus favorable, à laquelle je devois m'attendre, je n'ai point eu de réponſe pendant un ſéjour de 14 mois, que j'ai fait à la Cour de V. M. J'ai emploié mon bien & mes peines pendant 14 ans pour ces découvertes, j'ai parcouru des mers immenſes, & n'aiant eſſuié juſqu'ici que des dangers, & des travaux infinis, je crois pouvoir demander à V. M. d'être emploié dans l'entrepriſe que je propoſe avec les vaiſſeaux & les ſecours néceſſaires pour la faire réuſſir; récompenſe unique que je demande pour les peines que je me ſuis données. Il eſt ſûr que l'étendue de ce païs, (ſuivant ce que j'ai vû moi-même, j'en appelle au témoignage du Capitaine Louis Perez de Torres & de tout mon équipage,) ſurpaſſe l'Europe, l'Aſie mineure, & les Isles qui y appartiennent en grandeur. V. M. peut en faire facilement la conquête ſans avoir à craindre comme aux Indes orientales, le voiſinage des Turcs, Maures & autres. Il s'étend de la ligne dans la zone tempérée, & il faut remarquer que, comme la plupart des païs découverts juſqu'ici ſous les 15 degrés de lat. ſurpaſſent l'Eſpagne en fertilité, celui-ci à cette hauteur eſt un vrai paradis terreſtre. Nous ſerons les Antipodes d'une partie de l'Europe, de l'Aſie & de l'Afrique ſi nous y faiſons des établiſſemens. Le païs eſt élevé, & entremêlé de montagnes & de plaines. Il eſt peuplé d'habitans blancs, noirs & jaunes. Les uns ont les cheveux longs & noirs, d'autres jaunes, luiſans, friſés ou en touffes. *La couleur des cheveux marque la différence*

rence des nations. Ils ignorent l'art de bâtir des villes, vivent ſans loix ni magiſtrats, ſous l'autorité des peres de familles, & obſervent des coutumes très ſimples. Ils ont des endroits particuliers pour enterrer les morts & pour faire la priere. Leurs armes ſont des piques de bois, & des arcs & des flêches, qu'ils n'empoiſonnent pas, comme pluſieurs Indiens de l'Amérique. Ils ſe ſervent de canots pour la pêche, & ceux des Isles ſont bien bâtis. Ils ſont habillés depuis le nombril juſqu'à la moitié de la jambe, ils vivent longtems, ſont bienfaits, vifs, agiles, gais, doux, traitables, de bon caractere, & extrémement reconnoiſſants. Ce qui me fait eſpérer qu'on en viendra à bout en les traitant avec douceur. Leurs maiſons ſont couvertes de feuilles & de branches d'arbres. Ils ſont toutes ſortes de poterie, des couteaux, ſcies & autres inſtrumens tranchans, de nacre, avec leſquels ils travaillent, & ſont des cuilleres & d'autres outils de bois. Ils ont des flûtes, tambours, & autres ſortes d'inſtrumens de muſique. Leurs jardins & terres labourables ſont bien diſtribuées & entourées de Cocotiers, & de hayes vives. Nous leur avons appris à châtrer des cochons & des coqs. Ils ſont du pain qui eſt admirable de trois ſortes de racines. La terre eſt noire, graſſe & extrêmement fertile. Elle produit en général tout ce que nous avons en Europe en grande abondance, toutes ſortes de légumes, des fruits, des raiſins admirables, Citrons, Oranges, Cannes de Sucre, Cocos & d'autres fruits que nous ne connoiſſons pas. Il y a trois ſortes de plantes dont on fait l'uſage de notre lin. La campagne eſt entremêlée de Forêts de haute futaie, d'Ebeniers, de Cedres &c. propres pour la marine & toutes ſortes de bâtimens: le goudron dont on ſe ſert pour les bateaux, eſt fait d'huile de Cocos, mais il y en a encore une autre eſpece. Tout le païs fourmille de beſtiaux, de moutons, de cochons, & de toutes ſortes de Volailles. Les rivieres abondent autant en poiſſons d'eau douce que la mer des côtes en poiſſons qui lui ſont propres, & en huitres, moules & coquilles. Nous n'avons vû ſur toute la côte aucun animal dangereux, ni terreſtre ni aquatique, même peu ou point de mouches & de couſins. Le vent d'eſt continuel qui

vient de la mer, nettoie & rafraichit la côte, comme le même vent, fait le même effet ſur celle du Bréſil, avec la différence que la Mer du Sud étant trois fois plus étendue que l'Océan entre l'Afrique & l'Amérique, cette côte doit être beaucoup plus fraiche & agréable que celle du Bréſil. Mais ce qui par deſſus la beauté & la fertilité du païs fait le point le plus important, nous y avons trouvé toutes les choſes précieuſes. Mon Capitaine eſt entré dans le païs, & a trouvé beaucoup d'or; j'ai vû du minerai d'argent, des diamants & d'autres pierres précieuſes. Il y a des huitres perlieres en abondance dans la mer qui baigne les côtes. Nous avons trouvé de la ſoye, de l'yvoire, des fleurs & des noix de muſcade, du gingembre, & ſelon toutes les apparences, il doit s'y trouver de la canelle & des cloux de giroffle. Toute la côte eſt ſaine & ſure. Le port que nous avons nommé Vera Crux peut contenir plus de 1000 vaiſſeaux à l'abri de tous les vents. Il eſt à l'embouchure de deux rivieres, dont l'une reſſemble au Guadalquivir, d'un côté elle eſt bordée par une belle forêt, & de l'autre côté par une vaſte pleine. A' quelque diſtance de la côte, il y a 7 grandes Isles de plus de 200 lieues d'étendue, dont une qui n'eſt qu'à 10 lieues du port, peut avoir 50 lieues de tour. Quand V. M. ſera le maitre de ce païs, il ſera l'entrepôt de tout le commerce du Chili, du Pérou, du Mexique, de toutes les terres de la Mer pacifique, des Isles Philippines, du Japon, de la Chine, des Isles Moluques, de leurs aromates, & de toutes les Indes orientales. J'ai érigé une croix, bâti une egliſe à la Ste. Vierge de Lorette, & fait dire 20 Meſſes, auxquelles tout mon équipage a aſſiſté pour avoir des indulgences pour la Pentecôte. J'ai fait une proceſſion le jour du Corps de notre Seigneur, & j'ai attaché en trois différens endroits les armes & les titres de V. M. Cette découverte ne peut qu'augmenter & étendre ſa gloire en faiſant connoitre ſon nom glorieux dans des païs immenſes, & vous pouvez ajouter, Sire, de ce moment à vos titres celui de la Terre auſtrale de St. Eſprit."

Il me paroit inutile, après cette rélation ſi circonſtanciée de détailler ce qui ſe trouve dans Dampiere qui a viſité cette côte orientale depuis

depuis la ligne juſqu'au 6 degré de lat. (*& a découvert que la Nouvelle Brétagne eſt une Isle ſéparée de la Terre ferme,*) ni de rapporter ce qui ſe trouve dans la rélation des trois vaiſſeaux envoiés en 1721. par la Compagnie des Indes occidentales de Hollande à la découverte des Terres Auſtrales, dans Taſman, le Maire & Herrera. Ils s'accordent parfaitement avec la Rélation de Zviros. C'eſt une terre fertile & délicieuſe, où l'on trouveroit les aromates, & toutes les choſes précieuſes. Texeira & Argenſola nous apprennent que les rois de Ternate, quand ils étoient les maitres des Moluques, & des terres voiſines, tiroient beaucoup d'or de la Terre des Papous, qui eſt une partie, peut-être ſéparée par un canal du continent même.

Les côtes occidentales de ce continent dans la Mer des Indes annoncent des Terres baſſes; mais celles de la partie orientale dans l'Océan pacifique ſont très élevées; il paroit qu'une chaine de Montagnes, qui par le Cap Diemen tient au Sud à la Nouvelle Zélande remonte du Nord vers la ligne, en ne s'éloignant gueres des côtes de la Mer du Sud, & les partage en deux parties inégales en grandeur.

Ne m'étant propoſé dans ces Mémoires, que la diſcuſſion Géographique des Parties inconnues du Globe, je réſerve celle qui regarde les habitants & les productions de ces deux continents & des Isles des vaſtes mers qui les environnent, pour un Mémoire ſéparé.

Ceux du continent Antarctique paroiſſent tirer leur origine de la Chine & du Japon; comme ceux de la côte ou partie orientale du ſecond, avec un mêlange déjà d'autres races. Les Negres de la Terre de Papous & de la partie occidentale, déſignée dans les cartes par le nom de la Nouvelle Hollande, ſont ſelon toute apparence des peuplades ſorties du continent de l'Afrique.

J'ai propoſé la découverte de ces deux continents, qui par leur ſituation promettent les avantages les plus grands pour le commerce; & de faire en même tems la choſe la plus belle & la plus intéreſſante pour tous les hommes; de leur donner une connoiſſance parfaite du Globe qu'ils habitent.

Ma propoſition n'eſt pas fondée, comme celle de la découverte de l'Amérique par Colomb le fut, ſur des conjectures géographiques

&

& phyſiques, dont le philoſophe & l'homme inſtruit ſçavent apprecier le mérite, mais qui ne ſauroient toucher & mettre en mouvement la politique ordinaire, bornée, petite & intéreſſée ; elle eſt appuiée ſur des faits inconteſtables, qui donnent une certitude abſolue, ſur le témoignage d'un nombre conſidérable de témoins véridiques, de Navigateurs dont j'ai ſuivi, comparé & combiné avec attention, les routes, les obſervations & les découvertes.

L'exiſtence préſente de l'Europe, ſi glorieuſe & ſi belle a tant d'égards, eſt dépendante abſolument de ſon commerce & de ſes colonies, dans les autres parties de notre globe; qu'on la réduiſe un moment à elle-même, une révolution étrange dans les arts, les manufactures, la maniere de vivre, la nourriture, les moeurs, la population & l'intérêt politique en ſeroit la ſuite.

Chaque peuple s'en eſt approprié une partie, & la portion qui fait ſon partage décide, ſuivant la ſageſſe avec laquelle il ſait la ménager, du degré de ſa puiſſance, de ſes reſſources & de ſon opulence; l'intérêt du commerce porté au degré de la plus grande extenſion eſt celui qui ſubordonne tous les autres, & la jalouſie qui regne à cet égard entre les puiſſances maritimes, eſt le germe de ces guerres funeſtes qui déſolent l'Europe aujourd'hui, qu'une treve forcée & dictée par la néceſſité & l'épuiſement terminera, & qui s'embraſera avec plus de force, après le court intervalle d'une paix qui dans le fond n'eſt qu'une guerre continuée de chicanes ſans hoſtilité, pendant lequel le gouvernement prépare les prétextes pour l'éclat, & pourvoit à de nouveaux moyens pour écraſer le peuple.

Un regard jetté ſur le globe fait voir le délire de ces égaremens ambitieux; il préſente une ſource intariſſable de bonheur & de richeſſes, dans laquelle par la communication heureuſe & paiſible avec des païs immenſes, qu'une ignorance ſtupide néglige, la ſageſſe puiſeroit ſans ceſſe ces avantages ſolides & réels, ces biens précieux, qui échappent à la politique fondée ſur la tirannie, la deſtruction & le carnage.

SUR

LES PRÉSERVATIFS LES PLUS EFFICACES CONTRE LA PETITE VÉROLE.

PAR M. COTHENIUS.

Traduit du Latin.

Je rougis assurément, MESSIEURS, d'être depuis si longtems *) Membre de votre Illustre Corps, & d'y avoir été aggrégé avec des témoignages si flatteurs de votre affection, sans vous avoir encore donné des marques publiques de ma reconnoissance; il semble que j'aye trompé votre attente, & j'ai besoin de toute votre indulgence pour excuser un aussi long retardement.

Je ne me le pardonnerois pas à moi-même, ce retardement, si c'étoit un pur effet de ma négligence; mais vous savez tous quelles sont les occupations nombreuses & indispensables, auxquelles je suis continuellement obligé de vaquer: c'est sur elles que je fonde l'espérance de trouver grace auprès de vous.

Comment en effet des hommes tels que vous, MESSIEURS, qui connoissez tout le prix de l'humanité, toute l'importance des services dont la Patrie est l'objet, seroient-ils surpris que je croye devoir & que je consacre en effet tout mon tems & toutes mes forces à l'exercice de fonctions dans lesquelles il ne s'agit pas moins que de veiller à la conservation de la précieuse santé de notre grand Monarque,

*) Ce Discours a été lu à l'Académie le 31 Janvier 1765.

que, & de l'Auguſte Maiſon Royale, ſans refuſer pour cela mes ſoins aux Citoyens renfermés dans les villes, aux habitans des campagnes, & à ces Orphelins entretenus par l'Etat qui me ſont particuliere-ment confiés.

Je pourrois ajouter à cela une foule d'affaires publiques dont j'ai l'adminiſtration dans cette Capitale, & qui emportent une portion conſidérable de mon tems.

Et combien les motifs que je Vous allegue ici, n'ont-ils pas eu de force, à quel point ne ſe ſont-ils pas accrus, pendant le cours de cette redoutable guerre, où, au milieu des dangers, au ſein des com-bats, j'étois appellé à me dévouer au ſervice de ces généreux défen-ſeurs de la Patrie, de ces braves Soldats, dont les uns étoient aux pri-ſes avec les maladies, les autres couverts de bleſſures.

C'eſt dans cet intervalle de tems-là même, où je bravois avec joye la mort en reſpirant l'air empeſté des Hopitaux militaires, qui m'a infecté moi-même à quatre repriſes de ſa contagion, que vous avez cru, MESSIEURS, devoir encourager mes efforts, & récom-penſer mes travaux, de la maniere la plus agréable & la plus honora-ble pour moi, en aſſociant mon nom à la gloire des vôtres.

Permettez donc, Illuſtres Académiciens, que je dévoile ici le fond de mon coeur, & que je vous le montre comblé, inondé, péné-tré du ſentiment de vos bienfaits.

Recevez, je vous en conjure, favorablement avec mes actions de grace le voeu que je renouvelle & que je confirme ſolemnelle-ment, de ne me propoſer jamais d'autre but que le bien du genre humain.

Que le ſecours de vos lumieres me rende de plus en plus capa-ble d'accomplir ce voeu! que le prix de votre amitié m'y encourage puiſſamment & m'en recompenſe abondamment!

Quand je ne vous ſerois connu, MESSIEURS, par aucun en-droit, quand je n'aurois pas contracté avec vous les douces rélations d'Aſſo-

d'Aſſocié & de Confrere, je n'aurois pas laiſſé de courir la même carriere que vous à un égard, j'aurois oſé vous diſputer la palme dans un genre; je veux parler du zele inviolable & de tous les ſentimens d'admiration, de reſpect & d'amour, dûs à ce grand Roi, qui tient inconteſtablement le premier rang parmi les vrais Héros.

C'eſt lui qui, aſſis ſur le Char de la Victoire, raſſure l'Univers allarmé, ſoulage ſes peuples gémiſſans ſous le poids des cataſtrophes inſéparables de la Guerre, aſſure leur repos & leur bonheur par cette paix glorieuſe tant deſirée, & rend aux Muſes le loiſir & la tranquillité dont elles ont beſoin.

C'eſt lui, qui, après avoir été la terreur des ennemis, dépoſe cet aſpect formidable, pour contracter & ſerrer avec eux les liens d'une douce amitié; pour ſe dévouer ſurtout au bien de ſes peuples, pour être le tendre Pere de la Patrie.

L'exalter, entreprendre ſon éloge! Quel projet plus téméraire! Non, il vaut mieux l'admirer en ſilence, le vénérer dans l'intérieur de ſon ame, que de déployer les voiles d'une éloquence qui ne pourroit ſe préſerver du naufrage. C'eſt ici le cas de ces grandes choſes où il ſuffit d'avoir voulu.

Conſidérons-le avec complaiſance comme notre Bienfaiteur, mais ne prenons pas un vol trop élevé pour aller l'enviſager dans ce faîte de gloire où ſes exploits l'ont placé.

Vivre ſous les ailes d'un tel Roi, voilà notre gloire & notre ſureté; reconnoitre & ſentir ce bonheur, voilà notre devoir le plus ſacré.

Faſſe le Maitre du Monde, l'Arbitre des Deſtinées, je l'en ſupplie avec ardeur, que les jours glorieux de ce bon Roi, de ce ſage Pere de la Patrie, de ce digne Protecteur de l'Académie, coulent avec la plus grande lenteur, & ſoyent comblés de proſpérités! Que celui dont tous les ſoins tendent à nous rendre heureux à l'avenir, jouiſſe le premier du bonheur le plus pur! Que toute l'Auguſte Maiſon Royale fleuriſſe d'âge en âge & de ſiecle en ſiecle, tant que le Monde ſubſiſtera!

A' préſent, Meſſieurs mes très honorés & très chers Confreres, accordez-moi quelques momens d'une d'attention favorable; je tâcherai de la mériter en traitant un ſujet très intéreſſant, dont je ſoumets la déciſion à vos lumieres. Je vais expoſer les meilleurs moyens de prévenir les ravages de la petite vérole, les préſervatifs les plus aſſurés contre cette redoutable contagion.

Je ne crois pas qu'il y ait actuellement perſonne, non ſeulement dans une Aſſemblée de Savans telle que celle-ci, mais parmi tous les citoyens de quelque ordre qu'ils ſoyent, aux oreilles de qui le nom de l'Inoculation ne ſoit parvenu, & qui n'ait quelque idée de cette pratique.

Il n'y a point non plus d'ame aſſez inſenſible, de coeur aſſez dur, pour ne pas déplorer la perte continuelle de tant de ſujets enlevés à leurs familles & à l'Etat par le terrible fléau de la petite vérole, qui rend ſi ſouvent tout l'art de la médecine inutile & infructueux.

On ne ſauroit s'empêcher de mettre en ligne de compte les gémiſſemens du beau ſexe, à qui cette cruelle maladie ôte ſouvent ſon droit à ce titre, en le défigurant au point de lui arracher des voeux impies, de lui faire préférer la perte de la vie à celle de ces charmes dont l'éclat étoit la ſource de tant de douceurs.

Il s'eſt écoulé un demi-ſiecle, depuis que la nouvelle méthode de préſerver les hommes de ce mal qui les fait périr ou les rend difformes, s'eſt introduite par *Emanuel Timon*, Médecin de Conſtantinople, qui avoit fait ſes études à Oxford & à Padoue. C'étoit une pratique uſitée depuis longtems chez les Georgiens, les Circaſſiens & les Arméniens; de qui elle avoit paſſé aux Grecs de Conſtantinople. *Jaques Pylarin* de Céphalonie, premier Médecin de PIERRE LE GRAND, Empereur de Ruſſie, qui fut depuis chargé des affaires de la République de Veniſe à Conſtantinople, y avoit auſſi inoculé; & ce fut à l'exemple de ce dernier que *Maillard* commença d'en faire autant à Londres, avec tant de ſuccès que les Anglois ne balancerent pas à adopter cette pratique, & à la répandre dans tous les Etats ſoumis à leur domination, en particulier dans leurs Provinces d'Amérique.

Le

Le bruit s'en répandit bientôt par toute l'Europe, où le plus grand nombre reçut cette nouveauté comme un bienfait inſigne de la Providence, & lui donna les éloges les plus magnifiques. D'autres pourtant chercherent à la rendre ſuſpecte, ou même la décrierent fortement. Il y eut des tems, où en Angleterre même, & ſurtout dans la nouvelle, il s'excita des murmures ſi forts à ce ſujet parmi le peuple, que cet uſage demeura ſuſpendu & parut aboli. Reprenant enſuite de nouvelles forces, l'inoculation trouva les défenſeurs les plus ardens, non ſeulement en Angleterre, mais en France, en Allemagne & ailleurs.

Je me ſouviens cependant d'avoir vu des gens de bon ſens & de probité s'élever avec force contre elle, prétendant qu'il y avoit de la témérité à une perſonne en parfaite ſanté de ſe procurer une maladie artificielle, qui la met en danger de mourir, l'événement de l'inoculation n'étant jamais infaillible, ni toujours heureux, mais ſouvent douteux, & quelquefois mortel; ce dont ils alléguoient des preuves de fait.

Les Théologiens & les Prédicateurs tournerent leurs vues ſur cet objet, les uns prétendant que les raiſons les plus fortes ne permettoient pas qu'on tentât ainſi la Providence; & les autres jugeant au contraire qu'on ne pouvoit trop recommander & étendre l'uſage d'une pratique auſſi ſalutaire.

Ainſi dans certains endroits on trouva les plus grandes facilités; tandis qu'ailleurs l'attachement aux anciens uſages, ou des motifs de conſcience, inſpirerent la plus grande répugnance pour une tentative équivoque & périlleuſe.

L'importance du ſujet, l'honneur de l'art & l'intérêt public m'ont engagé à faire tous mes efforts pour approfondir un ſujet auſſi épineux; j'ai apporté à cet examen la plus entiere impartialité; & je n'ai d'autre but que d'aſſigner ſon juſte prix à la vérité déjà découverte, ou encore à découvrir.

On m'excuſera ſans doute, ſi, avant que d'entrer dans le fond même de la diſcuſſion, je fais préceder cette Queſtion: Si la petite

vérole eſt une maladie qui nait avec nous, dont perſonne à quelque âge qu'il ſoit parvenu ne peut ſe croire à couvert; en ſorte que, ſuivant l'hypotheſe d'un Médecin de Siléſie qui a eu de la répuration, c'eſt un dévelopement parfait, néceſſaire dans le corps humain pour que la ſanté acquiere ſa conſiſtance décidée; ou bien, ſi c'eſt une maladie nouvelle, née ſous un Ciel étranger, & dont les hommes pourroient demeurer exempts, ſans que leur conſtitution & leur ſanté en ſouffriſſent la moindre atteinte.

En recourant ſoigneuſement aux monumens de l'Antiquité, on ne trouve aucune preuve qui mette en droit d'affirmer que les maladies dont le genre humain eſt aujourd'hui affligé, ayent regné dans tous les tems. Des Savans diſtingués ont même démontré que la petite vérole a été pleinement inconnue aux Grecs; quoique quelques autres ayent prétendu que les *anthraces*, en Latin *carbunculi*, dont Hippocrate & d'autres Médecins Grecs font mention, doivent être pris pour la petite vérole.

Il y a eu, & il exiſte encore, des gens qui nient poſitivement la naiſſance d'aucune nouvelle maladie; mais ils ſemblent manquer de préciſion, & confondre la diſpoſition à contracter toutes ſortes de maladies avec les maladies mêmes.

Et l'on ne peut pas dire même que cette diſpoſition exiſte dans tout corps animal, chaque individu, ſuivant la ſtructure & l'oeconomie de ſon corps, étant plus diſpoſé à recevoir ou à engendrer telle ou telle maladie, plutôt que telle ou telle autre.

La maladie des boeufs, auſſi bien que toutes les autres contagions propres aux animaux, ne peuvent exercer aucun empire ſur le corps humain, quoiqu'elles conſiſtent en exhalaiſons malignes, & que l'haleine ſeule ſuffiſe pour la communiquer aux boeufs.

On ſait généralement que le mal vénérien tire ſon origine, de l'Amérique, & que le pourpre des accouchées eſt propre à l'Allemagne.

C'eſt

C'eſt de l'air que nous reſpirons, des coutumes qu'on nous fait contracter dès notre tendre enfance, des influences du ſoleil, des qualités de nos alimens ſolides & liquides, du genre de vie auquel nous ſommes dévoués, qu'on peut & doit déduire les raiſons de toutes les maladies dont les habitans des diverſes contrées de la Terre ſont affectés & affligés en tant de manieres différentes.

Quand donc il arrive des changemens dans le genre de vie & dans l'eſpece de la nourriture, il eſt inconteſtable qu'il en naît de nouvelles maladies, ou qu'il peut en ſurvenir du dehors, apportées & introduites par des étrangers: l'expérience ne laiſſe abſolument aucun doute à cet égard.

Quelcun parmi les Grecs ou dans toute autre Nation a-t-il jamais connu cette vilaine & funeſte maladie, ſi commune en Guinée, où elle porte le nom de *Jaws*, par lequel, graces à Dieu, elle nous eſt auſſi uniquement connue juſqu'ici, quoique j'aye lu dans quelque rélation, qu'une femme Angloiſe, qui avoit été attaquée de ce mal en Amérique, & qui avoit paſſé en Angleterre, y mourut bientôt après, peut-être par un très grand bonheur, ayant que d'avoir pu répandre la ſemence du mal. Il eſt en effet contagieux, ce mal, qui ſe manifeſte d'abord par des puſtules à la peau de la grandeur d'une pointe d'aiguille, qui deviennent enſuite des ulceres, dont la ſuppuration ronge entierement la peau, gâte la maſſe entiere des humeurs; & après avoir devoré tous les ſolides, quand il ne lui reſte plus d'autre aliment, détruit les os mêmes par la carie.

Je ne dirai rien de la *Vena Medina*, fléau particulier à une Nation Arabe, qui cauſe les plus cruels tourmens, que la mort ſeule peut terminer, à moins que par une prompte opération on ne ſache tirer un animal vivant, long ver, caché ſous la peau, ou à une plus grande profondeur ſous les muſcles.

Jamais on ne voit les ſavans plus embarraſſés que quand, dans la diſcuſſion de queſtions pleines d'ambiguité, il s'agit de rendre à l'antiquité ce qui lui appartient. C'eſt en particulier le cas des Médecins

cins par rapport à Hippocrate, le pere de tous ceux qui exercent cet art d'une maniere raiſonnable.

Ce n'eſt pas que je veuille conteſter le mérite de ceux qui, feuilletant & Livres & Manuſcrits, donnent leur tems à la lecture des Auteurs Grecs, & maintiennent les droits de la vénérable Antiquité.

De là une controverſe célebre entre les Médecins du premier ordre, au ſujet de la petite vérole: ſavoir, ſi elle a été connue d'Hippocrate, & des autres Grecs, dans le tems où leur Ecole étoit floriſſante?

Quoiqu'au premier coup d'oeil il ſemble qu'on pût réléguer cette Queſtion dans la foule de tant d'autres qui ſont vaines & frivoles, je la crois pourtant de quelque importance dès qu'il s'agit de porter un jugement aſſuré ſur une autre Controverſe, c'eſt celle de l'inoculation.

En effet, ſi la petite vérole étoit une maladie étrangere & récemment introduite, pourquoi renoncer d'abord à l'eſpérance d'en délivrer entierement des Nations dont le climat ou les moeurs ne ſeroient pas propres à la favoriſer?

Quant au reſpectable Vieillard de Cos, il n'en coûtera rien à ſa gloire, quand même il n'auroit jamais oui parler de la petite vérole. Plût à Dieu que nous fuſſions aſſez heureux pour jouir de la même ignorance! Mais par malheur inſtruits à nos dépens, nous voyons tous les jours ce funeſte mal porter la déſolation dans les familles, faire couler des torrens de larmes ſur les victimes chéries qu'il enleve à de tendres parens.

Permettez, *Meſſieurs*, que ſortant ici pour un moment de la route dans laquelle j'étois entré, je vous prie d'être attentifs aux preuves que je veux tirer d'Hippocrate même, pour faire voir que ce qu'il déſigne par le nom d'*Anthrax*, quoiqu'on ait voulu le confondre avec la petite vérole, en differe totalement, non ſeulement parce que c'eſt une maladie ſymptomatique, mais encore par ſa nature, par la maniere

re dont il eſt produit, par ſa grandeur, ſa ſituation, ſa forme, ſon type & ſa cure.

L'*anthrax* des Grecs, dit *carbunculus* en Latin, a été déſigné chez les Médecins Arabes par les noms de feu, de charbon, ou de rouille; & l'on trouve là deſſus dans Avicenne un paſſage qui ſemble mettre la queſtion agitée hors de tout doute, en bannir toute ambiguité. Cet Auteur dit, „que, ſi la rouille ſe mêle au ſang, il s'éleve parmi les „ulceres varioleux des tumeurs, dans leſquelles cette rouille eſt ſem„blable aux puſtules que cauſe la brûlure: c'eſt ce qu'on appelle *feu „ſacré*;" & la petite vérole au milieu de laquelle on voit ſe former ces „tumeurs eſt de la plus mauvaiſe eſpece." Le même illuſtre Arabe, dans ſon Traité des fievres, en parlant de l'*anthrax* & du *carbunculus*, les met dans la claſſe des apoſtemes, & preſcrit une cure différente de celle de la petite vérole.

Ajoutez à cela que les Arabes qui ne ſe font point honte de reconnoître qu'ils ont puiſé l'art de la Médecine chez les Grecs, n'auroient jamais, dans leurs deſcriptions de la petite vérole, manqué d'alléguer les paſſages des Auteurs Grecs qui pouvoient s'y rapporter, pour illuſtrer par là & rendre plus parfaite une doctrine qu'ils n'ont traitée que d'une maniere obſcure & défectueuſe; & ils auroient auſſi indiqué en quoi leur méthode de guérir cette maladie différoit de celle des Grecs.

Un argument négatif bien fort encore me paroit pouvoir être tiré du ſilence d'*Actuarius*, le dernier des Médecins Grecs, qui n'a pas fait la moindre mention de la petite vérole.

Or notre petite vérole d'aujourdhui, ſi l'on conſidere les ſymptomes qui la précedent & la ſuivent, leur ordre & cette différence qui, tantôt la donne ſi bénigne qu'à peine paroit-elle une maladie, tantôt ſi maligne qu'elle ne differe point des fievres peſtilentielles, rend l'évenement douteux, ou menace même formellement de la cataſtrophe; cette petite vérole, dis-je, mérite tant d'attention, que perſonne ne pourra jamais ſe perſuader, que les Grecs, & ſurtout Hippocrate, cet incomparable Obſervateur de toutes les maladies qui ont exiſté en Grece de ſon tems, ayent paſſé ſous ſilence celle que nous

nommons aujourdhui la petite vérole, tandis qu'ils en ont indiqué d'autres qui étoient d'une bien moindre conſéquence.

Nous avons ici pour garans des Auteurs qui ont une grande réputation, & qui ont écrit des Hiſtoires de la Médecine, non dans le goût des compilations, mais avec un eſprit de diſcuſſion qui leur a fait peſer exactement chaque objet, & lui donner ſon juſte prix. Tels ſont particulierement Mrs. *Freind* & *Le Clerc*.

S'il eſt donc à préſent plus clair que le jour, que la petite vérole a été inconnue aux Grecs, l'Hiſtoire ne dépoſe pas moins certainement, qu'on a commencé à l'obſerver en Egypte, du tems d'Omar, Succeſſeur de Mahomet.

Une choſe remarquable ici, c'eſt celle que Mr. *Jean Reiske* a tirée d'un vieux Manuſcrit Arabe de la Bibliotheque de Leyde, & qu'il rapporte en ces termes: „C'eſt cette année que la petite vérole „& la rougeole ont paru pour la premiere fois dans les contrées des „Arabes." Or cette année étoit la 502 de N. S. & celle dans laquelle Mahomet eſt venu au monde.

Autant que je puis m'en ſouvenir, il n'y a point de païs en Europe qui ait fourni la naiſſance & la premiere origine à des maladies aſſez contagieuſes & funeſtes pour que la ſeule communication du ſouffle ſuffiſe pour convertir toute la maſſe du ſang en une pourriture complette, & en reproduiſant auſſitôt des ſemences ſemblables à elle, paſſer avec une rapidité incroyable d'un corps à un autre; comme on ſait que cela eſt arrivé en Afrique & en Amérique.

En effet il eſt conſtant par l'Hiſtoire que l'Amérique a été le berceau du mal vénérien, & l'Afrique celui de la peſte.

La choſe ne ſera pas difficile à concevoir, ſi d'abord on fait attention qu'il n'y a point de venin plus puiſſant que celui qui s'engendre dans le corps animal. J'en puis, helas! produire une preuve dont les exemples ne ſont que trop frappans, c'eſt celle que fournit la rage, ce mal dont les ſymptomes pénétrent tout coeur ſenſible de la plus vive compaſſion: qui eſt-ce qui ignore qu'il prend ſa ſource dans les humeurs du chien? & l'on ne ſauroit aſſez s'étonner

tonner à quel point ce venin eſt communicable, & ne manque jamais d'en produire un qui lui reſſemble parfaitement.

A préſent conſidérons le nombre innombrable des eſpeces différentes d'inſectes qui fourmillent dans les contrées où tout favoriſe leur propagation, le Ciel & ſes vives ardeurs, la terre & ſa brûlante ſéchereſſe, les lacs, les marais, les étangs, d'épaiſſes forêts qui empêchent le paſſage d'un air rafraîchiſſant, d'un vent propre à diſperſer les petits oeufs qui voltigent dans l'air, à les froiſſer & à les rendre ſtériles.

On a peine à croire ce que Leuwenhoek rapporte; qu'au microſcope il a vu dans une ſeule goutte d'eau des animalcules par milliers, par dixaines & centaines de milliers.

A quoi l'on peut ajouter l'obſervation de Lanciſius, ſuivant laquelle ce peuple immenſe d'animalcules dépoſe tant d'ordures dans l'eau qu'ils habitent, que cette eau, miſe exprès à part dans une bouteille pour faire l'expérience, en eſt rendue toute trouble.

Needham & Backer, qui ſont venus depuis, confirment les mêmes faits; & l'obſervation leur a appris que, plus les animalcules ſont petits, plus la quantité de leurs excrémens eſt copieuſe.

Les animalcules dont la poſtérité eſt la plus abondante, ſont ceux qui vivent le moins.

Que toutes les eſpeces d'inſectes renferment un ſel acre & cauſtique, c'eſt ce que nous pouvons inférer non ſeulement de leur morſure, mais des effets de leur application à notre peau, qui fait ſuffiſamment voir que toute leur ſubſtance eſt vénimeuſe.

Concevons à préſent une choſe dont l'expérience commune & journaliere nous inſtruit, c'eſt que le Soleil exerce continuellement ſon action ſur les cadavres, les dépouilles & les excrémens de ces inſectes, répandus à la ſurface des eaux marécageuſes. Combien de différence n'y a-t-il pas entre toutes ces particules! Quelle action & quelle réaction! A quel point ne ſont pas diviſées des matieres qui étoient auparavant réunies?

La Chimie enſeigne de plus qu'au moyen du feu & d'une chaleur non interrompue les corps ſont détruits & décompoſés, de

maniere que par le conflict & par de nouvelles réunions des particules qui ont été dégagées & miſes en liberté, il ſe compoſe de nouveaux corps, que l'acreté ſe renforce, & la volatilité s'exalte à un point qui ne permet plus de renfermer & de contenir dans aucun vaſe des particules auſſi ſubtiles & auſſi pénétrantes.

Il eſt à propos auſſi de ſe rappeller que, ſous un Ciel ardent naiſſent les racines, les herbes, les plantes, les arbuſtes, les fleurs qui ont une force inflammatoire, purgative & perpétuellement ſtimulante.

Quand ces parties végétales vénimeuſes viennent à ſe choquer avec les parties animales dont le venin eſt encore plus ſubtil, quand elles ſont ſoumiſes enſemble aux loix de la putréfaction & de la fermentation, quelcun pourroit-il encore s'étonner qu'il s'engendre dans certaines contrées de la Terre de véritables poiſons, & qu'ils ſoyent aſſez actifs pour nuire, non ſeulement par la voye de l'attouchement, mais auſſi par celle du ſouffle.

Vous paroitra-t-il après cela déraiſonnable, MESSIEURS, de ſuppoſer que c'eſt par de ſemblables opérations de la Nature que le mal contagieux de la petite vérole a été produit autrefois dans quelque contrée de l'Afrique.

On ne ſauroit former une objection valable contre cette theſe, en la tirant de ce qu'un mal ſi facile à communiquer, ſeroit demeuré caché & inconnu pendant tant de ſiecles. Il eſt aſſez connu qu'il n'y a point eu de commerce entre les nations qui joignoient à la groſſiereté des moeurs la ſimplicité de la vie à l'égard de la nourriture & du vêtement, ſans avoir aucune connoiſſance des choſes de pur agrément, ſans inventer les arts qui embelliſſent la ſociété, & en ſe bornant à recueillir les fruits que la terre produit & qu'elle donne d'elle-même. Ces peuples ne ſe doutoient pas même qu'il exiſtât d'autres biens. Point de ſoucis du lendemain. Point de proviſions, de ſuperflu, ni de diſette. Point de diſputes ni de combats pour le tien & le mien ; le voyageur à vuide peut y chanter impunément à la face du brigand ; rien n'excite & n'entretient l'avarice & la volupté; & par conſéquent les peuples voiſins n'ont aucune

cune envie de pénétrer dans des lieux où rien ne les attire, & d'où il n'y a pas la moindre dépouille à remporter. Cet état d'ignorance & de ſtupidité vaut mieux que les plus fortes barrieres & les remparts les plus élevés.

Mais, bon Dieu! à quelles entrepriſes & à quels excès la ſoif exécrable de l'or n'a-t-elle pas pouſſé dans tous les tems les avides mortels? A peine ceux qui, dans une extreme pauvreté, vivoient contens de leur ſort, ont-ils acquis des richeſſes, que déjà ils craignent la pauvreté, & pour s'en garantir, tâchent d'envahir le bien d'autrui. Poſſédés de cette manie, ils parcourent les terres & les mers; l'homme n'eſt plus en ſûreté avec l'homme; les vols, les meurtres, les incendies, deviennent non ſeulement communs, mais glorieux; ce ſont des exploits, & la guerre qui réunit toutes ces horreurs, ouvre la carriere de l'honneur, elle forme les Héros. On charge des vaiſſeaux du butin fait ſur des peuples que la force des armes a contraint de ſubir le joug d'un vainqueur inhumain; on détruit, on moiſſonne en un clin d'oeil tout ce que des ſiecles d'induſtrie & de commerce avoient accumulé.

Mais voyez au ſein de ces victoires remportées, au milieu de ces trophées magnifiques, parmi ces tréſors qu'on rapporte dans ſa patrie, voyez-y les maladies les plus funeſtes, qui procureront bientôt à la mort d'autres victoires & d'autres triomphes. Je n'en impoſe point: les choſes ſont exactement ainſi.

C'eſt le commerce maritime qui, vers la fin du XV. Siecle, fit paſſer le mal vénérien d'Amérique en Eſpagne; & l'on ſait qu'il entra de là dans le Royaume de Naples en 1498. avec l'armée de l'Empereur Ferdinand, qui y faiſoit alors la guerre aux François. Cette maladie n'a été connue en Ruſſie que du tems de Pierre le Grand, parce que juſqu'alors la Nation Ruſſe n'avoit eu aucun commerce, aucune liaiſon avec les étrangers.

Seroit-il donc ſurprenant que les Grecs des ſiecles reculés n'aient pas connu la petite vérole, dans un tems où pluſieurs autres maladies propres à l'Afrique étoient pareillement ignorées. Mais,

après que le Nil eût été rendu plus propre à la navigation, & qu'on eût découvert de nouvelles nations, l'avidité des hommes fit qu'en rapportant des denrées & des marchandiſes étrangeres dans leur patrie, ils lui firent préſent d'une maladie nouvelle ; & il eſt tout à fait vraiſemblable que c'eſt ainſi que la petite vérole parvint à la connoiſſance des Egyptiens, fameux par leurs navigations ſur le Nil. Rien de plus croyable que la conjecture de ceux qui penſent qu'en Ethiopie, vers l'embouchure du Nil, il exiſtoit un peuple obſcur chez qui la petite vérole étoit une maladie endémique.

L'analogie de cette vérité peut être expliquée par l'hiſtoire du mal vénérien, au ſujet duquel il eſt conſtant que, dans les Isles Antilles c'eſt une maladie propre & endémique, comme on peut le voir dans l'Ouvrage de *Proſper Borgarutius*, intitulé *Methodus de morbo gallico.* On peut auſſi recourir à *Gabriel Fallope*, qui, dans ſon Traité ſur le même mal, ne fait pas difficulté de s'exprimer de la maniere ſuivante. „Colomb ramena des galeres infectées du mal „vénérien. Aux Indes ce mal eſt doux & à peu près comme la „gale; mais, transporté dans notre Continent, il y eſt devenu ſi fé„roce, ſi furieux, qu'il attaque, corrompt, détruit la tête, les yeux, „le nés, le palais, la peau, la chair, les os, les ligamens, les viſceres, „tout le corps en un mot." C'eſt ce qui a été mis à l'abri de toute conteſtation par le célébre Hiſtorien des Indes, *Gonſalve Fernandez d'Oviedo*, qui parle comme témoin oculaire, & qui, dans ſon Hiſtoire naturelle & générale des Indes, rapporte que la maladie nommée par les Eſpagnols *de las Buns* étoit commune à tous les naturels du païs dans ces contrées, (il avoit été Officier en chef de l'Artillerie à Hiſpaniola, au ſervice de Ferdinand, Roi d'Eſpagne, vers l'an 1530.) & qu'elle y étoit auſſi fréquente que l'eſt ailleurs toute autre maladie ordinaire.

L'Auteur de l'Hiſtoire générale des Isles de S. Chriſtophle, de la Guadalupe, &c. qui a fait un long ſéjour dans les Antilles, s'exprime encore plus clairement. Il dit que cette maladie honteuſe que les habitans nomment *Epian*, & qui n'eſt autre choſe que la vérole

duement

duement qualifiée, leur eſt comme héréditaire, que non ſeulement ils la gagnent par l'acte vénérien, mais qu'elle leur vient d'elle-même, à cauſe du déſordre de leur régime & des mauvais alimens dont ils ſe nourriſſent.

On excuſera cette digreſſion. Je reviens à la petite vérole de laquelle j'ai dit ou du moins j'ai conjecturé, qu'elle étoit un mal endémique dans quelque païs du monde.

L'Hiſtoire civile & l'Hiſtoire de la médecine concourent à fortifier cette conjecture, & à y répandre du jour, puisqu'elles atteſtent que ce fut ſeulement dans le tems où Mahomet rempliſſoit l'Aſie & l'Afrique des guerres les plus ſanglantes, & y portoit partout l'effort de ſes armes victorieuſes, qu'on vit pour la premiere fois la petite vérole ſe manifeſter. Et c'eſt à quoi ſe rapporte ce paſſage de Rhaſes; "qu'un certain Aaron, natif d'Alexandrie, ſous le regne de „Mahomet, l'an de N. S. DCXXII. a donné la deſcription de la pe„tite vérole."

Telles ſont donc les raiſons qui expliquent comment cette contagion a paſſé dans les contrées les plus éloignées du lieu de ſon origine, & s'eſt répandue par tout l'Univers. On voit par là pourquoi il ne s'en trouve aucune mention dans un ſi grand nombre de ſiecles antérieurs, tandis qu'à préſent elle a parcouru avec la plus grande rapidité toute l'Amérique, l'Aſie & l'Europe. Cela vient de ce que, dans les tems reculés, les diverſes voyes de communication entre les peuples étoient beaucoup plus rares, de ce que le défaut de perſonnes entendues dans la Marine rendoit les navigations beaucoup plus périlleuſes; enfin, de ce que les étrangers qui venoient débarquer ſur une côte étoient anciennement regardés comme des ennemis & des brigands, dont on ſe ſaiſiſſoit & qu'on réduiſoit en ſervitude. Les choſes ont demeuré ſur ce pied jusqu'à ce qu'on ait enfin reconnu les avantages réciproques que les hommes peuvent retirer du commerce.

Encore cela ne regardoit-il que les habitans des côtes, qui trafiquoient avec les Nations étrangeres: tous ceux qui, plus avancés dans

dans les terres, habitoient des contrées fort éloignées de la mer, demeurerent longtems dépourvus de toute connoiſſance des peuples ſéparés d'eux par de grandes diſtances. C'eſt ce qui fait croire à Ludolf, Hiſtorien recommendable, que les Ethiopiens, à cauſe de la ſituation de leur païs, ne firent pendant longtemps aucun commerce. Tout cela met en évidence, pourquoi la petite vérole eſt reſtée inconnue pendant tant de ſiecles, ſurtout après ce que nous avons prouvé, ſavoir qu'elle a eu pour patrie une des contrées les plus reculées. Le celebre Médecin Anglois Mead en tire avec beaucoup de raiſon la conſéquence, que ce n'eſt qu'à proportion des progrès que le commerce a faits, ou des incurſions cauſées par les guerres, que la contagion de la petite vérole s'eſt répandue au long & au large.

Ces détails hiſtoriques & pleinement conſtatés, ſur lesquels nous avons cru devoir nous étendre, ſuffiſent pour établir qu'on a été trop loin lors qu'on a prétendu que la petite vérole tenoit à la nature de l'homme, que depuis notre premier pere elle avoit été transmiſe héréditairement d'une génération à l'autre, ou même qu'elle eſt néceſſaire pour procurer à la machine du corps humain ſon dévelopement & ſa perfection.

Le récit ſuivant, qui m'eſt fourni par M. Mead, répandra encore du jour ſur ce ſujet. Un vaiſſeau parti de la Hollande arriva au Cap de Bonne Eſpérance, & y débarqua des perſonnes attaquées de la petite vérole, maladie qui jusqu'alors avoit été inconnue aux Hottentots. Les bonnes gens qui avoient coutume de rendre toutes ſortes de ſervice aux Matelots à leur arrivée, laverent les linges de ceux qui avoient eu ce mal, qu'ils gagnerent par ce moyen; & la plûpart en périrent. Ceux qui demeurerent en ſanté ſe retirerent dans des lieux fortifiés d'où ils coururent ſus aux malades, & percerent de traits quiconque d'entreux vouloit franchir les retranchemens.

Il n'y a donc rien d'héréditaire dans la petite vérole, mais ſa patrie eſt étrangere, & le droit qu'elle a d'agir ſur le corps humain n'eſt pas un droit univerſel & abſolu; il faut que celui où elle ſe manifeſte y ait été diſpoſé, c'eſt à dire, que ſes humeurs n'ayent

pas

pas été propres à émouſſer & à détruire la vertu ſpécifique du venin, ou que les parties ſolides, après l'introduction de ce venin, n'ayent pas aſſez de vigueur pour l'écarter & le diſſiper.

Me croyez-vous, Meſſieurs, capable de nier ce qui eſt fondé ſur une expérience à peu près quotidienne, & qui ne ſouffre qu'un très petit nombre d'exceptions, ſavoir que quiconque a eu une fois le petite vérole & l'a ſurmontée, en demeure exemt pendant tout le reſte de ſa vie. La choſe eſt d'une évidence qui ne permet pas de ſoutenir le contraire.

Mais n'y auroit-il point une ſemence de la petite vérole, un miaſme qui naiſſe avec nous, & qui ſoit mis en action par le miaſme variolique?

Je n'ai rien à répondre à cela, mais je n'en demeure pas moins ferme à nier toute conſéquence qui tend à dériver la matiere de la petite vérole de notre premier pere, de façon qu'il nous l'ait transmiſe: l'aſſertion eſt inſoutenable, tant que les faits ci-deſſus allégués conſerveront leur authenticité; & ce qui les confirme de plus en plus, c'eſt que, de l'aveu de tout le monde, il exiſte encore aujourd'hui des Nations auxquelles la petite vérole eſt inconnue, parce qu'elles ſont privées de tout commerce & de toute liaiſon avec les étrangers; bien plus, qu'on voit au milieu de nous des familles qui, de mémoire d'homme, ont été préſervées des atteintes de cette maladie.

J'ai admis un miaſme inné dans ceux qui, ayant eu une fois la petite vérole, en demeurent exempts le reſte de leur vie. Je conclus de là que le virus variolique eſt d'une nature ſi ſinguliere & ſi merveilleuſe, qu'il ne ſauroit presque jamais entierement être chaſſé d'un corps où il a ſéjourné, mais il reſte toujours quelque particule de levain, mêlée à la ſemence féconde du pere, & qui paſſe à l'enfant engendré.

Tout cela poſé, la queſtion n'eſt plus embarraſſée d'aucune difficulté: on voit comment il peut arriver que quelques perſonnes ayent deux fois la petite vérole, & d'où vient la fréquence de ces fauſſes petites véroles, auxquelles je ne me rappelle pas qu'aucun des

Ecrivains qui ont traité cette controverſe, ait fait une attention ſuffiſante.

Tous ceux donc qui n'apportent pas ce miaſme avec eux au monde, ou dont les parens, & le pere en particulier, n'ont pas eu la petite vérole, ne courent-ils aucun risque à ſon égard? C'eſt une conſéquence qu'on n'eſt pas en droit de tirer de ce qui précede, puiſque tant de Nations ont été autrefois exemptes de ce mal, & que cependant elles ont été infectées par la contagion que des étrangers leur ont apportée.

Mais ce que je crois qu'on peut inférer en toute ſureté des choſes expoſées jusqu'ici, c'eſt que d'une part la contagion n'a point de droit abſolu, ni de l'autre les hommes d'exemption abſolue, parce que les ſolides & les fluides du corps humain peuvent ſubir une infinité de changemens différens, & qu'ainſi l'homme peut acquérir la diſpoſition à être infecté de ce venin; de façon cependant que le miasme trouve toujours un plus difficile accès dans les perſonnes parfaitement ſaines, en qui il faut abſolument que cette intégrité de conſtitution s'altere pour que le virus variolique s'inſinue dans leurs veines. Sans cela il me paroit impoſſible que ce venin, dans un corps où il eſt inné, puiſſe, en vertu d'un changement dans l'œconomie animale, être mis en action, & y cauſer premierement une petite vérole, qui enſuite, par la diſpoſition qu'elle a à ſe communiquer, étend ſes ravages tout à l'entour, ſans qu'il ſoit beſoin d'aller aujourd'hui rechercher ce mal en Afrique; quoiqu'il y ait de continuelles occaſions qui nous ramenent de Conſtantinople ce dangereux ennemi.

Ceux qui ſont nés avec une diſpoſition à la petite vérole, prennent-ils le parti le plus prudent, en excitant le plûtot qu'il eſt poſſible ce mal contagieux dans leur corps, & en le pouſſant au dehors, afin de n'avoir plus rien à en craindre pendant le cours de leur vie? Je doute qu'on puiſſe mettre ſur le tapis une queſtion plus intéreſſante.

Mais, ſi quelcun veut ſe mêler de la controverſe de l'inoculation qu'on agite actuellement avec tant de chaleur, ne lui convient-il pas d'approfondir auparavant la queſtion: Si le principe de la petite vérole,

vérole, préexiſtent dans l'embryon & né avec lui, ne pourroit pas être réprimé, de façon à rendre l'homme entierement exempt de ce mal ?

Rien n'étant plus propre que les exemples à répandre du jour ſur les vérités obſcures & difficiles à comprendre, j'en produirai un, qui paroit d'abord être ſimplement domeſtique, mais dont la Chimie phyſique revendique l'explication. On reconnoit qu'il y a dans le blé un eſprit que l'art peut en tirer; & nous ſavons que, ſi l'on boit cette liqueur ſpiritueuſe, elle ſe port au cœur, accélere le pouls & étourdit le cerveau. Cependant le froment ne ſauroit produire ces effets par lui-même, en quelque quantité que l'on en mange.

Or l'eſprit de froment conſiſte en particules huileuſes phlogiſtiques, qui ſont diſſoutes dans de l'eau. Tant que ces particules ſont diſperſées, & envelopées par d'autres qui ont de la ténacité, elles n'ont aucune vertu active, ou du moins on ne l'apperçoit pas, & on les croiroit dans une parfaite inertie. Mais, dès que l'art a rompu les liens qui les retenoient, leur activité ſe déploye, chaque atome jouiſſant, pour ainſi dire, de ſa liberté, ſe réunit à ſon ſemblable; leur force qui dans l'état de diſperſion ne pouvoit rien, ou presque rien, prend de tels accroiſſemens que ſon efficace ſur le corps humain ne trouve point d'obſtacle capable de lui réſiſter: en ſorte que, ſi vous raſſemblez & réuniſſez encore plus intimement ces particules, & que par de nouvelles opérations vous les réduiſiez à un moindre eſpace, il en réſulte un produit d'une force étonnante, & dont l'éguillon de la chaleur augmente encore beaucoup la vertu.

Il y a donc des corps, qui, après avoir été dégagés ou réunis, ont une très grande puiſſance, dont ils étoient entierement privés, tant qu'ils ſe trouvoient enchaînés ou diſperſés; ou même, qui, dans leur nouvel état, ne déploient leur action qu'après y avoir été excités.

Revenons donc à demander, ſi l'on agit avec plus de prudence & d'une maniere plus ſalutaire aux hommes, en maintenant la tranquillité du levain contagieux de la petite vérole qui nait avec nous, & en préſervant ceux qui craignent ce mal de toute inſinuation dans le

corps de ce miaſme propre à allumer l'étincelle cachée ſous la cendre? Convient-il de dégager une matiere qui n'a aucune force tant qu'elle demeure liée, de lui permettre une diſperſion qui la met en état de porter partout ſon action, & d'attaquer à force ouverte les ſolides & les fluides d'un corps qui n'eſt pas toujours propre à lui réſiſter?

J'en appelle à votre équitable déciſion, Meſſieurs, & je vous prie de réſoudre vous mêmes ce probleme.

Je propoſerai ici l'exemple des Hottentots, n'en ſoyez pas ſurpris; j'approuverai le parti qu'ils prenoient de chaſſer à coups de traits ceux qui, étant attaqués de la petite vérole, s'approchoient des gens en ſanté.

Si l'on prenoit contre la petite vérole les mêmes précautions qui ſont uſitées contre la peſte, pourquoi ne viendroit on pas à bout d'en rendre les Nations exemptes aujourdhui, comme elles l'ont été autrefois?

C'eſt malgré moi, mais ſans la moindre ombre de partialité, que je ſuis obligé de rejetter en bonne partie les effets contagieux de la petite vérole, tant à l'égard de l'étendue que de la rapidité de ſa propagation, ſur les Médecins eux-mêmes, qui, allant comme ils le font de rue en rue & de maiſon en maiſon, rempliſſent leurs habits d'un venin qu'ils promenent avec eux, qui même touchent imprudemment des perſonnes qui n'ont pas encore eu la petite vérole avec des mains dont ils viennent de toucher le pouls ou les puſtules de ceux qui en ſont attaqués.

On ne ſauroit donner trop d'éloges aux anciennes ordonnances des Magiſtrats qui établiſſoient des Médecins à part pour les maladies contagieuſes de toute eſpece, comme on le fait encore aujourdhui, mais dans le ſeul cas de la peſte.

Que les partiſans de l'inoculation me permettent de dire ici librement ma penſée; ils défendent l'utilité, la néceſſité même de cette pra-

pratique; & moi, d'après toutes les raiſons que je viens d'alléguer, je n'y vois qu'un moyen de rendre tout à fait domeſtique un mal étranger, & d'amener les choſes au point qu'il n'y aura déſormais aucun individu qui ne naiſſe avec le levain de la petite vérole.

Je vous ai expoſé la patrie, la génération, la nature du miaſme varioleux, qui a tous les caracteres d'un vrai venin autant que toute autre contagion peſtilentielle; en ſorte que, ſubdiviſé des milliers redoublés de fois, il demeure toujours nuiſible, toujours prêt à embraſer le ſang, pour peu que l'occaſion s'en préſente.

Je me ſuis plus d'une fois extrêmement étonné, que de nos jours on ait entierement perdu de vue les traces ſi ſures & marquées avec tant de ſagacité de ces Médecins qui ſe ſont anciennement rendus célebres dans leur art; quoique ce ſoit à ces Médecins mêmes que nous ſommes redevables des détails les plus complets & les plus lumineux ſur l'hiſtoire de la petite vérole.

Je n'ai pas pu comprendre comment il étoit poſſible que les Médecins des ſiecles poſtérieurs à Rhaſes & Avicenne euſſent pouſſé la négligence juſqu'à ne pas daigner feuilleter les Ouvrages où ils ont traité de la petite vérole, l'un de ces Auteurs l'ayant décrite de la maniere la plus préciſe il y a onze ſiecles, en y joignant une méthode à laquelle il ſeroit bien difficile d'en ſubſtituer aujourdhui une plus prudente; vu que, depuis le tems de ces illuſtres perſonnages, l'Ecole des Médecins a débité comme vrayes bien des choſes obſcures & confuſes, tant à l'égard de la théorie que de la pratique.

J'ai lu avec un très grand plaiſir ce qu'a écrit là deſſus le Médecin Arabe que j'ai déjà nommé, Rhaſes; & il me paroit ſurtout eſtimable en ce que, dès ce tems-là, il a déjà penſé aux moyens de préſerver de la petite vérole, lorsqu'elle regne, ceux qui la craignent, ou dans le ſang desquels le miaſme s'eſt déjà introduit: & le ſuccès juſtifioit pour l'ordinaire ſes ſoins. Il ſe ſervoit principalement des acides végétaux, comme du jus d'orange, de citron, de ribette, d'épinevinette, de mûre, de laitue, d'eſtragon, d'eau omphacine, qu'il réduiſoit

ſoit en ſyrop en y mêlant du ſucre, & où il jettoit une petite portion de camphre, par où il réuſſiſſoit à rendre la petite vérole bénigne & peu abondante.

Les mêmes préſervatifs ont été adoptés il y a environ quarante ans par les Médecins Waldſchmid & Dolaeus, d'une maniere qui n'a pas été tout à fait infructueuſe, quoique le ſuccès n'ait pas répondu conſtamment à leur attente. Le célebre Roſen a enſeigné dans les Mémoires de l'Académie Royale de Suede, comment l'on peut prévenir la petite vérole confluente, ſoit en la détournant tout à fait, ſoit en la rendant tout au moins plus bénigne, par un remede compoſé de mercure doux, de réſine de guayac, d'aloës & de camphre. Il aſſure que cette méthode lui a réuſſi, dans les cas où la petite vérole regnoit au voiſinage, ſans que l'on pût éviter le commerce avec ceux qui en étoient attaqués.

Je ſuis fermement dans l'idée que, ſi les Médécins s'étoient plus appliqués à combattre ſans relâche les principes de ce mal, & qu'ils euſſent pris des précautions plus prudentes dans l'adminiſtration des remedes, nous ne penſerions pas aujourdhui à traiter la queſtion de l'inoculation, ſur laquelle on a tant diſputé que les argumens pour & contre paroiſſent être épuiſés; de ſorte que je ferois ſcrupule d'entrer dans de nouveaux détails à cet égard en préſence d'Auditeurs auſſi éclairés, à moins que je ne pûſſe les entrainer dans mon ſentiment par quelque raiſon qui n'ait pas encore été propoſée.

Laiſſant donc à l'écart tout ce que pouvez avoir lu juſqu'à préſent ſur ce ſujet dans les Ecrits des deux partis oppoſés, je crois ſeulement ne pouvoir me diſpenſer d'obſerver qu'il y a quelques points avoués & reconnus de part & d'autre: ce qui me paroit les mettre hors de toute conteſtation.

Le premier, c'eſt que l'inoculation ne met point à l'abri de la petite vérole confluente.

Le ſecond, qu'on ne ſauroit promettre certainement ni prévoir ſûrement que les inoculés en réchaperont.

En

En troiſieme lieu, que l'expérience dépoſe, ſans qu'on puiſſe éluder ſon témoignage, qu'au bout de pluſieurs années après l'inoculation on a vu quelquefois ſurvenir une petite vérole naturelle & maligne, priſe par voye de contagion, & funeſte au malade, quoiqu'il eût été inoculé dans toutes les regles de l'art par quelcun de ceux qui y ſont le plus verſés.

Enfin, qu'aſſez ſouvent de mauvais ulceres ſe forment dans l'endroit du corps où s'eſt faite l'inoculation; & ſi vous voulez un garant de ce fait, je vous en citerai un des plus dignes de foi, & par ſon ſavoir, & parce qu'il eſt partiſan de l'inoculation, M. Mead, déjà plus d'une fois nommé dans ce diſcours.

Je ne me rappelle pas que les principaux tenans de la diſpute ſur l'inoculation ayent aſſez ſoigneuſement obſervé, que le danger de leur pratique regarde principalement les corps les plus robuſtes.

Je crois devoir rapporter ici, comme digne d'être remarqué, ce que nous apprend l'habile M. Maty; c'eſt qu'à Bolton, en 1752, il y eut 1974 perſonnes en ſanté qui ſe réſolurent volontairement à être inoculées, & qu'il n'en mourut que 24. Mais 1509 ne purent être perſuadés à ſe ſoumettre à cette opération, pour laquelle leur répugnance étoit trop forte: ainſi, abandonnés au cours de la Nature, il en périt 452.

Dans toute expérience, & ſurtout là où il s'agit de la ſanté & de la vie des Citoyens, il faut une parfaite candeur, une entiere impartialité. Je ne cherche point à faire naître des ſoupçons déſavantageux; mais je me crois obligé d'avertir que les hommes naturellement timides appartiennent à la claſſe des corps foibles; & l'on ſait combien les maladies contagieuſes ſont à craindre pour des perſonnes ainſi conſtituées, qui ne peuvent gueres, lorsqu'il regne quelque épidémie, pourvoir à leur ſalut, que par la fuite. Quand on hazarde des expériences ſur de pareils corps, on ne peut s'en promettre qu'une iſſue tragique.

Lorsque la petite vérole ſurvient naturellement à de telles perſonnes, la piété les ſoutient, leur ame eſt fortifiée par les idées de la ſageſſe

geſſe & de la bonté du Créateur, qui nous impoſent l'obligation de recevoir avec tranquillité les diverſes épreuves diſpenſées par la Providence, & d'adorer juſqu'au dernier ſoupir l'Arbitre ſupreme de notre vie & de notre mort.

On répondra ſans doute, qu'il n'y a qu'à ne pas inoculer les ſujets délicats, cacochymes, infirmes, tous ceux enfin qui ne paroiſſent pas avoir les forces ſuffiſantes du corps ou de l'eſprit. Mais le nombre de ces ſujets eſt beaucoup plus grand qu'on ne ſe l'imagine; il fait la plus grande partie des hommes, dont la crainte s'empare, dès qu'on les abandonne à eux-mêmes. Et pour les enfans, le plus grand nombre eſt auſſi de ceux qui ont un corps foible.

Donc, en renverſant la regle, c'eſt aux perſonnes en ſanté qu'il faut ici un Médecin. Or les gens ſains n'ont pas beſoin de Médecin; la nature eſt leur ſauvegarde.

Je ne dois pas non plus paſſer ſous ſilence ce que ceux qui pratiquent la Médecine reconnoitront d'eux-mêmes, c'eſt que dans la petite vérole naturelle, à peine périt-il quelcun, à moins que ce ne ſoit par ſa faute ou par celle de ſon Médecin. Les malades ſont ſouvent ſi capricieux qu'ils ne veulent rien faire qu'à leur tête, & négligent les directions qu'on leur préſent, ou ne s'y ſoumettent que lorſqu'il eſt trop tard. Souvent auſſi la Médecine eſt pratiquée par des Charlatans, qui ſont de vrais aſſaſſins.

Mais ce qui eſt le plus fréquent, c'eſt que la petite vérole endémique ſe trouve accompagnée de quelque fievre maligne, pétéchiale, pourprée. C'eſt à ceux qui dreſſent des régiſtres mortuaires pour la poſtérité à ſaiſir ces diſtinctions, & à ne pas jetter dans la maſſe de ceux que la petite vérole emporte les victimes de ces maladies où le venin domine, ou ceux qu'une toux convulſive ſuffoque.

L'Hiſtoire confirme ce que dépoſe une expérience journaliere, c'eſt que la petite vérole épidémique ne fait pas des ravages continuels, mais qu'il ſe paſſe quelquefois cinq, dix, & juſqu'à quinze luſtres, ſans qu'elle ſe manifeſte, ou même qu'on ne la verroit jamais,

mais, ſi quelque étranger n'apportoit du dehors ce funeſte préſent. Dites-moi après cela, je vous en prie, ſi une Ville a beaucoup d'obligation à un de ſes Citoyens, lorsque c'eſt lui-même qui fait venir d'ailleurs ce virus variolique, qui par ſon art l'introduit dans des corps ſains, & qui excite par là l'épidémie? Les Inoculateurs ont-ils alors aſſez de tems pour exercer leur pratique ſur tous les individus avec autant de viteſſe qu'en a la petite vérole à gagner & à ſe communiquer de proche en proche par toute la Ville. Il me ſemble que de pareils Médecins ſont trop officieux.

Une des raiſons que les défenſeurs de l'inoculation alleguent avec le plus de confiance, c'eſt qu'on a le tems de préparer le corps des inoculés avant qu'ils ſoutiennent le mal. Je veux bien accorder que cela réuſſit à l'égard de quelques uns, pourvu qu'ils ſuivent ponctuellement tout ce qu'on leur ordonne, & que le tems de la préparation ne ſoit pas trop court. Mais il s'en faut bien que le ſuccès réponde toujours à l'attente: & il ne faut pas s'en étonner, puisque le mêlange des humeurs répond à la ſtructure des ſolides, & qu'il s'agit quelquefois de changer le tempérament au point de faire acquérir aux humeurs la diſpoſition qui les rend propres à ſubjuguer le venin, après qu'il y a été introduit.

Que ſi l'aſſertion eſt vraye, qu'on peut ainſi changer le corps & préparer les humeurs, de façon que le venin ſoit peu nuiſible, & que, vaincu par le chaogement arrivé dans le mêlange des humeurs, il demeure ſans force; il en réſultera que ce dont j'ai fait mention ci-deſſus s'accorde avec la Nature, ſavoir qu'en employant un régime & des remedes convenables, ſuivant la pratique des plus anciens Médecins, on peut prévenir la petite vérole, émouſſer la force de ſon venin, & même la détruire; méthode qui me paroit bien plus amie de la Nature & plus favorable au genre humain que l'inoculatioo, puisque c'eſt la ſeule voye ouverte pour écarter & à la fin extirper entierement cette maladie peſtilentielle: au lieu qu'au contraire, tant qu'on ne ceſſera d'introduire le venin dans les corps,

ce ſera l'art de rendre la maladie perpétuelle & univerſelle. Il y a pourtant encore de nos jours des familles ſur qui la petite vérole n'a eu aucune priſe.

J'ai nié ci-deſſus l'exiſtence de la petite vérole dans tous les âges du monde; mais en même rems j'ai reconnu que le miaſme de ce mal eſt apporté au monde per ceux dont les parens en ont été attaqués; de ſorte qu'il arrive un dévelopement proprement dit, lorsque la petite vérole n'étant pas communiquée pat une contagion extérieure, vient de ce qu'on a excité le levain qui ſéjournoit dans le corps, & qu'on lui a prêté les forces néceſſaires pour agir.

L'hiſtoire de cette maladie enſeigne, qu'on ne la prend pas toutes les fois qu'on a le commerce, même le plus intime, avec ceux qui l'ont, couchât-on avec eux dans un ſeul lit. Ce phénomene indique qu'il y a un certain eſpace de tems requis pour que les ſemences de la matiere variolcuſe parviennent à maturité.

Si cela eſt vrai, entreprendre de donner la petite vérole avant ce tems, c'eſt à mon avis heurter les loix de la Nature, qui nous défend de hâter les opérations pour la perfection desquelles il faut un certain période.

Je crains donc que ſi, dans l'inoculation, on ſollicite la matiere varioleuſe renfermée dans le corps, lorsqu'elle eſt encore dans une inertie qui ne lui permet pas d'agir, ou qui ne le lui permet qu'imparfaitement, il n'en reſte une partie en dépôt, qui, venant à mûrir tôt ou tard, produira quelque métaſtaſe des plus malheureuſes, en ſe jettant ſur quelque partie noble, ou en cauſant une foibleſſe générale au ſyſteme des nerfs, d'où naîtront des infirmités qui dureront autant que la vie. C'eſt du moins ce qui arrive aux plantes, quand on leur fait produire des fleurs & des fruits contre l'ordre de la nature, au milieu de l'hyver; les ſuccès de cet art ſont immanquablement nuiſibles à l'arbre, à la plante, ou à l'oignon, qui périſſent plutôt.

Vous

Vous voyez, Meſſieurs, que je ne penche pas pour le parti de ceux qui croyent l'inoculation utile & néceſſaire. Mais d'un autre côté je ne crois leur faire aucun tort, puisque j'ai exactement ſuivi les routes tracées par la raiſon & par l'expérience, & que je me ſuis exprimé avec toute la ſincérité qui convient à un honnête homme. C'eſt par un effet de cette ſincérité que j'approuve & que je recommande l'inoculation dans les familles qui ont le malheur de voir presque tous ceux qui y naiſſent immolés aux fureurs de ce fléau. Qu'on inocule de pareils ſujets, j'y conſens, pourvu que d'habiles Médecins ayent employé le tems néceſſaire à corriger les humeurs, ſurtout en leur oppoſant les antidotes ci-deſſus indiqués; peut-être auſſi dans le cas où celui qui doit être inoculé a changé de climat en choiſiſſant un plus tempéré.

Il ne me reſte plus qu'à ſouhaiter que ceux qui ſont entierement décidés pour l'inoculation ſe ſouviennent que le bien de la Patrie & l'avantage du genre humain conſiſtent ici à diminuer de plus en plus le nombre de ceux à qui la petite vérole artificielle coûte la vie.

NOUVELLES EXPÉRIENCES PHYSIQUES

SUR

L'ACCROISSEMENT ET LA DIMINUTION DU MOUVEMENT EXTÉRIEUR PAR LEQUEL LES PLANTES S'ÉCARTENT DE LEUR DIRECTION PERPENDICULAIRE, SUIVANT LA DIVERSE TEMPÉRATURE DE L'AIR.

PAR M. GLEDITSCH.

Traduit de l'Allemand.

Les Plantes appartiennent à la claſſe des corps vivans dans la Nature. Elles ont leur ſtructure exactement réguliere, tout comme les animaux, avec leſquels elles ont encore beaucoup de reſſemblance par rapport à leur génération. Une des principales propriétés, celle que nous nommons l'irritabilité, leur eſt pareillement commune; mais pour l'autre, ſavoir la ſenſibilité, elle demeurera toujours propre aux animaux. Peut-être que l'irritabilité, qui probablement eſt beaucoup plus forte dans les plantes que dans les animaux, leur tient lieu de la ſenſibilité. Cette irritabilité paroit avoir été donnée aux plantes par le Maitre ſupreme de la Nature, principalement & proprement afin qu'elle fût en eux le principe de tous les mouvemens qu'elles ſont en état d'exécuter, & qu'elles exécutent par ſon moyen dans leur iotérieur.

Les Plantes ont deux eſpeces de mouvement, ſavoir un mouvement *intérieur*, qui entr'autres choſes, outre la préparation & la ſéparation de divers ſucs, eſt déſtiné à procurer l'accroiſſement; & un mouvement *extérieur*, par lequel elles pouſſent d'abord leur tige naiſſante

ſante droit en haut, ou en général cherchent à jouir de l'air libre, vers lequel elles ſe portent conſtamment; mais, ſi on les détourne pendant un tems de cette direction, elles ne laiſſent pas de la reprendre infailliblement dès que les obſtacles ceſſent. Toutes les circonſtances qui viennent d'être indiquées, ſont à la vérité en partie connues, & en partie ſuffiſamment viſibles; mais il ſe peut qu'on n'y faſſe pas aſſez d'attention par cela même qu'on les voit trop ſouvent. Ainſi, quoiqu'elles puiſſent paſſer pour être aſſez manifeſtes par elles-mêmes, cependant les cauſes qui déterminent leur action n'ont pas encore été miſes à l'abri de tout doute & de toute conteſtation. Il y a toute apparence que les mouvemens extérieurs ſont dans une liaiſon très étroite avec les mouvemens intérieurs, en ſorte que l'une de ces eſpeces, exception faite des autres cauſes qui concourent, eſt la cauſe de ce qui arrive à l'autre, dans une rélation réciproque.

Les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris contiennent divers morceaux intéreſſans ſur le mouvement extérieur des Plantes, & ſur la direction naturelle de leur tige. On peut lire avec fruit ce que M. Dodart a inféré là deſſus dans les Mémoires de 1700, Mrs. Aſtruc & de la Hire dans ceux de 1708, & M. Parent dans ceux de 1710. Chacun de ces Académiciens a rendu raiſon des mouvemens extérieurs des Plantes d'après ſes expériences & conformément à ſa théorie. On peut joindre à ces Ecrits celui de M. le Docteur Boſe, qui a paru à Leipſig en 1728, & qui traite *du mouvement des plantes qui reſſemble au ſentiment.*

Depuis ce rems-là j'ai eu occaſion de faire des obſervations nombreuſes & particulieres ſur les mouvemens extérieurs des plantes, étant obligé de planter de ma propre main & de cultiver la plus grande partie de nos plantes connues, tant étrangeres que du païs, qui exiſtent depuis un tems conſidérable dans les Jardins de notre Patrie. Divers cas ſinguliers qui ſe ſont offerts m'ont mis plus au fait de ce qui concerne particulierement la direction de la tige, & les exceptions

qu'elle ſouffre. On conçoit aiſément que ces événemens ne pouvoient être rares dans de jeunes bois taillis & dans des buiſſons, auſſi bien que dans diverſes grandes ſerres, parce que dans ces lieux l'accès libre de l'air extérieur & ſa preſſion ſur les plantes par l'alternative des ſaiſons & d'autres circonſtances, ſont ſouvent arrêtés ou troublés. Il étoit impoſſible que, parmi tout cela, il ne ſe préſentât de tems en tems des phénomenes extraordinaires, propres à reveiller l'attention d'un Curieux de la Nature.

Je n'ai pas deſſein de faire un récit circonſtantié de tout cela, encore moins de répéter des choſes qui ayent déjà été dites par d'autres: tout ce que je ferai entrer dans ce Mémoire conſiſtera en *Obſervations nouvelles ſur l'accroiſſement & la diminution du mouvement extérieur des plantes;* & je propoſerai ces obſervations *d'une maniere rélative à la diverſe température des ſaiſons, qui fait varier leur direction naturellement perpendiculaire à l'horizon.* Ce que je dirai, ſera fondé ſur un petit nombre d'Expériences tout à fait ſimples.

Ce qui me fit naitre l'idée de ces Expériences, fut un paſſage de la *Statique des Végétaux* du célebre Hales que je liſois dans le même tems que je conſidérois ſouvent un jeune tilleul de notre Parc qui étoit dans ſon plein accroiſſement, & où je découvris en 1760 & 1761 un cas tout à fait agréable, quoiqu'il ſoit commun, & qui dans ſon eſpece me parut ſuffiſamment digne d'attention. Je viſitai donc ſoigneuſement ce tilleul, les deux années ſusdites, depuis le mois d'Avril juſqu'à la mi-Juillet, pour obſerver les variations ſucceſſives qui eurent lieu dans la direction de ſon ſommet.

Ce jeune arbre parfaitement diſpoſé à croître avoit été placé, lorſqu'on l'avoit tranſplanté, ſous une couple de ſapins fort épais, dont les branches s'embraſſoient. Dans ce tems-là on n'avoit pas fait attention à ce défaut de poſition, ni penſé à le redreſſer. Deux autres tilleuls, qui ſe trouvoient à ſes côtés, ne croiſſoient que trop lentement par le défaut de leur ſol, & celui du milieu étoit le ſeul qui parvint après quelques difficultés à ſon accompliſſement. Car le libre

accès

accès de l'air, de la roſée & des rayons du Soleil, au moins en grande partie, étoit intercepté après l'allongement de ſon ſommet auſſi bien que de celui des deux autres; & comme outre cela ſon jet étoit beaucoup plus long, plus fort, & plus droit que celui des autres, il ne tarda pas à s'élever bientôt ſous les branches épaiſſes des ſapins juſqu'au point où les branches de ces arbres pouvoient ſe communiquer réciproquement. C'étoit une ſuite néceſſaire des inconvéniens cauſés par l'alternative des exhalaiſons & réſorptions des branches des tilleuls & des ſapins, auſſi bien que par quelques mouvemens dans ces deux ſortes d'atmoſphere.

Cette circonſtance capitale produiſit ici, à cauſe du défaut d'égalité dans la preſſion de l'air, ſon effet ſur le ſommet du jeune tilleul qui croiſſoit avec force, & qui avoit comme à l'ordinaire une direction perpendiculaire. Les tendres pointes pleines de ſuc, & particulierement celles du milieu du jet qui s'élevoit fort au deſſus du reſte, commencerent à s'écarter peu à peu de leur direction naturelle droite, & à ſe pencher vers l'horizon. En peu de tems cette déclinaiſon fut ſi ſenſible que les pointes prirent une ſituation qui tenoit le milieu entre la ligne horizontale & la ligne perpendiculaire.

A la fin cette ſituation devint tout à fait horizontale, de ſorte que, ſuivant la meſure priſe avec l'Inſtrument dont je me ſervois dans ces expériences, elle faiſoit avec la ligne perpendiculaire un angle d'environ 90 degrés. Cette inflexion cauſa dans la couronne du tilleul, qui étoit d'ailleurs bien formée, une irrégularité, que la multitude des rejettons qui pouſſerent à côté augmenta conſidérablement. La ſituation contraire à la nature que ce ſommet avoit priſe ne ſouffrit plus de nouveaux changemens, parce que les branches avoient acquis trop de conſiſtance & de roideur, pour qu'elles pûſſent ſe replier de nouveau; elles ne pouvoient que chercher à regagner l'air libre.

Enfin un vent violent de tempête qui fut de durée, briſa ces branches inférieures des ſapins, qui avoient entretenu juſqu'alors l'accroiſſement du tilleul contraire à la nature; & par là ſa couronne

ayant

ayant recouvré l'air tout à coup, put croître en liberté. Auſſitôt toutes les branches qui avoient été courbées pouſſerent leurs tendres rejettons de côté, de façon qu'ils prirent leur direction vers le haut, comme avoient déjà fait toutes les autres pointes extérieures. Après le ſecond jet, les jeunes branches repritent leur direction perpendiculaire naturelle; & un nouveau ſommet qui s'arrangea peu à peu, fit diſparoître l'irrégularité du précedent.

Si les circonſtances que je viens de rapporter paroiſſent trop connues & communes, & qu'on ne veuille les employer à aucun autre uſage, on pourra ſans doute m'objecter que tout cela s'en alloit ſans dire, & qu'on devoit s'attendre à toute cette ſuite d'effets, ſans ſe donner la peine d'y faire une attention particuliere. Mais c'eſt ce que j'ai reconnu moi-même dès l'entrée, ſavoir qu'on rencontroit à tout moment les mêmes choſes à obſerver dans les bois, dans les jardins, & ſpécialement dans toutes les hayes d'arbres ou de buiſſons, dans toutes les plantes ſauvages ou cultivées, lorsqu'elles prenoient leur accroiſſement; tout cela, je le répete encore, ne ſauroit être plus fréquent & plus connu: cependant il n'en réſulte pas qu'on ne doive en faire aucun cas & regarder toutes ces choſes comme parfaitement indifférentes: le contraire va être prouvé dans la ſuite, par l'expoſé des avantages ou des dommages qui en naiſſent.

Que pour la plûpart des hommes ces objets ſoyent indifférens, à la bonne heure: il s'en faut bien qu'ils ne paroiſſent tels à pluſieurs autres. Qu'on faſſe ſeulement réflexion, que par rapport aux choſes qui ſont ſimplement fondées ſur l'expérience commune, tant dans l'oeconomie en général, qu'en particulier dans la maniere d'entretenir des bois ſauvages, auſſi bien que dans ce qu'on nomme Jardins artificiels & de plaiſance, il ſe préſente certains cas dont perſonne ne ſauroit conteſter l'importance, & dans leſquels on doit préſervet les plantes d'une direction & d'un accroiſſement contraires à la Nature: & c'eſt pour cela qu'on prend en effet des arrangemens tout particuliers. Une choſe encore bien digne de remarque, c'eſt qu'il ſur-

ſurvient enſuite des cas qui ſont directement oppoſés aux premiers, dans leſquels les déviations qui écartent les plantes de leur direction & de leur accroiſſement naturel, doivent être ſoigneuſement entretenues, dans certaines vues, & à cauſe d'avantages particuliers & importans qui en réſultent; ſavoir, lorsque de propos délibéré on cherche à élever des arbres auxquels on fait prendre diverſes courbures: & l'on eſt pareillement accoûtumé à certains arrangemens rélatifs à cet objet. Ceux donc à qui l'inſpection au premier de ces égards & l'accompliſſement au ſecond ſont confiés, donneront aſſurément tous leurs ſoins & toute leur attention à trouver les moyens de parvenir à leur but: & alors les circonſtances que nous avons indiquées, ne leur paroîtront plus indifférentes.

Les mêmes circonſtances peuvent auſſi nous cauſer bien de la fatigue & du déplaiſir par rapport à l'entretien des plantes étrangeres dans les ſerres où elles paſſent l'hyver, ſurtout quand l'imprudence accoûtumée de nos Jardiniers & leur négligence s'y joignent. Ces gens-là ſont pour la plûpart des mercenaires qui ſe croyent à l'abri de tout reproche quand ils tiennent les choſes ſur le pied où elles leur ont été remiſes, ſans ſe mettre en peine de voir & d'obſerver, comme ils devroient le faire. Dès-lors ils ceſſent d'être véritablement utiles, en contribuant aux progrès de la Phyſique & de l'Oeconomie, comme il leur ſeroit fort aiſé.

Les plantes qu'on renferme dans des ſerres, y ſont miſes en général dans toutes ſortes de vues. A l'égard de la plus grande partie on ſe propoſe ſeulement de les mettre à l'abri de la rigueur ordinaire de l'hyver dans nos contrées froides, ſans avoir outre cela le deſſein de les faire croître & fleurir dans quelque ſaiſon extraordinaire de l'année, différente de celle qui leur eſt naturelle dans leur patrie. Une autre partie des Plantes eſt deſtinée chez nous à être entretenue dans un accroiſſement conſtant, & à porter des fleurs & des fruits dans une ſaiſon qui lui eſt à la vérité naturelle dans ſon païs, mais qui ne lui permettroit pas de le faire ici dans le même tems en plein air, ou de moins ce ne ſeroit

qu'avec peine & fort rarement. Ajoutez encore à cela une eſpece de plantes cultivées, qu'on nomme précoces, & qui entrent dans des ſerres particulieres, afin que leurs fleurs & leurs fruits s'y dévelopent, un, deux, ou trois mois plutôt que cela n'arriveroit ſans cela dans notre climat.

Mais la différence de ces plantes, comme on l'a remarqué, n'étant pas toujours bien connue & bien appliquée, il faut que l'ignorance & la négligence qui regnent dans nos Jardins cauſent bien des dommages qui ont coutume de ſe manifeſter avec un très grand déſordre, ſurtout dans la plûpart des Jardins Botaniques. Les mouvemens extérieurs ſont ſenſibles dans les trois eſpeces de plantes que nous avons indiquées, mais premierement & beaucoup plus promtement dans les deux dernieres. Car ſe trouvant, lorſqu'elles ſont dans les ſerres, renfermées les unes près des autres, dans un eſpace fort étroit, où l'air extérieur n'a pas un libre accès de toutes parts, & y continuant leur accroiſſement ſans interruption, & par conſéquent pouſſant ſans ceſſe de jeunes rejettons, on peut les obſerver très exactement dans cet état; parce qu'elles cherchent toujours l'air libre, & que pluſieurs d'entr'elles, ou plutôt toutes, ſe portent fort ſenſiblement vers le côté par lequel l'air pénétre le plus abondamment, de la même maniere que ſi elles étoient tirées dans cette direction.

Les variations alternatives de ce mouvement ſe manifeſtent dans leurs jeunes tiges, & dans leurs pointes, auſſi longtems qu'elles ſont molles & flexibles, & que leur accroiſſement dure. Cela ſe regle ſur les degrés de froid & de chaud de l'air qui regne dans les ſerres, de même que ſur la ſituation particuliere de chaque plante, & ſur les changemens de poſition. On obſerve quelquefois que les tiges, le matin ou le ſoir, ſont tantôt perpendiculaires, tantôt obliques, que quelquefois elles s'étendent horizontalement, ou même qu'elles ſe replient en un demi-cercle, ou encore plus profondément. Quelques unes perdent leur direction naturelle fort vîte & le plus ſouvent; d'autres au contraire lentement & difficilement. Ces variations

tions ſe rapportent aux mouvemens des ſucs, & quelquefois on les obſerve au bout d'une, deux, trois ou quatre heures, tandis que dans d'autres tems il en faut douze, ſeize, vint-quatre, ou quarante-huit; ſans que d'ailleurs le reſte de l'accroiſſement des plantes ſoit troublé en rien par là, mais il fait ſes progrès à tous égards, & les tiges s'allongent en même tems qu'elles prennent leur direction. Mais lorsque, pendant cet accroiſſement, le mouvement ſe porte conſtamment vers un côté, ſans aucune variation, & que les fibres de la tige viennent finalement à ſe roidir & à ſe durcir, ces parties ne recouvrent alors en général leur direction naturelle perpendiculaire, que fort lentement, fort difficilement, ou même à la fin point du tout: il n'y a plus que les pointes extérieures & les tendres rejettons qui ſoyent capables de prendre cette poſition, auſſi longtems qu'ils peuvent céder, & ſuivre la direction des ſucs.

On voit encore les mêmes circonſtances dans les jeunes plantes, & même dans leurs parties, lorsqu'on les a ſéparées de leurs racines, & qu'enſuite ou elles demeurent en plein air dans les lieux humides, ou bien on les met dans l'eau & leur fait paſſer quelques jours dans les chambres. Cela m'eſt arrivé plus ſouvent que cela n'auroit dû, à mon grand regret & dommage, lorsque, faute de tems, j'ai été obligé de garder dans l'eau pendant quelques jours des plantes étrangeres toutes coupées, avant que de pouvoir les inſérer dans mon *Herbarium* pour s'y deſſécher. Je les tenois ordinairement dans des plats fort bas à la cave, ou dans le poële, & j'obſervois ſouvent qu'au bout de 16, 20 à 30 heures, leur pointes s'étoient pour la plûpart redreſſées, & avoient pris une ſituation perpendiculaire.

Un autre cas inopiné m'a conduit à un des phénomenes les plus agréables. Je devois envoyer à un ami deux oignons de *Colchicum* ordinaire, dans le tems où les queues des fleurs toutes nues commencent à paroître. Sans avoir deſſein de faire aucune obſervation, je mis les oignons le ſoir ſur le bord de ma table à écrire dans mon Cabinet, où, dans l'eſpace de douze heures, les queues ſuſdites

des fleurs qui avoient déjà pouſſé de la longueur de quatre pouces, non ſeulement s'allongerent, mais ſe porterent perpendiculairement en haut. En y appliquant mon Tranſporteur dont les diviſions ſont faites pour ces ſortes d'expériences, cette direction de la ligne horizontale vers la ligne perpendiculaire faiſoit un angle de 80 degrés.

A' cauſe de cette courbure des queues des fleurs, je retournai les oignons de haut en bas, de façon qu'ils reçuſſent une direction entierement oppoſée à la précédente. Après quatorze heures je trouvai les queues horizontales & paralleles à la table; j'employai tout de ſuite le Tranſporteur, pour obſerver le tems & le degré, que je me propoſois de remarquer par rapport au mouvement qui ſe portoit à préſent vers la perpendiculaire. Après quinze heures, la queue s'étoit allongée d'un pouce & demi, les fleurs étoient ouvertes & ſe tenoient perpendiculairement. Je réitérai ce dont j'ai déjà fait mention, ſans aucun changement; mais, comme il y avoit déjà trop longtems que les oignons ſe trouvoient hors de terre, & que l'extérieur s'étoit conſidérablement déſſéché, le mouvement des queues devint toujours plus lent, & à la fin presque inſenſible: les fleurs demeurerent fermées, & les queues ne s'allongerent pas d'avantage. Mais, après que j'eus mis les oignons pendant quelques heures dans l'eau, ils pouſſerent de nouvelles fleurs, & je pus répéter les expériences, qui ſe ſoutinrent avec beaucoup de vivacité, tant que les queues continuerent à croître.

Le 27 Juin de cette année, j'eus une plante de *Sedum arboreſcens*, eſpece fort connue, tendre & pleine de ſuc, dont la tige prenoit ſon accroiſſement pour fleurir. Cette tige avoit déjà un empan de longueur lorsque je portai la plante dans mon poële; & le 30 de ce mois elle avoit crû de deux pouces. Au commencement elle étoit toute droite, & ſe tenoit perpendiculaire à ſa racine; ce fut dans cet état que je la poſai ſur une fenêtre, où cette tige, dans un eſpace de douze, ſeize à vint-quatre heures, ſe courba pour la premiere fois; & le ſommet tendre qui s'élevoit au deſſus, ſe tourna comme de coutume

tume vers la fenêtre, mais auſſi obliquement en haut en même tems. Je retournai cette tige de façon que ſon ſommet fût à préſent du côté où il s'élevoit à l'oppoſite de la fenêtre, & regardât par embas vers la terre; après quoi je réitérai toutes les vint-quatre heures ce changement alternatif. Pendant cet eſpace de tems, la tige qui étoit encore tendre & croiſſoit avec force, prenoit à chaque fois une ſituation directement oppoſée à la précédente, de ſorte que le ſommet recouvroit ſon ancienne poſition, mais en même tems devenoit à chaque fois un peu plus long.

Cet allongement avoit déjà été porté le 7 Juillet à deux pouces au delà d'un pied; depuis lequel tems la tige avec ſon ſommet tendre & qui étoit au point de ſe former pleinement, s'éleva encore beaucoup davantage, & prit une direction qui étoit la plus voiſine de la perpendiculaire; de façon qu'il n'y avoit que la moitié ſupérieure qui fut encore un peu oblique, tandis que la partie inférieure, à cauſe que ces fibres étoient devenues roides & coriaces, demeura dans une poſition horizontale.

Le 8 Juillet, à midi, je plaçai cette plante de maniere qu'elle étoit obligée de ſe redreſſer tout à fait: cela n'arriva pas pourtant pleinement, mais ſeulement jusques vers les pointes extérieures, qui environ à un pouce de longueur conſerverent la courbure par laquelle elles ſe replioient droit vers en haut. Dans cet état je liai un fil à la racine de la plante, afin de pouvoir la ſuſpendre renverſée. Cela ſe fit de façon que la tige avec toutes ſes pointes étoit dirigée droit vers la terre, & elle pendoit à deux pieds & demi de profondeur dans le couvercle tout à fait libre, à une diſtance vers le midi de la fenêtre, qui pouvoit aller à un pied & demi. La pointe la plus éminente encore recourbée étoit pendant ce tems-là du côté du ſeptentrion. Le 9 Juillet, à dix heures du ſoir, cette pointe s'étoit déjà portée un peu à l'Orient; le 10, cette inflexion étoit encore plus ſenſible. Le 11 vers midi, elle tenoit le milieu entre l'Orient & le Midi; & alors la tige ſuſpendue s'étoit déjà détournée ſuivant toute la moitié de ſa lon-

gueur de la ligne perpendiculaire droit vers le midi, & tant ſoit peu courbée. Ce changement étoit accompagné d'une eſpece de contournement qui pouvoit être obſervé d'une maniere fort diſtincte.

Par rapport aux feuilles dont la tige eſt garnie, & qui y tiennent ſans queue particuliere, en forme d'écailles, dans les commencemens elles avoient preſque toujours une direction conforme à celle de la tige, & l'embraſſoient, pour ainſi dire, comme cela eſt connu; mais quand elles s'ouvrent avec l'accroiſſement de la tige, elles s'en écartent & prennent une ſituation qui eſt auſſi ſuffiſamment connue. Mais au contraire, lorsque la plante eût été retournée & ſuſpendue perpendiculairement, les feuilles ſe ſont inſenſiblement repliées en arriere ou vers le haut, de façon que leurs pointes, le 10 Juillet à midi, avoient remonté fort au deſſus de leur baſe. Seulement les feuilles d'embas, devenues roides & coriaces, s'écartoient tellement de la tige, qu'elles faiſoient avec elle un angle aſſez conſidérable, ſans ſe recourber vers le haut; celles d'au deſſus juſques vers la moitié ſe recourboient un peu; depuis la moitié de la tige au contraire, là où elle ſe contournoit avec le plus de force, la courbure des feuilles devenoit toujours plus ſenſible, jusqu'à ce que vers le ſommet elle alloit en décroiſſant d'une maniere conforme à celle que je viens d'indiquer par rapport à la partie inférieure de la tige.

Le 14 Juillet, je conſidérai fort attentivement la plante dans ces circonſtances, & je vis que non ſeulement la tige s'étoit encore beaucoup plus tournée du côté du midi, mais en même tems les pointes des branches & les queues qui formoient le ſommet, s'étoient beaucoup plus étendues & ſéparées les unes des autres, & leurs boutons de fleurs avoit la groſſeur dans laquelle ils ſont en état de s'ouvrir. La courbure des pointes extérieures les plus déliées vers le midi s'étoit allongée de deux pouces, & elles ſe dirigeoient droit vers la fenêtre qui étoit tant ſoit peu ouverte.

A la tige même les feuilles avoient changé leur poſition précédente, de façon que celles du milieu s'en écartoient encore beaucoup davantage; les ſupérieures au contraire étoient les ſeules dont la courbure

bure ſe portât encore vers le haut, parce qu'elles étoient encore en plein ſuc, & que les parties qui s'en évaporent, ſont par conſéquent propres à lui donner cette direction. En attendant la courbure de ces feuilles étoit toujours la plus forte du côté méridional de la tige, de ſorte qu'il y en avoit entr'elles qui formoient des ſegmens de cercle. Les feuilles tout à fait inférieures de la tige, dont j'ai parlé d'abord au commencement, étoient tout à fait ſeches & épuiſées, comme on le remarque d'ailleurs toutes les fois aux cotyledons des jeunes plantes croiſſantes; & par conſéquent la direction qui vient de l'évaporation des ſucs devoit ceſſer ici d'elle-même.

A' la même heure préciſément dont il a été fait mention ci-deſſus, je retournai tout à la fois la plante entiere, de façon qu'elle recouvra ſa ſituation perpendiculaire, & je la plantai dans de la mouſſe récemment humectée. Je redreſſai les pointes pliées du ſommet vis à vis des côtés qui s'élevoient au deſſus, & dans l'eſpace de douze heures je parvins à rétablir ces pointes de façon qu'elles alloient toutes droit en haut.

Ces obſervations, & d'autres qui en dépendent, me firent naître l'idée de tenter encore des expériences régulieres ſur des plantes à part, pour obſerver le mouvement extérieur ſuivant lequel leur tige s'écartoit de la direction naturelle perpendiculaire, en ſe portant vers l'horizon, & de là ſe recreſſoit enſuite vers le haut. Je fis là deſſus les arrangemens dont je crus avoir beſoin, ſans me mettre d'ailleurs en peine pour le préſent de l'utilité & de l'application de ces recherches.

Je pris donc en même tems, le 16 Juin 1762, dans le dernier quartier où le Soleil étoit ſur le point d'atteindre ſa plus grande élévation, deux jeunes plantes venues de ſemence, tout à fait droites & ſe tenant perpendiculairement, de ces gros Tourneſols communs, que les Botaniſtes nomment *Helianthus annuus*. Je les tranſportai de la couche dans des pots de jardin qui avoient été remplis de bonne terre, comme cela doit être quand on veut leur fournir pendant quel-

ques

ques mois une nourriture ſuffiſante. Ces plantes qui ſe refirent bientôt, arriverent dans leur accroiſſement direct jusqu'à la hauteur de deux pieds & au delà; & cette hauteur étoit juſtement celle qui convenoit au but que je me propoſois alors & aux meſures que j'avois priſes.

Je poſai enſuite ces plantes, pendant un tems où régnoit une pluye forte & durable, ſur une place tout à fait expoſée dans le Jardin; elles s'y allongerent encore un peu; & le 1 Juillet, le bouton de leurs fleurs s'étoit déjà formé. A l'entrée de la nouvelle Lune, le tems devint fort chargé & orageux; le 8 l'air étoit extrêmement peſant, & le 9 il y eut un tonnerre. Dès le premier de ces jours, je mis une de ces plantes dans une caiſſe à part, & je la gouvernai de la maniere dont je vais rendre compte.

La caiſſe dont la hauteur intérieure étoit d'un peu plus de deux pieds & demi, étoit un quarré oblong; elle avoit deux côtés larges vis à vis l'un de l'autre, & deux côtés étroits qui n'avoient que la moitié de la largeur, avec des fenêtres pareilles qu'on pouvoit pouſſer en montant. On peut presque dire, que tous les quatre côtés de la caiſſe conſiſtoient principalement dans ces fenêtres. Elle n'avoit point de couvercle affermi, mais ſeulement un toit en voûte de minces lattes garnies de fin drap; & ſon fond étoit formé par une planche épaiſſe au milieu de laquelle il y avoit une grande ouverture ronde de la largeur de la main. Cette ouverture, ſuivant que la nature & la diverſité des expériences le demandoit, avoit un couvercle de double carton d'une maniere presque ſemblable à la couverture ſupérieure, qui, outre cela, à cauſe des fortes pluyes & du froid de la nuit, étoit encore revêtue d'un papier très fort & d'une double natte. J'avois fait donner au pied de la caiſſe plus de trois pieds de hauteur, afin de pouvoir adapter à l'ouverture qui ſe trouvoit ſous le fond des alembics, des retortes, des tuyaux, & y arranger commodément des pots de jardin & d'autres vaſes.

Je fis paſſer par cette ouverture dans la caiſſe toute la tige du Tournesol, en prenant bien ſoin qu'elle conſervât exactement la même

direction

direction naturelle perpendiculaire qu'elle avoit eue auparavant en plein air. Le pot, dans lequel la terre avoit acquis pendant quelque tems l'humidité néeeſſaire, fut tellement affermi qu'il tenoit fort exactement au fond, & étoit enclavé dans ſon ouverture. La couverture fut alors tirée par deſſus, de la maniere que j'ai déjà indiquée; & le bouchon de papier ne fut poſé qu'en partie ſur l'ouverture du fond.

La poſition que j'avois donnée à la caiſſe étoit la ſuivante: les deux fenêtres étroites regardoient l'Orient & l'Occident; les deux larges le Septentrion & le Midi. La fenêtre à l'Occident, qui eſt ce qu'on nomme le côté du temps, n'étoit pas ſeulement couverte par une planche, mais encore défendue par une cloiſon. Les trois autres côtés demeurerent libres, & expoſés à toutes les intempéries de l'air.

De ces quatre fenêtres il n'y avoit pour l'ordinaire que celle du côté de l'Orient, laquelle pour l'introduction de l'air libre néceſſaire, je levois à la hauteur d'une main, & quelquefois tout au plus de deux pouces. Les autres fenêtres, pendant mes expériences, n'ont été qu'un petit nombre de fois hauſſées à demi, ou tout à fait, excepté lorsque je trouvois abſolument néceſſaire de procurer tout à fois à la plante qui étoit dans la caiſſe l'accès de l'air libre de toutes parts; encore pour l'ordinaire n'étoit-ce que du côté de l'Orient & de celui du Midi.

Tous ces arrangemens ne ſont pas aſſujettis à des regles invariables; ils dépendent de la nature des expériences en particulier, & doivent toujours être déterminés & variés ſuivant que le demandent les circonſtances. Mes vues demandoient que je m'y priſſe comme je le fis; & j'eus tout achevé à cet égard le 7 Juillet, à quatre heures & vint minutes de l'après-midi, après l'entrée de la Lune dans ſon premier quartier. Depuis ce tems je fis de ma plante l'objet d'une obſervation continuelle, ſurtout par rapport aux changemens que je m'attendois ſûrement à lui voir éprouver dans ſon mouvement. Surtout j'étois

fort curieux de voir, combien de tems la tige que j'avois placée à préſent entre des fenêtres & renfermée, conſerveroit ſa direction perpendiculaire. Il m'importoit auſſi de découvrir de quel côté de l'horizon arrivoit le plus communément la déclinaiſon de la tige perpendiculaire, & ſi ſon mouvement ſe laiſſeroit changer d'une maniere arbitraire? Je cherchois en même tems, pendant le cours de ces variations, à me procurer une connoiſſance plus exacte par rapport au tems, à la viteſſe, & d'autres circonſtances particulieres de ces mouvemens.

Je fis uſage dans ces Expériences d'un Inſtrument fort ſimple, qui conſiſtoit proprement dans un Tranſporteur de cuivre, garni d'un Indice mobile; & j'en ai déjà fait quelquefois mention dans ce qui précede. On pourroit regarder en quelque maniere cet Inſtrument comme un Indice du mouvement. Il repoſe ſur un ſupport de bois de trois pieds; il eſt pourvu d'une fort longue perche quarrée qui s'adapte dans une matrice, ou fourreau, pareillement quarrée & de cuivre, où l'on peut la faire monter & deſcendre, pouce par pouce, & l'affermir au moyen d'une vis, ſuivant la hauteur de la plante & ſes accroiſſemens. On peut encore le tourner de tous les côtés, l'approcher de la plante & l'en éloigner, auſſi ſouvent & auſſi vîte que le demande la maniere promte dont la tige décline ou ſe tourne.

J'ai fait diviſer la circonférence du Tranſporteur en 90 degrés, de façon que la ligne perpendiculaire eſt marquée par I, ou auſſi par O, & la ligne horizontale répond à 90. Au milieu de cette circonférence ſe trouve l'Indice mobile dont j'ai parlé tout à l'heure, que la plante, auſſi ſouvent qu'elle change ſa direction, pouſſe d'elle-même; de façon qu'on peut toujours obſerver très exactement ſur la circonférence les degrés du mouvement, ſoit en avant, ſoit en arriere. De la même maniere on peut appercevoir comment la tige fait ſes progrès d'one place à l'autre; & l'Indice les montre déjà quand ils ſont imperceptibles par la tige ſeule.

L'In-

L'Indice ſe termine par en haut en une pointe fort fine, qui a quelques pouces de largeur de plus que la hauteur de la circonférence, afin que la plante puiſſe parfaitement le roucher & le condure en cercle. Dans les premieres expériences j'effectuois ceci au moyen d'une longue, roide & étroite côte de baleine, qui étoit fortement attachée à la partie ſupérieure de la tige à la hauteur requiſe, de façon qu'elle conduiſoit horizontalement de là à l'Indice qui étoit dans une ſituation perpendiculaire. Mais, dans les obſervations ſuivantes, je changeai cette circonſtance avec un grand avantage, ayant mis à l'écart cette baleine, pour donner à l'Indice une pointe ſi longue que je pouvois la plier horizontalement au deſſus de la circonférence du Tranſporteur, & la faire pencher du côté de la tige.

Cet Indice du mouvement, ou *Dendrometre*, étant ainſi adapté à mes Expériences, je le mis dans la caiſſe ſusdite, à côté de la tige du jeune Tourneſol, à la diſtance de trois à quatre pouces, directement du côte du Nord, de façon que la pointe de l'Indice mobile le rouchoit de la maniere requiſe pour montrer régulierement le cours de ſes progrès par les degrès de la circonférence. J'ai eu lieu d'être très ſatisfait dès le commencement de l'exactitude avec laquelle cet Inſtrument ſimple met en état d'obſerver le mouvement extérieur de la tige dans les plantes, & leur déclinaiſon de la ligne perpendiculaire vers l'horizon. Je laiſſe aux Connoiſſeurs & aux Amateurs à changer & à perfectionner cet Inſtrument rélativement à d'autres vues particulieres.

Ce ne fut qu'après tous ces préparatifs que mes obſervations commencerent; & elles prirent fin au bout de vint & un jours à mon grand regret.

Le 7 Juillet, je ne remarquai pas le moindre changement dans la plante. La nuit du 7 au 8 il tomba une très forte roſée, qui étoit déjà diſſipée le matin à quatre heures & douze minutes; la direction de la plante étoit roujours perpendiculaire comme la veille. A ſept heures & cinq minutes le ſommet avec le bouton de la fleur parut s'être tourné un tant ſoit peu du côté de la fenêtre à l'Orient, qui avoit

été conſtamment ouverte. Ce mouvement eſt toujours déſigné dans la Table par I. comme étant le premier degré depuis la ligne perpendiculaire, qui eſt marquée O ſur le Tranſporteur. La chaleur augmenta après quelques foibles mouvemens de l'air de Sud-Oueſt, & à neuf heures & vint minutes je trouvai la direction de la tige toujours la même. A' midi la chaleur étoit presque brûlante; & vers les deux heures on apperçut au Sud-Oueſt pluſieurs nuages de tonnerre & de pluye: alors la tige avoit réellement décliné de trois degrés de la perpendiculaire vers l'Orient.

A' cinq heures l'indice étoit ſur le ſeptieme degré; & le ſoir à neuf heures vint-deux minutes, l'air étant encore extraordinairement peſant, & le Ciel aſſez couvert de nuages, je trouvai que l'Indice avec la tige s'étoit tellement écarté de la tige de la ligne perpendiculaire du côté de l'Orient, qu'il faiſoit avec elle un angle de dix degrés. Le vent foible qui avoit regné précédemment, fut cauſe qu'on ne ſentit cette nuit-là que peu de roſée: le 9 Juillet, à quatre heures du matin, la chaleur étoit déjà fort grande; & à quatre heures & vint minutes la direction de la tige comme précédemment. Je ne revis enſuite ma plante qu'à dix heures ſix minutes, la chaleur ayant pris alors un accroiſſement très conſidérable pendant qu'il régnoit un foible vent de Sud-Oueſt; je trouvai que l'Indice s'étoit déjà porté en avant juſqu'au vintieme degré. A' minuit, il s'étoit encore avancé de dix degrés à l'Orient, & alors à mon grand étonnement il faiſoit avec la ligne perpendiculaire un angle de trente degrés.

Cette circonſtance redoubla mon attention, & m'engagea à recommencer toute mon Expérience; d'autant plus que j'avois outre cela remarqué une callosité à ma tige. La chaleur étoit alors extrême, l'air fort électrique, & le mouvement de la tige de ma plante s'exécutoit avec aſſez de viteſſe. Le Ciel alors montra, par un vent de Sud-Oueſt, des nuages à tonnerre de toutes parts ſans pluye; & dans un eſpace de vint quatre heures l'évaporation & la ſuccion de la plante étoient

étoient ſi conſidérables que j'avois lieu de concevoir les plus grandes eſpérances d'appercevoir fort promtement dans la direction & dans le mouvement de la tige du Tourneſol autant de variations que mes arrangemens permettoient d'en remarquer.

Je tirai donc, encore dans la même après-dinée, vers les trois heures & dix minutes la plante hors de la caiſſe dans laquelle elle avoit été du 7 au 9 Juillet, & je la remis en plein air. Sa place fut tout de ſuite occupée par la ſeconde plante du jardin, où par précaution je l'avois auparavant plantée en même tems que la premiere. Je procédai à l'égard de celle-ci préciſément comme j'avois fait avec la précédente, excepté que, pour plus d'ordre & de commodité, je fis à l'Indice les changemens ſusmentionnés. A' peine avois je achevé ces arrangemens, qu'il s'approcha do côté où je me trouvois un violent orage de tonnerres, qui venoit du Sud-Oueſt; & dans ce moment-là la plante nouvellement miſe dans la caiſſe étoit encore, auſſi bien que l'Indice du Tranſporteur, dans la ſituation perpendiculaire la plus parfaite. Cet orage fut de durée, mais ſans pluye; & à quatre heures & trente ſix minutes l'Indice étoit encore dans ſa poſition précédente. L'air étoit fort rafraîchi, & ſembloit annoncer quelque tourbillon du Nord-Oueſt à l'Eſt; mais, ayant ouvert à ſept heures & dix-ſept minutes les fenêtres de la caiſſe, la tige avoit quitté tout à coup ſa ſituation perpendiculaire précédente; & l'Indice, dans l'eſpace d'environ deux heures & demie, s'étoit avancé fort rapidement depuis 1 juſqu'au 10 degré vers l'Orient; le vent s'étoit tourné à l'Oueſt, & le Ciel avec cela étoit fort rempli de nuages épârpillés.

Vû le mouvement de la plante, je fis une Expérience deſtinée à le troubler, ou à le changer. Pour cet effet j'ôtai entierement les fenêtres qui étoient du côté de l'Orient & du Midi; & je laiſſai la caiſſe ouverte juſqu'à huit heures & trente-deux minutes du ſoir. Par là le mouvement fut en effet arrêté pour cette fois; & je fis redeſcendre enſuite les deux fenêtres.

Le 10 Juillet, dans la nuit, à treize minutes après minuit, on ſentit, pendant un mouvement aſſez foible de l'air venant de l'Oueſt, &

quelques nuages ſéparés, une forte roſée; & l'Indice du Tranſporteur s'étoit non ſeulement porté en arriere tout à la fois de dix degrès; mais il avoit encore décrit trois degrés au delà de 1, du côté de l'Occident, de façon que la tige étoit presque perpendiculaire. Entre trois & cinq heures du matin l'air devint rafraichi, & le vent du Midi à l'Oueſt fort tempéré; & l'Indice tint la même poſition. Entre neuf & dix heures du matin, la chaleur avoit beaucoup augmenté fort rapidement, & elle continua de s'accroitre juſqu'à trois heures après-midi. L'Indice recula avec la même viteſſe de trois degrés de l'Occident à l'Orient revenant à 1.

Quoique je n'euſſe point cauſé de changement au moyen de l'ouverture des fenêtres, les ſucs altérerent la direction de la tige, (qui juſqu'alors ne s'étoit encore portée que communément de 1 vers l'Orient, & de là en rebrouſſant,) d'une maniere tout à fait extraordinaire, de façon qu'à dix heures & trente minutes, elle s'écartoit de dix degrés directement du Nord, ou de la circonférence de l'Inſtrument vers le Sud. A' onze heures & vint minutes avant midi, la tige avoit déjà repris ſa ſituation accoûtumée; & l'Indice ſe tenoit entre le 5 & le 6 degré en avançant vers l'Orient. Le vent venoit de l'Oueſt, & la chaleur étoit forte. A' dix-huit minutes aprèsmidi, l'Indice ſe trouvoit déjà ſur le dixieme degré, & le vent s'étoit renforcé. A' une heure & trente minutes je le trouvai ſur le quinzieme; & à quatre heures & dix minutes ſur le dix-neuvieme, la température de l'air reſtant toujours la même.

Depuis ce tems il ſe tira, avec des coups variables d'un vent violent, du Nord-Oueſt, des nuages noirs de pluye & de tonnere, & après qu'ils ſe furent raſſemblés l'air ſe rafraîchit. Pendant ces viciſſitudes irrégulieres l'Indice revint du troiſieme degré juſqu'à 1. Le Ciel étant demeuré juſqu'à neuf heures du ſoir tout couvert d'épais nuages pluvieux, il ſurvint une forte pluye mélée d'un vent de tempête. A' dix heures & douze minutes il plut à torrens, & cela dura une demi-heure, l'Indice conſervant encore ſa ſituation précédente. Après la pluye il rebrouſſa

brouſſa au contraire tout doucement, de ſorte que le lendemain 11 Juillet, à vint minutes après minuit, par un mouvement fort doux de l'air, il n'étoit plus qu'à quatre degrés de 1, & par conſéquent la tige de la plante étoit fort rapprochée de ſa direction perpendiculaire.

Le matin, à trois heures & cinquante-une minutes, il s'éleva un vent de tempête véhément de l'Occident avec le lever du Soleil; il continua juſqu'à cinq heures & trente minutes avec de la pluye, & pendant le jour il y eut des rayons du Soleil entremêlés. Pendant ce tems-là l'Indice ne perdit pas d'abord ſa ſituation précédente. Mais, entre dix & onze heures du matin, il alla en avançant vers l'Orient, juſqu'au treizieme degré où il s'arrêta juſqu'à midi & deux minutes; le tourbillon qui alloit alors du Nord-Oueſt devint des plus violens, le Ciel étant fort trouble, & il chaſſa les plus gros nuages de pluye ſans qu'il en tombât une goutte d'eau.

Depuis midi juſqu'à deux heures, l'Indice rebrouſſa à la vérité, pendant la durée de la tempête encore de deux degrés, en s'approchant de 1. Mais, de deux à quatre heures, le tems demeurant le même, il recula de façon qu'à quatre heures & huit minutes, je le trouvai ſur le 16 & 17 degré, à quatre heures & trente minutes, ſur le 18, & à ſept heures & ſix minutes du ſoir ſur le 19, droit à l'Orient. Pendant ce tems-là la tempête continuoit par ſecouſſes avec aſſez de violence. A huit heures & ſix minutes elle ſe calma, les violentes ſecouſſes ceſſerent entierement, & le Soleil ſe coucha lumineux, l'Indice étant ſur 19. A neuf heures il étoit à 20; ſituation qu'il conſerva avant & après minuit, l'air qui venoit de l'Occident étant rafraîchi, doux, & à la fin tout à fait calme.

Le 12 Juillet, à quarante minutes après minuit, le Ciel à la vérité étoit encore un peu nubileux; mais enſuite il s'éclaircit tout à fait; le mouvement de l'air changea à cinq heures préciſes, & venant du Sud il fut par alternatives un peu plus fort qu'auparavant; on appercevoit auſſi ſucceſſivement des nuages de tempête tout diſperſés qui étoient en partie au Sud-Oueſt: c'étoit proprement ce qu'on a coutume

me d'appeller des poutres, en Allemand *Wetter bäume*, ou *Wetterbalcke*. L'Indice avoit de nouveau rebrouſſé: le matin à ſept heures il étoit au 17 degré; à huit heures & dix ſept minutes, il conſervoit la même ſituation; mais le vent tomba à l'Oueſt, & devint encore plus fort. A' neuf heures le vent tourna au Sud-Oueſt, & augmenta un peu avec la chaleur; pendant cela il s'élevoit de toutes parts au Nord & à l'Oueſt des nuages d'orage. Mais, comme je trouvois encore l'Indice ſans aucun changement, pour eſſayer d'en procurer, j'ouvris entierement la fenêtre qui étoit à l'Orient; j'ôtai le bouchon de carton qui étoit ſur l'ouverture du fond de la caiſſe, & j'arroſai ma plante avec de l'eau auſſi fraîche que la pompe pût la fournir. Après cela j'attendis avec impatience, ſi l'Indice rebrouſſeroit entierement du 17 degré à 1, & ſi la tige reprendroit la ſituation perpendiculaire, ou du moins s'en rapprocheroit: mais il arriva juſtement tout le contraire de ce que j'avois conjecturé au ſujet de ce mouvement. Car, à neuf heures & dix minutes, l'Indice ſe porta beaucoup plus en avant juſqu'au 20 degré; & à dix heures, par un vent d'Oueſt, il ſe mit premierement à rebrouſſer juſqu'au 19.

Pour donner lieu à une plus grande déclinaiſon, je rabaiſſai la fenêtre occidentale, & je hauſſai entierement celle qui étoit au Midi. L'Indice, depuis les dix heures & huit minutes juſqu'à trois heures & dix-ſept minutes de l'aprèsmidi, rebrouſſa du 17 degré vers 1. La chaleur étoit alors fort grande, le Ciel rempli de nuages de pluye & d'orage diſperſés; mais le mouvement de l'air venant du Sud-Oueſt étoit fort foible, & le tems paroiſſoit ſe diſpoſer de toutes parts à une pluye prochaine. Ce ſoir-là l'Indice demeuroit encore au 17 degré; j'ouvris pour cette fois toutes les fenêtres de la caiſſe en même tems: & après la minuit du 13 Juillet ſuivant, vers les 40 minutes, l'air s'étoit aſſez réclairci, l'Indice ne montrant pendant ce tems-là aucun changement.

Entre ſix & ſept heures du matin, la clarté du Ciel s'obſcurcit; & comme la pluye étoit ſur le point de tomber, on vit l'Indice rebrouſſer

brouſſer tout à la fois entre le 14 & le 15 degré vers 1. La pluye ayant en effet commencé à tomber avec force, l'Indice avança de nouveau tout à-coup juſqu'au 17 degré; & à huit heures & trente minutes, la pluye s'étant arrêtée, & le Ciel ayant ſeulement demeuré nubileux, l'Indice, dans l'eſpace de trente cinq minutes, pendant une pluye entremêlée de quelques rayons de Soleil, rebrouſſa de façon qu'à la fin, à neuf heures & cinq minutes, il ne faiſoit plus avec la ligne perpendiculaire qu'un angle de huit degrés. A dix heures le Ciel étant toujours trouble, & quelques rayons de Soleil ſe laiſſant voir par ci par là, l'Indice avança de nouveau juſqu'au 9 degré, à l'Orient; & à onze heures avant midi, la pluye étant accompagnée d'un vent d'Oueſt, il parvint au 10. Mais l'après-midi à cinq heures, le tems étant demeuré le même il rebrouſſa juſqu'au 7 degré, & même le ſoir à ſept heures, le Ciel étant clair juſqu'au 5 vers 1.

Les deux jours ſuivans, 14 & 15 Juillet, pendant une grande chaleur & un vent d'Oueſt fort foible, l'Indice demeura conſtant à très peu de degrés près, tantôt à l'Eſt, tantôt à l'Oueſt. La nuit entre ces deux jours fut plus fraîche, l'air plus clair & un peu venteux, & les Etoiles jettoient une lueur pâle. La couverture de natte double dont j'avois toujours tenu la caiſſe couverte juſqu'à préſent, fut ſoulevée par le vent, de façon que l'air pouvoit pénétrer plus librement dans la caiſſe & agir avec plus de force ſur la plante. Cela fit allonger la tige de façon que le Tranſporteur, dont l'Indice n'étoit qu'à deux doits de la tige, eut beſoin d'être remonté plus haut. Le 15 Juillet vers les huit heures du ſoir, je remarquai que la longueur de la tige s'étoit encore accrue d'un pouce & demi; & la languette de l'Indice touchoit encore à peine l'extrémité de la pointe: de ſorte qu'il falut élever de nouveau le Tranſporteur. Le vent s'étoit tourné au Sud-Eſt; l'air étoit extraordinairement peſant, les nuages d'orage ſe raſſembloient du Sud-Oueſt, où l'on voyoit auſſi des éclairs fort vifs, mais ſéparés. A onze heures, l'air étant fort tempéré, il tomba une pluye douce, & la tige de la plante ſe retrouva preſque perpendi-

culaire: cependant l'Indice avoit paſſé d'environ trois degrés de l'Orient vers l'Occident au delà de 1.

Le 16 Juillet à trois heures du matin le Ciel étoit fort clair, l'Indice n'avoit ſouffert aucun changement, & l'air avoit un mouvement fort ſoible venant du Sud-Eſt, pendant lequel on ſentoit un peu de roſée. A' quatre heures l'Indice ſe tenoit encore ſur le 2 degré au delà de 1 vers l'Oueſt; & le Ciel étoit un peu nubileux. Depuis la chaleur augmenta ſenſiblement; il y eut nouvelle Lune à ſept heures & trente minutes; & depuis dix heures juſqu'à trois de l'aprèsmidi, par un foible vent de Sud-Oueſt, il fit un chaud presque inſupportable. Finalement il s'approcha du côté où je me trouvois, depuis les quatre heures juſqu'à quatre heures & demie, du Sud au Nord, un très violent orage lequel, après quelques coups véhémens qui mirent le feu où ils frapperent, paſſa tout à fait en ſe retirant vers l'Oueſt & l'Oueſt-Nord.

A' l'approche du premier coup de tonnerre, je hauſſai entierement les fenêtres de la caiſſe, du côté du Nord, de l'Eſt & du Sud, afin que la pluye & le vent de tempête pûſſent agir ſur la plante & ſur la terre du pot à fleurs qui étoit dans la caiſſe. Cet orage dont la violence étoit extraordinaire, paſſa après une forte pluye d'une demiheure, pendant laquelle la foudre tomba trois fois, & à environ mille pas de moi, alluma un grand moulin à vent ſitué ſur le bord de la Sprée. L'abondance de la pluye étoit telle qu'on pouvoit la regarder comme la chûte d'un nuage entre la Sprée & le fauxbourg de Berlin qu'on nomme de Francfort, juſqu'à la hauteur qui s'étend vers le Village de Lichtemberg. Les torrens d'eau qui s'étoient répandus, inonderent les chemins & les campagnes, & firent regner ſur le ſable le plus ſec une eſpece de mer, qui fut à peine écoulée au bout de trois heures. Un ſecond orage ſurvint; mais, après quelques coups rudes & une forte pluye, il fut bientôt paſſé.

Voici les obſervations que je fis ſur ma plante pendant la durée de ce grand orage:

1. Auſſitôt qu'il s'approcha, l'Indice mobile varia conſtamment du 5 degré, (où il s'étoit avancé de l'Oueſt au de là de 1 vers l'Eſt,) en rebrouſſant au 3 degré vers 1; mais cela ne ſe fit que lentement.

2. D'abord après le grand éclat de tonnerre qui embraſa le moulin, ce qui arriva préciſément à quatre heures & trente minutes, je trouvai l'Indice parvenu fort ſubitement au 2 degré, où il ſe fixa d'une maniere immobile, pendant les éclairs très vifs qui durerent juſqu'à dix heures vint & une minutes du ſoir; & ſa ſituation ſe ſoutint encore au delà juſqu'au 17 Juillet ſuivant, à quarante deux minutes après minuit, où je refermai premierement les fenêtres de la caiſſe. La force des éclairs ſe diſſipa à l'entrée du jour, au Nord & à l'Oueſt; la nuit fut fort fraîche, & il fit une bruine juſqu'à onze heures de la matinée ſuivante.

Le 17 Juillet, à une heure & dix-huit minutes après minuit, l'Indice étoit exactement ſur I ou O; & la tige de la plante avoit non ſeulement parfaitement recouvré ſa ſituation perpendiculaire, mais elle s'étoit auſſi un peu allongée, de ſorte que je fus obligé de hauſſer le Tranſporteur. Enſuite, à onze heures & quarante minutes avant midi, ayant r'ouvert pour la premiere fois la fenêtre de la caiſſe du côté du Sud, j'obſervai que la tige du Tournefol avoit décliné vers le Midi, depuis quarante-deux minutes après minuit, en s'écartant de nouveau de ſa lituation perpendiculaire, de façon que ſes mouvemens ne ſe portoient plus, (comme ils avoient fait communément juſqu'alors,) de l'Oueſt à l'Eſt. En effet cette tige s'étoit tournée tout à la fois en s'éloignant de la circonférence du Tranſporteur, ou du Nord un peu obliquement vers le Sud; ce qui faiſoit dix degrés tout enſiers. Je laiſſai la fenêtre ouverte juſqu'à deux heures après-midi, par un vent d'Oueſt ſoutenu & une bruine; ce qui ne fut pas ſans conſéquence: car, dès les onze heures & cinquante minutes, la tige, à mon grand étonnement, avoit rebrouſſé de dix degrés complets du Sud vers le Nord, & par conſéquent, en ſe rapprochant de la circonférence,

avoit repris ſon ancienne poſition accoûtumée; mais en même tems elle s'étoit avancée de ces dix degrés au delà de 1 vers l'Oueſt. Cette déclinaiſon eſt la plus curieuſe & la plus extraordinaire que j'aye eu occaſion de remarquer dans le cours de ces Expériences.

A' quatre heures après-midi, la pluye ceſſa; le côté de l'Oueſt s'éclaircit le premier, & l'Indice avoit rebrouſſé du 10 degré au 8, à l'Eſt vers 1. J'ouvris cette fenêtre encore davantage, juſqu'à un demi-pied de largeur; & après quatre heures & trente minutes, je trouvai déjà l'Indice reculé au 7 degré vers 1. Le vent avoit été Sud peu auparavant, & l'air encore beaucoup plus clair: à ſix heures & douze minutes l'Indice, étoit encore éloigoé de 6 degrés de 1.

Le ſoir, à huit heures 23 minutes, après que j'eus de nouveau r'ouvert toûtes les fenêtres, l'Indice, par un tems beau & tempéré, rebrouſſa juſqu'au 4 degré vers 1; & à huit heures, trente-ſix minutes, le tems étant devenu encore plus agréable, plus calme & plus chaud, avec un Ciel clair, la terre commenca à évaporer fortement; & l'Indice avança pleinement au delà de 1, dans ſa route accoûtumée, vers l'Eſt, de ſorte que, le ſoir à dix heures, il étoit déjà revenu entre le 5 & le 6 degré. Là deſſus le Ciel devint toujours plus clair, & fut étoilé tant avant qu'après minuit, l'air étaot tout à fait calme & humide.

Le 18 Juiller, à dix-huit minutes après-minuit, les vapeurs que la terre exhaloit, ſemblerent redoubler, & l'Indice n'avoit reculé que d'un degré. Enſuite, à une heure & vint minutes, les circonſtances précédentes continuoient, le tems étant fort agréable, & le Ciel parfaitement étoilé de toutes parts, excepté à l'Orient: l'air ſe rafraîchit un peu, & avoit un mouvemeot doux du Nord-Oueſt à l'Oueſt. L'évaporation de la terre continuoit encore, & dura juſqu'à environ huit heures & quarante-huit minores, l'Indice qui s'étoit tenu quelque temps entre le 4 & le 5 degré, ayant reculé juſqu'au 3, & un peu au delà, vers 1; & il s'y trouvoit encore à neuf heures & quarante deux minores. Comme la chaleur augmeutoit beaucoup, je

laiſſai

laiſſai à la vérité les fenêtres ouvertes, mais je les baiſſai à moitié vers dix-heures, la moitié de l'horizon étant alors parſemée de nuages.

A' dix heures & trente-cinq minutes avantmidi, la déclinaiſon particuliere de la tige du Tourneſol ſe troova pour la troiſieme fois du Nord au 18 degré vers le Sud; & je fus obligé de régler mon Inſtrument en conformité: voyant bien en même tems que le rebrouſſement de l'Indice ſeroit arrêté par là, puisque dès l'après midi à une heure je trouvai déjà l'Indice ſur le 19 degré; lequel Indice, pendant toute cette déclinaiſon, demeura toujours parallele avec 1, ou avec le milieu de la circonférence. A' onze heures avant midi, on vit monter des nuages d'orage en abondance de tous les quatre côtés du Ciel; le mouvement de l'air étoit doux, & venoit de l'Oueſt. Après une heure & quarante minutes, la tige avoit rebrouſſé de dix-huit degrés tout entiers du Sud vers le Nord, de ſorte qu'elle étoit ſur 1, & par conſéquent tout à fait perpendiculaire. A' une heure & cinquante minutes, elle avoit reculé juſqu'au 5 degré au delà de 1 vers l'Oueſt, où elle ſe trouvoit encore le ſoir, à ſix heures & cinquante quatre minutes.

Le même ſoir, à huit heures & ſix minutes, après que j'eus fermé toutes les fenêtres à la fois, le Ciel étant clair, & une douce température régnant dans l'air, l'Indice ſe trouva de nouveau avancé juſqu'au 23 degré vers l'Orient. La roſée tomboit avec beaucoup de force par un mouvemeot fort doux de l'air venant de l'Oueſt; & à neuf heures & trente-ſix minutes, l'Indice avoit rebrouſſé juſqu'au 18 degré vers 1.

Dans le même tems j'examinai, comme je l'avois déjà fait quelquefois pendant la nuit, les Tourneſols dont j'avois fait planter une grande quantité par tout le Jardin, pour voir ſi toutes leurs tiges avoieot une direction uniforme, & ſi cette direction différoit, ou non, de celle de la Plaote que j'avois miſe dans la caiſſe.

Quelques uns de ces Tourneſols qui n'étoient pas fort éloignés de la caiſſe, & qui portoient déjà de groſſes fleurs, montroient à peu

près la même direction; mais, dans d'autres, j'en trouvai une préciſément oppoſée. Car ces plantes, tant grandes que petites, comme elles ſe trouvoient mêlées les unes parmi les autres, ſoit qu'elles euſſent fleuri, ou non, penchoient leurs tiges de divers côtés; & au milieu d'elles on en voyoit par ci par là pluſieurs, dont la tige étoit parfaitement perpendiculaire. Ici les heures du jour & la température de l'air avoient été à la vérité parfaitement les mêmes par rapport à toutes; mais l'âge, la hauteur, la force, la ſituation, le ſol, & le libre accès de l'air, étoient ſans contredit autant de choſes différentes.

A' dix heures & vint-deux minutes, j'ouvris les fenêtres de la caiſſe tout à la fois, de la même maniere que je l'avois déjà fait à dix heures avant midi, par un vent d'Oueſt tout à fait doux. L'Indice ſe tenoit au 18 degré; mais, au bout de quelques minutes, il paſſa au 19 vers l'Orient. Il tomboit pendant ce tems-là une roſée exceſſive, le Ciel étoit clair & fort étoilé; & je trouvai le 19 Juillet, à vint minutes après minuit, l'Indice ſur le 21 degré. A' une heure & ſeize minutes, le tems étant le même ſans aucun autre mouvement, il étoit déjà au 23, la roſée demeurant toujours très forte, & le Ciel ſe couvrant au point du jour de nuages qui s'élevoient preſque de tous côtés.

Cette température de l'air dura juſqu'à environ huit heures & dix minutes avant midi, l'Indice s'étant avancé juſqu'au 24 degré vers l'Eſt, par un Ciel clair & un vent foible d'Oueſt. La plûpart de ces Tourneſols répandus dans le Jardin, dont j'ai parlé tout à l'heure, avoient exactement la même direction. Cette petite plante de Tourneſol connue ſous le nom de *Flos ſolis tuberoſus*, *latifolius*, *perennis*, auſſi bien que la plante qu'on nomme *Flos Solis Farneſianus*, en Allemand *Unter-Erdſchokke*, tournoient également leurs jeunes tiges & leurs ſommets vers l'Eſt, ſoit qu'elles euſſent fleuri, ou qu'étant tardives, elles n'euſſent point encore pouſſé de fleurs. J'apperçus la même choſe dès les ſix heures du matin dans les eſpeces tant cultivées que ſauvages, & dans les variations du *Chenopadium*, des épinars, du

Se-

Senecio, de la petite ortie brûlante, & d'autres plantes qui n'ont point d'affinité avec le Tournesol; soit qu'elles fussent à découvert, ou placées sous des arbres & des buissons.

A' neuf heures & cinquante-cinq minutes, la chaleur s'accrût très considérablement, l'air avec cela n'avoit que le mouvement le plus doux venant du Nord-Ouest; & plusieurs petits nuages legers & minces tiroient du Nord vers le Sud. L'Indice alla toujours en avançant jusqu'au 27 degré. La chaleur augmentant de plus en plus, des nuages d'orage se montrerent en abondance à l'Est & à l'Ouest, & à onze heures l'Indice passa d'abord au 25 degré, allant en rebroussant, vers le 0, & le vent devint Sud-Ouest. A' une heure après-midi, il s'éleva un vent frais de l'Ouest, qui jusqu'à six heures tempéra un peu la grande chaleur; surquoi l'Indice rebrousse encore plus loin jusqu'au 23 degré. Le soir, à sept heures & douze minutes, le vent s'étoit tourné au Sud-Ouest, & soufflоit fort foiblement; le reste de la température de l'air se rafraîchit tout à coup & devint fort agréable, le Ciel étant clair & bleu. Alors l'Indice se trouvoit déjà au 21 degré. La nuit fut encore plus belle, le vent d'Ouest, le Ciel fort étoilé; & à dix heures & dix-sept minutes, l'Indice avoit déjà reculé vers 0.

Le 20 Juillet avant midi, à dix heures, le vent alloit du Sud-Ouest, l'Indice répondant au 19 degré. La chaleur étant fort grande, il s'éleva des nuages de tonnere en abondance du Sud & du Nord tout à la fois. L'après-midi, à midi & seize minutes, l'Indice étoit sur le 18 degré, & le soir à sept heures, le tems étant rafraîchi, avec un peu de vent & un Ciel nubileux, il s'étoit ravancé jusqu'au 19 degré. A' dix heures, le vent s'étant appaisé, & le Ciel étant fort éclairé par les Etoiles, l'Indice rebrousse de nouveau jusqu'au 17 degré vers 0.

Le 21 Juillet, l'Indice, depuis sept heures du matin jusqu'à une heure après-midi, pendant l'entrée de la Nouvelle-Lune, se tint au 18 degré. Le vent d'Ouest modéra la chaleur, & les nuages tiroient

roient avec force de l'Oueſt à l'Eſt. Ces circonſtances durerent juſqu'à minuit, après quoi le vent ceſſa, le tems devint clair & agréable, avec une ſorte roſée; pendant laquelle l'Indice recula juſqu'au 19 degré vers l'Eſt, & par conſéquent déclina de la ligne perpendiculaire vers la ligne horizontale.

Ici, contre mon gré, mes obſervations ſe terminerent tout à coup. Une maladie qui peu de jours après devint une fievre pétéchiale maligne, me força d'abandonner le jardin dès cette nuit-là; & il ſe paſſa dix-huit ſemaines avant que je pûſſe y retourner. Sans cela je m'étois propoſé de varier encore mes Expériences de diverſes manieres, & en particulier de continuer encore avec un plus grand nombre de plantes, dans une petite ſerre, pendant tout le cours de l'Automne & de l'Hyver. J'aurois pu arranger pour cet effet, tant extérieurement qu'intérieurement, quelques Barometres & Thermometres d'une maniere beaucoup plus commode qu'auparavant.

En attendant, comme on a pu le voir dans tout le cours de ma diſſertation, par rapport aux Expériences dont j'y ai rendu compte, ce qu'elles ont de plus particulier eſt du au ſecours de l'Inſtrument, dont je donnerai une deſcription plus exacte à la fin, accompagnée d'une figure qui le repréſente. J'y ai joint, ſuivant le conſeil du célébre Hales, l'uſage du Barometre & du Thermometre; & j'ai ſoigneuſement obſervé les variations tant conſtantes qu'extraordinaires de la température de l'air depuis le 8 Juillet juſqu'au 21; ce qui ne manque jamais d'être d'une grande utilité dans de ſemblables Expériences. Le Barometre étoit diviſé en pouces & en lignes duodecimales du pied Rhinlandique; le Thermometre au contraire, ſuivant la diviſion de M. de l'Iſle, marquoit 0 au terme de l'eau bouillante, & 150 à celui de la congélation.

Pour arriver à une plus grande certitude, j'ai comparé mes obſervations météorologiques pour les mois de Juin & de Juillet, avec celles que M. Reccard, ſavant Inſpecteur de l'Ecole Réelle de Berlin, & préſentement Docteur & Profeſſeur en Théologie à Konigsberg

nigsberg en Pruſſe, a publiées, & j'ai trouvé fort peu de différence entr'elles. Vû cette harmonie, & pour plus de commodité, j'ai réduit toutes mes obſervations en quelques Tables qui ſe trouvent à la fin de ce Mémoire, & au moyen desquelles on pourra d'un coup d'oeil appercevoir le précis de toutes les circonſtances.

Tout le reſte de ce qui a été dit au ſujet de la diverſe déclinaiſon des jeunes tiges, des ſommets & des queues, auxquelles l'évaporation fait perdre leur direction perpendiculaire, tant que leur accroiſſement dure, peut être connu avec plus d'étendue encore dans ce qui arrive non ſeulement aux jeunes arbres des forêts venues de ſemence par rapport à la feuille & à l'écorce de leur bois, mais dans pluſieurs grands arbres tant ſauvages que cultivés, dont chacun peut être regardé comme un forêt particuliere, la Nature l'ayant formé ſur ſa tige individuelle pour ſa propre conſervation. Dans ces derniers ſeuls on peut ſouvent rencontrer presque toutes les eſpeces poſſibles de direction, que les vapeurs qui s'exhalent avec force ſont capables de donner aux branches encore tendres pendant la durée de leur accroiſſement. Il eſt bien vrai que la déclinaiſon par laquelle ces jeunes tiges s'écartent de la ligne perpendiculaire vers l'horizon, n'eſt pas plus obſervable dans ſon commencement & dans ſes progrès, que l'accroiſſement même des branches. Mais, quand l'une & l'autre de ces choſes eſt arrivée, on en a des preuves de fait inconteſtables dans le changement de ſituation & dans l'allongement.

Toutes les cauſes qui par elles-mêmes ſont en état d'affoiblir de différentes manieres les mouvemens intérieurs des plantes, ou de les augmenter, de les rendre plus forts & plus rapides, ou même de les détruire entierement, peuvent fournir des caracteres propres à nous faire obſerver quelquefois dans les plantes un certain état extérieur & particulier, qui differe fort diſtinctement de pluſieurs autres. Cela s'explique entr'autres manieres par l'évaporation forte ou foible qu'éprouvent ſucceſſivement quelques plantes dans certaines températures des ſaiſons. Dès-là donc que les vapeurs en s'exhalant dirigent les

jeunes tiges & les branches de ces plantes, & qu'en même tems elles cherchent l'air libre dans lequel elles montent droit en haut, les pointes & branches ſusdites ne peuvent manquer d'acquérir par là une ſemblable direction perpendiculaire. Mais, dès qu'on intercepte l'accès de l'air libre à ces pointes, tiges & plantes, tandis qu'elles ſont dans leur plein accroiſſement, de ſorte que les vapeurs qui s'en exhalent ne peuvent plus monter directement, alors elles ſe portent vers les côtés d'où l'air libre doit premierement leur venir; & ces pointes, tiges & branches ſont en même tems détournées de leur ſituation précédente, pour tendre vers les mêmes côtés où les vapeurs ſe portent. Cette variation ſe ſoutient ordinairement, & les branches, en ſubiſſant pluſieurs ſortes d'inflexions & de courbures, ſont ainſi conduites juſqu'à ce que leur ſommet puiſſe regagner l'air libre, dans lequel elles reviennent inſenſiblement à leur premiere ſituation perpendiculaire.

Quoiqu'un ſemblable état ſoit déjà fort commun parmi quelques eſpeces de plantes, & que des circonſtances accidentelles puiſſent le rendre presque univerſel, il eſt néanmoins ſujet à des changemens très fréquens. Leurs jeunes branches, ſommets, tiges & queues, abandonnent non ſeulement leur direction perpendiculaire accoûtumée; mais elles prennent une ſituation fort oblique, & qui à la fin devient presque horizontale, quelques unes mêmes pouſſant leur inflexion encore plus loin. Mais de nouvelles variations les ramenent tout auſſi bien vers le haut, & leur font reprendre leur ſituation perpendiculaire précédente. Cela arrive quelquefois fort vîte, quand l'évaporation eſt très foible, ou qu'elle ceſſe bientôt. Dans des alternatives ſi ſubites & ſi variées du mouvement intérieur des plantes, rélativement à leur évaporation, il s'agit principalement d'employer en même tems une réaction plus forte de l'air qui affecte la plante, afin qu'elle puiſſe déterminer les vapeurs vers le degré oppoſé.

Cette circonſtance, qui ſe manifeſte quelque fois d'elle-même par des cauſes accidentelles, peut aiſément être produite d'une maniere arbitraire, comme je l'ai ſouvent exécuté en petit par rapport à

mes

mes vues. En attendant, auſſi longtems que les vapeurs ſe portent d'une maniere forte & durable d'un côté, les branches, les queues, les ſommets conſervent la ſituation qui eſt occaſionnée par là; & ſi cela eſt conſtant, ou dure un peu trop longtems, de ſorte que l'accroiſſement de ces plantes vienne à ſe terminer, & leurs fibres à devenir ſortes, coriaces & ligneuſes, les parties devenues ainſi inflexibles ne reprennent leur ſituation perpendiculaire que fort difficilement, lentement, inſenſiblement, ou même elles n'y reviennent jamais. Elles demeurent plutôt dans la direction & avec la courbure que les évaporations leur ont procurées.

Il en eſt autrement des nouveaux rejettons qui pouſſent de ces tiges devenues roides; pourvu ſeulement qu'ils ſe trouvent dans un air libre, ils croiſſent toujours perpendiculairement.

On peut rien dire encore de bien poſitif ſur l'utilité & l'application de ces obſervations, juſqu'à ce qu'elles ſoyent déterminées avec plus d'exactitude. Je ne répéterai pas ce que j'ai dit dès l'entrée de ce Mémoire au ſujet de la maniere d'élever le bois des forêts, ou toutes ſortes d'eſpeces de grands & petits arbres utiles, en leur donnant une figure déterminée, rélativement à des vues particulieres: mais je recommande ces objets aux connoiſſeurs & aux amateurs de la Phyſique Expérimentale pour y conſacrer des recherches ultérieures, l'étendre & le perfectionner; ce qui ne m'a pas été poſſible, tant à cauſe de la maladie dont j'ai parlé que de pluſieurs autres traverſes.

J'aurai en attendant toujours été le premier à faire des obſervations ſur une eſpece de mouvement extérieur des plantes, lequel, ſuivant la diverſe température de l'air avec laquelle elles ont une certaine liaiſon, peut éprouver des variations fréquentes & rapides dans un eſpace de 4, 6 à 8 heures; & j'ai appliqué à ces Obſervations un Inſtrument particulier & fort exact, auquel on peut donner le nom de *Dendrometre*, ou d'Indice de la direction & du mouvement des plantes, Inſtrument dont perſonne avant moi n'a fait un ſemblable uſage.

TABLE.

Jour. Juillet	Tems du Jour Heur.	Min.	Déclinaiſon de la tige vers l'Eſt	l'Oueſt	le Sud	Barom.	Therm.	Vent.	Température quotidienne.	
VIII.	4	12 av.m.				29. 5½	131	S. O.	claire & calme	Premiere Plante.
24	5	0 av.m.				— —	—	— —	chaude avec un vent foible.	
	7	5 av.m.	1					O.	— — —	
	12	0	—			— 4⅔	116	—	— — —	
	2	0 ap.m.	3					—	Nuages d'orages ſéparés & pluye.	
	5	0 ap.m.	7					—	— — —	
	6	0 ap.m.	—			— 3⅚	117	—	— — —	
	9	22 ap.m.	10					—	Tems nubileux ſans pluye.	
	12	0	—			— 4	126	—	— — —	
VIII.	4	20 av.m.	10			29. 3⅔	127	—	— & chaud.	
♀	5	0 av.m.	—			— —	—	—	— — —	
	8	0 av.m.	—			— —	126	N.O.	— — —	
	10	6 av.m.	20			— 3½	116	— —	— chaud avec un peu de pluye.	
	12	0	30			— —	—	— —	Orageux.	
	3	10 ap.m.	1					— —	Orage au Sud ſans pluye.	Seconde Plante.
	4	30 ap.m.						— —	air rafraichi.	
	7	0 ap.m.				— 4⅓	123	— —	— nuages diſperſés.	Les fenêtres au Sud & à l'Eſt ouvertes depuis 7 h.
	7	17 ap.m.	10			— —	—	O.	— — —	
	12	0 ap.m.				— 4⅓	127	—	— — —	jusqu'à 8 h. 32 m.

Jour Juillet	Tems du Jour Heur.	Min	Déclinaison de la tige vers l'Eſt	l'Oueſt	le Sud	Barom.	Therm.	Vent	Température quotidienne.	
X. ♄	12	13 ap.m.		3 *	·	— —	—	—	vent foible, ciel nubileux, forte roſée.	* Au Tranſporteur rebrouſſement de 3 degrés au delà de 0, de l'Eſt à l'Oueſt.
	3-5	av.m.		—			—	—	— — ciel clair, tems agréable.	
	5	0 av.m.		—		29. $4\frac{2}{3}$	131 $\frac{1}{2}$	N.O.	— — — chaud	
	8	9 av.m.		—		— $4\frac{2}{4}$	123	— —	— — —	
	9-10	av.m.	1 ·					— —	chaleur qui s'accroit conſidérablement.	
	10	30 av.m.			10 *	— —	116	— —	— — — vent foible.	* de la circonférence droit en avant, & par conſéquent du Nord au Sud.
	11	20 av.m.	5-6			— —	—	O.	— — —	
	12	0				— —	—	—	— — —	
	12	18 ap.m.	10					—	— — —	
	1	30 ap.m.	15					—	— — —	
	4	10 ap.m.	19					—	air un peu diſpoſé à la tempête.	
	7	0 ap.m.	13			— $4\frac{1}{6}$	117	N.O.	fortes ſecouſſes de vent, pluſieurs nuages noirs de pluye & d'orage.	
	9-10	12 ap.m.	—					— —	Ciel obſcurci avec un tourbillon & une très forte pluye par intervalles.	
	11	0 ap.m.	—			— 4	121	— —	— — —	
XI. ☉	12	20 av.m.	5					N.O.	vent foible avec des nuages par intervalles.	
	3	51 av.m.	—					— —	tourbillon & pluye.	
	5	30 av.m.				29. $2\frac{1}{6}$	124	— —	— avec des rayons de ſoleil entremêlés	
	6	0 av.m.				— —	—	— —	— — — —	
	10	11 av.m.	13					— —	— — — —	
	12	0	—			— $1\frac{3}{4}$	120	— —	— — — —	
	12-2	ap.m.	11			— —	—	— —	tourbillon violent & de durée, Ciel trouble ſans pluye	
	2-4	8 ap.m.	16-17					— —	— — — —	
	4	0 ap.m.	—			— $2\frac{1}{2}$	—	— —	— — — —	
	4	30 ap.m.	18			— —	—	— —	— — — —	
	7	6 ap.m.	19			— —	—	— —	— — — —	
	8	6 ap.m.	—					— —	vent doux, ciel clair au coucher du ſol.	
	9	0 ap.m.	20					— —	air rafraichi & doux	
	11	0 ap.m.	—			— 4	128	— —	ciel trouble.	

Jour

Jour Juillet	Tems du Jour Heur.	Min.	Déclinaiſon de la rige vers l'Eſt	l'Oueſt	le Sud	Barom.	Therm.	Vent	Température quotidienne.	
XII. ☽	12	40 av.m.	—					S. O.	d'abord nubileux, enſuite fort clair.	
	5	0 av.m.	—			29. 4½	131	— —	le vent ſe renforce; des nuages diſperſés au Sud-Oueſt.	
	7	0 av.m.	17			— 4⅓	124	— —	air de tempête, poutres d'orage.	
	8	0 av.m.	—			— —	—	O.	— nuages diſperſés.	
	8	17 av.m.	—			— —	—	—	— — —	
	9	0 av.m.	—					—	vent foible, chaleur, nuages à tonnerre au Nord & à l'Oueſt.	
	9	10 av.m.	20						— — —	après l'arroſement.
	10	0 av.m.	19						— — —	
	12	0				— —	117	—	— — —	fenêtre ouverte au Sud.
	3	17 ap.m.	17			— 4½	115	N.O	— nuages diſperſés.	
	7	0 ap.m.	—					S. O.	— — —	
	11	0 ap.m.	—			— —	125	— —	— — —	toutes les fenêtres ouvertes.
XIII.	12	40 av.m.	17					N.O	tems clair.	
♂	5	0 av.m.	—			29. 4⅓	126	— —	— —	
	6-7	0 av.m.	14-15			— —	—	— —	trouble & pluvieux.	
	8	0 av.m.	17			— —	123	— —	pluye.	
	8	30 av.m.	—			— —	—	— —	entremêlé de pluye & de rayons du Soleil.	
	9	5 av.m.	8			— —	—	— —	— — —	
	10	0 av.m.	9					O.	pluye & vent.	
	11	0 av.m.	10			— 4	116	—	trouble, pluye & vent.	
	12	0	—			— —	—	—	— — —	
	4	0 ap.m.	—			— 3⅚	112	—	— — —	
	5	0 ap.m.	7			— —	—	—	— — —	
	7	0 ap.m.	5			— —	—	—	— — —	
	12	0	—			— 4½	126	N.O	clair.	
XIV. ☿	5	0 av.m.	3-5					O.	vent foible, grande chaleur.	
	9	0 av.m.	—			— 5⅛	120	—	— — —	
	4	0 av.m.	—			— 5⅛	111	—	— fort clair,	
	11	0 av.m.	—			— 5¼	120½	—	— — — fraix, étoiles pâles.	

Jour

Jour Juillet	Tems du Jour. Heur.	Min.	Déclinaison de la tige vers l'Eſt	l'Oueſt	le Sud	Barom.	Therm.	Vent	Température quotidienne.	
XV.	5	o av.m.	—			29. 4¾	127	—	vent foible,	
24	8	o av.m.	—			— 4½	120	S. E.	nuages déliés & diſperſés, chaleur.	
	12	o	—			— 3⅚	110	— —	— — clair.	
	8	o ap.m.	—			— 4½	120	— —	air peſant, nuages à tonnerre, avec de violens éclairs au Sud-Oueſt.	
	11	o ap.m.		3°		— 3½	110	— —	pluye douce, vent modéré.	* en rebrouſſant au delà de o, de l'Eſt vers l'Oueſt.
XVI.	12	o		—		— 3	116	— —	clair, un peu de roſée, & chaud.	
♀	3	o av.m.		—				— —	vent foible.	
	4	o av.m.		2°					air nubileux, chaud.	* encore 2 degrés, en delà de o, vers l'Oueſt.
	5	o av.m.		—		29. 2¾	120	S. O.	— — —	
	12	o ap.m.		—		— 2⅔	105	— —	— — fort chaud.	
	4	o ap.m.		—		— 2⅔	113	— —		
	4	30 ap.m.	5·3·2			— —	—	S. O.	tonnerre véhément du S. & du N. moulin à vent embraſé par la foudre, pluye à torrens.	toutes les fenêtres ouvertes.
	10	21 ap.m.	2					— —	gr. éclairs par intervalle du Nord & de l'Oueſt.	
	12	o	—			— 2⅔	119	— —	— — —	
XVII.	12	42 av.m.	2			29. 2⅔	119	S. O.	air frais, bruine, éclairs par intervalle au N. O.	
♄	1	18 av.m.	1					— —	— — —	
	5	o av.m.	—			— 2⅚	125	— —	— — —	
	9	o av.m.				— 3¼	—	— —	— — —	
	11	40 av.m.			10°	— 3½	123	N.O	— — aſſez clair, un peu de pluye.	* en s'écartant de la circonférence du Tranſporteur du Nord vers le Sud.
	11	50 av.m.		10		— —	—	— —	clair & tranquille.	
	12	o				— —	—	— —	— — —	
	4	o ap.m.		9		— 3¾	120	— —	— — —	
	4	30 ap.m.		7				S. O.	— — —	
	6	12 ap.m.		6				O.	— — —	
	8	23 ap.m.		4				—	— — — chaud.	toutes les fenêtres ouvertes.
	8	36 ap.m.	1					—	— — — roſée —	
	10	o ap.m.	5·6					—	clair — — humide.	
	11	o ap.m.	5·4			— 4	125	N.O	— étoilé, rafraîchi.	

Jour

Jour	Tems du Jour		Déclinaiſon de la tige vers			Barom.	Therm.	Vent	Température quotidienne.	
Juillet	Heur.	Min.	l'Eſt	l'Oueſt	le Sud					
XVIII.	12	18 av.m.						— —	— — — roſée.	
☉	1	20 av.m.	3·45					— —	— — — forte roſée.	
	5	0 av.m.	— —			29. 4½	129	— —	— — — —	
	8	0 av.m.	2·3			— 4⅔	125	— —	— — — air calme.	
	8	48 av.m.	—			— —	—	— —	— — — nuages ſéparés par rayes.	
	9	42 av.m.	—			— —	—	— —		
	10	35 av.m.			18*	— —	—	— —	nuages diſperſés.	* en s'écartant de la circonférence du Tranſporteur du N. vers le S.
	12	0			—	— —	113	— —	— — —	
	1	0 ap.m.			19			— —	— — —	
	1	40 ap.m.	1							
	1	50 ap.m.		5*					tems clair & agréable, avec un vent fort foible.	* en arriere en deça de 0, vers l'Oueſt.
	5	0 ap.m.		—		— 4¾	100	— —	— — —	toutes les fenêtres ouvertes.
	6	54 ap.m.		—					— — roſée.	
	8	6 ap.m.	23						— Ciel tout à fait étoilé.	toutes les fenêtres fermées.
	9	36 ap.m.	18					— —	forte roſée.	
	10	22 ap.m.	— 19					O.	— — —	
	12	0	—			— 5	120	—	— — —	
XIX.	12	20 av.m.	21			29. 5	120	N.O	tems clair & roſée,	
☽	1	16 av.m.	23					— —	— — —	
	5	0 av.m.	—			— 5⅙	124	— —	— — — calme.	
	8	0 av.m.	—			— 5¼	118	— —	— — —	
	8	10 av.m.	24			— —	—	— —	— — —	
	9	55 av.m.	27					N.O	— — forte chaleur avec des nuages déliés & ſéparés.	
	11	0 av.m.	25					S. O.	beau tems & chaud.	
	12	0	—			— 5⅓	109	— —	— — —	
	1	0 ap.m.	23					O.	tems rafraîchi.	
	3	0 ap.m.	—			— 5¼	99	S. O.		
	7	12 ap.m.	21					— —	clair & Ciel bleu.	
	10	17 ap.m.	20					— —	fort étoilé & agréable.	
	12	0	—			— 4¾	118	O.	— — —	

Jour Juillet	Tems du Jour. Heur.	Min.	Déclinaiſon de la tige vers l'Eſt	l'Oueſt	le Sud	Baromt.	Therm.	Vent	Température quotidienne.
XX. ♂	5	o av.m.	—			29. 4½	120	S. O.	tems nubileux & pluvieux.
	9	o av.m.	—			— 4¾	112	O.	fort clair & calme.
	10	o av.m.	19			— —	—	S. O.	chaud, nuages à tonnerre.
	12	o	—			— —	103	— —	— — —
	12	16 ap.m.	18			— —	—	— —	— — —
	3	o ap.m.	—			— —	—	— —	— — — tourbillon.
	7	o ap.m.	19					— —	— — —
	10	o ap.m.	17					— —	calme, fort étoilé, agréable.
	12	o	—			— 5⅛	112	— —	— — —
XXI.	5	o av.m.	18			29. 5¾	123	O.	clair.
☿	7	o av.m.	—			— 6	118	—	chaud, les nuages tirant avec force de l'Oueſt à l'Eſt.
	8	o av.m.	—			— —	111	—	nubileux.
	12	o	—			— —	—	—	—
	2	o ap.m.	—			— 5⅛	108½	—	fort clair, agréable & roſée.
	10	o ap.m.	—			— —	—	—	— — —
	12	o	19			— 5¾	119	—	— — —

DESCRIPTION

de l'Inſtrument, dont on a fait uſage dans les expériences du Mémoire précédent, qu'on pourroit appeller un *Dendrometre*, ou plus proprement un *Phytoclinometre*, parce qu'on peut par ſon moyen meſurer les inclinaiſons des plantes.

A eſt *le pied* de bois, haut de 8 pouces, dont les trois pieds ſont écartés entr'eux d'un pied & demi, afin de gagner aſſés de place pour la poſition des plantes: ſi on vouloit appliquer l'inſtrument aux arbres & aux arbriſſeaux, il conviendroit de faire faire les pieds aigus à leur extrémité & mobiles par des charnieres, d'une hauteur de deux juſqu'à cinq pieds, à la façon du pied des aſtrolabes. Outre cela les diverſes circonſtances rendront neceſſaires d'autres changemens du pied, dont la figure eſt fort arbitraire. Sur ce pied A eſt fermé, par une platine quarrée de deux pouces, *l'étui perpendiculaire* B haut de neuf pouces & large d'un demi-pouce, pour recevoir *le parallelepipede* C haut

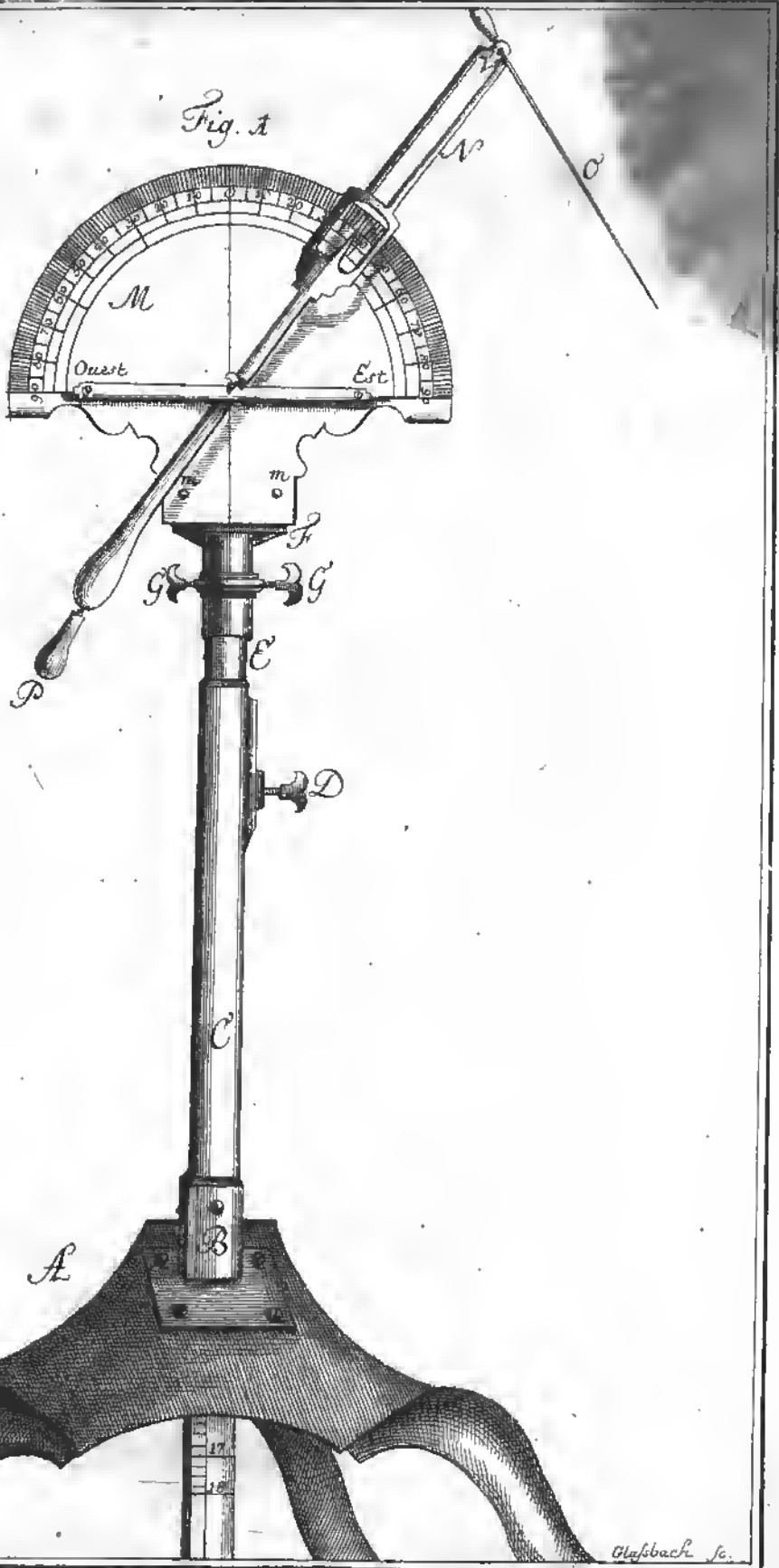
d'un pied & demi & diviſé en pouces, qu'on peut hauſſer & baiſſer en le paſſant par un trou convenable du pied, & qu'on fixe après cela dans ſon étui B par *la vis* D. Ce parallelepipede porte en haut *un cilindre creux* E large d'un demi-pouce, & profond d'un pouce, qui y eſt ſoudé & dans lequel on peut tourner le *cilindre ſolide* F, & après cela le fixer par *les deux vis* G.

Au bout de ce cilindre ſolide F eſt ſoudé un *étui horizontal* H long d'un pouce & large d'un demi-pouce, pour recevoir le *parallelepipede* F, de cinq pouces de longueur, qu'on y peut avancer & reculer & fixer par *la vis* R. A l'une des extrémités du parallelepipede ſe trouve une *platine quarrée* L d'un pouce & demi, à laquelle on applique, à l'aide de deux petites vis, le tranſporteur. (Voyez les pieces F, H, I, R, & L, dans la ſeconde Figure, parce qu'elles ſont couvertes par le tranſporteur dans la premiere.)

Le *Tranſporteur* M a ſix pouces en diametre, & il eſt diviſé à chaque côté en 90 degrés, & marqué avec l'*Eſt* & l'*Oueſt;* les *points m, m,* ſont les deux vis par leſquelles il eſt fixé à la platine ſusdite L, Fig. 2de. Dans ſon centre ſe trouve l'*Indice* N, dont la figure donne l'idée ſuffiſante; il eſt mobile ſur ſon axe d'acier très poli, en telle ſorte qu'il ne touche pas immédiatement la ſurface du tranſporteur, c'eſt pourquoi on a ſoudé, autour du trou par lequel l'axe paſſe, un petit anneau, de trois lignes de diametre, & d'une demi-ligne d'épaiſſeur, afin que la friction ſoit auſſi petite qu'il eſt poſſible. Par l'extrémité large de l'Indice, avec laquelle il montre les degrés, paſſe horizontalement *un ſtilet rond* O, de quatre pouces de longueur & qui doit être très roide; en arriere ce ſtilet eſt fermé par une petite boule, qui doit être de même peſanteur avec ce ſtilet, afin que l'Indice ſoit toujours parallele à la ſurface du tranſporteur. C'eſt par l'attouchement du ſtilet que la plante met en mouvement l'Indice. A l'autre extrémité de l'indice eſt appliquée par une vis *la petite boule* P, pour rendre cette branche, qui eſt une fois plus courte que l'autre, de même peſanteur, & même de quelques grains plus peſante, afin que l'indice rebrouſſe de ſoi-même, quand la direction de la plante s'approche de la perpendiculaire. Il ſera même à propos d'avoir en reſerve deux autres boules plus peſantes que celle-ci; on doit pourtant prendre garde que le poids de l'indice tout entier ne ſurpaſſe par une once & demie.

Toutes les parties, excepté le pied, ſont de cuivre jaune; mais l'exactitude de l'inſtrument deviendroit ſans contredit plus grande, ſi on faiſoit faire l'Indice tout entier d'acier; de même les plus petites variations des plantes deviendroient plus ſenſibles, ſi on vouloit augmenter la grandeur du tranſporteur, parce qu'on pourroit alors ſubdiviſer aiſément ſes degrés plus grands.

OBSER-



Mem. de l'Acad. Tome XXI: 1765 Pl. I. A, pag. 90.

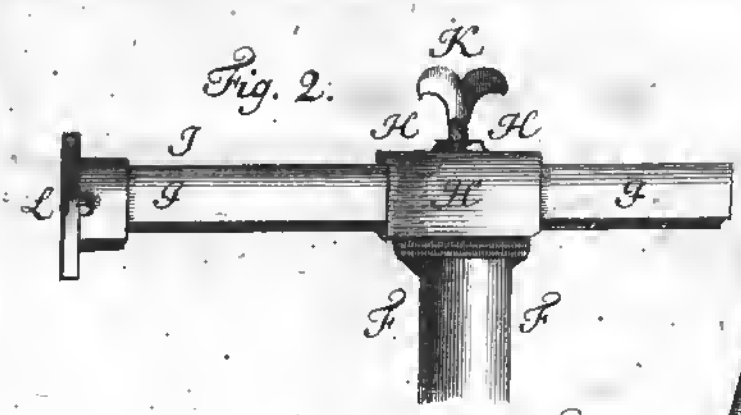


Fig. 2.

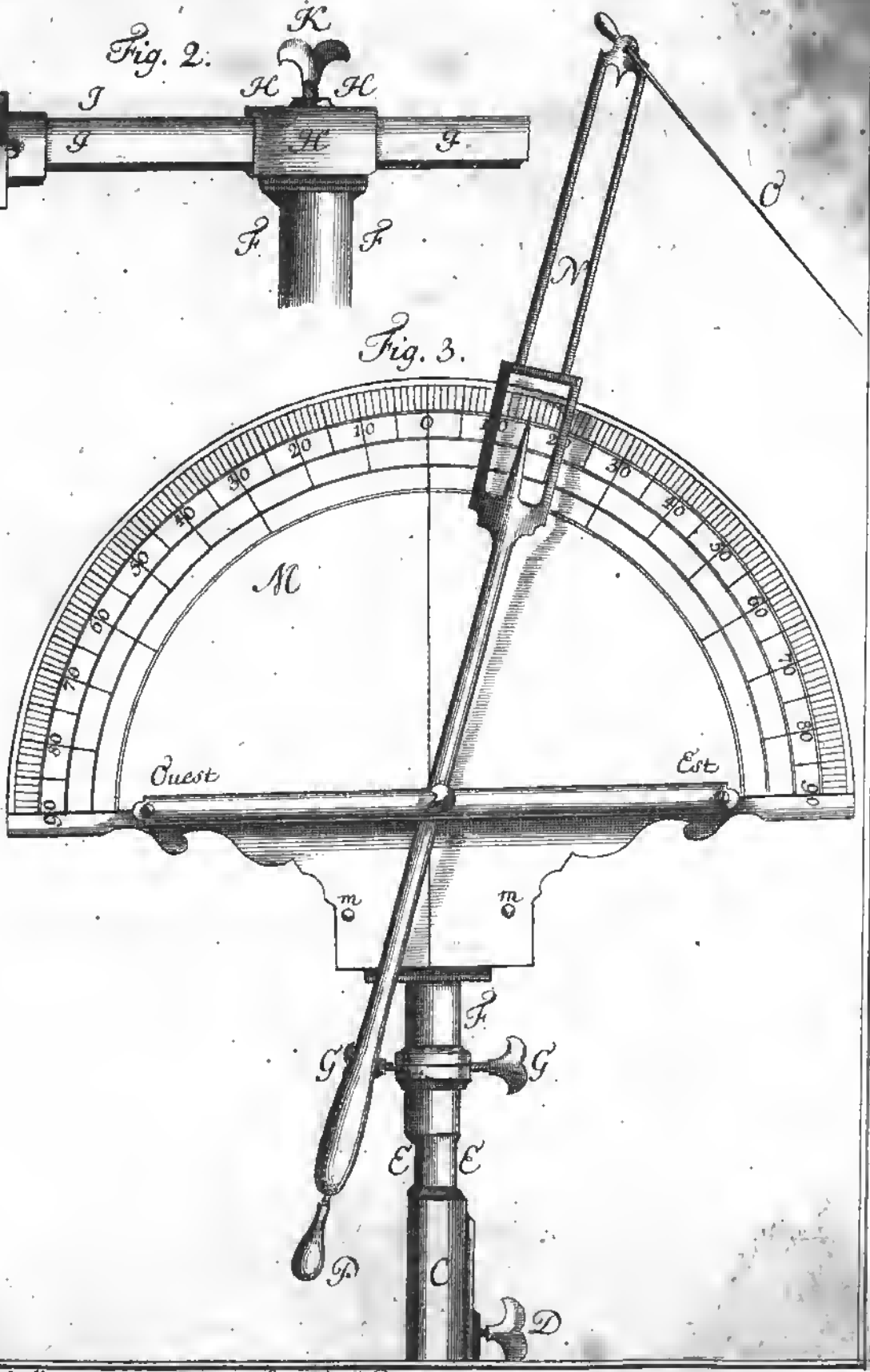


Fig. 3.

OBSERVATIONS ANATOMIQUES

SUR

LA GLANDE PINEALE, SUR LA CLOISON TRANSPARENTE, ET SUR L'ORIGINE DU NERF DE LA SEPTIEME PAIRE.

PAR M. MECKEL.

Traduit du Latin.

Il eſt difficile, je l'avoue, d'ajoûter de nouvelles découvertes à celles qui ont été faites par rapport au cerveau, à moins qu'on ne veuille enviſager ſous ce point de vue une connoiſſance plus particuliere de la ſtructure du cerveau qui a été généralement ignorée jusqu'ici; la Nature, au moyen de la compoſition extrêmement ſubtile de ce viſcere, l'ayant presque tout à fait ſouſtrait à la connoiſſance humaine, ou du moins ne ſemblant réſerver cette connoiſſance qu'aux derniers ſiecles. Auſſi, ni le nombre de ceux qui ont travaillé ſur ce ſujet, ni les ſecours qu'ils ont eus & les moyens qu'ils ont inventés, n'ont encore rien produit qui puiſſe conduire directement à ce but. Cependant l'induſtrie des Anatomiſtes modernes prouve qu'il y a de nouvelles découvertes poſſibles quant à la figure des parties du cerveau & à leur cohéſion : ils ont mis dans un plus grand jour ce qui concerne les valvules médullaires dans le quatrieme ventricule, les protubérances collatérales des ventricules tricornes, & bien d'autres choſes, ſans parler des origines des nerfs. Et même, quant à ces parties du cerveau qui ont été conſtamment regardées comme les plus dignes d'attention, on ne ſauroit poſer pour régle qu'elles

en ſont d'autant mieux connues. En effet, s'il y a une petite partie dans le cerveau à qui convienne la prérogative d'avoir été l'objet des recherches les plus exactes, c'eſt ſans contredit la glande pinéale, à cauſe de la fiction de Descartes ſuivant laquelle elle ſeroit regardée comme le ſiege de l'ame: & ce nonobſtant, les liens de ſa coheſion avec le cerveau ne ſont encore rien moins que bien connus. On apperçoit aſſez aiſément qu'elle tient aux couches des nerfs optiques, par le moyen des funicules médullaires cylindriques, qui ſe portent en avant de la baſe de cette glande pinéale (Fig. lett. A.) vers les couches des nerfs optiques; on découvre, dis-je, cette liaiſon ſans peine, pourvu qu'on ſache enlever de deſſus cette glande le plexus choroïde impair, & la grande veine du cerveau, dite de Galien, qui la couvre, avec aſſez de circonſpection pour que la glande demeure entiere & immobile dans ſa ſituation, les petits vaiſſeaux qui l'envelopent comme un réſeau étant adroitement diſſéqués; leſquels vaiſſeaux deſcendant du plexus choroïde à la pie-mere, garniſſent ce qu'on nomme l'eminence quadrijumelle ou les tubéroſités nommées *nates* & *teſtes*, & la glande pinéale elle-même. Alors il paroit que ces funicules s'enfoncent dans la ſubſtance médullaire même des couches optiques, qu'ils y continuent, & qu'ils ſont même aſſez forts, ayant pour l'ordinaire l'épaiſſeur d'une ligne. (Fig. lett. D.D.)

Ceux donc qui, dans leurs Ecrits, ont parlé des filamens nerveux qui lient la glande pinéale aux couches des nerfs optiques, comme d'une choſe rare, n'ont eu ques des connoiſſances fort imparfaites à cet égard. Tel a été le cas de Vieuſſens *) & de quelques autres. Bien plus, ceux qui n'ont pas eu le ſecours d'Obſervations réitérées, ont révoqué en doute cette liaiſon de la glande avec les couches, parce qu'en diſſéquant le cerveau mol & dans un état de diſſolution, ils ont enlevé cette glande avec le plexus choroïde impair. Il eſt donc certain que le baſe de cette glande eſt toujours attachée de part & d'autre par des péduncules médullaires aux couches des nerfs optiques, & qu'elle eſt ainſi continuée dans leur ſubſtan-

*) *Neurographie* p. 71.

ſubſtance. Mais, en y regardant de plus près, on voit qu'elle a toujours une autre connexion médullaire plus large avec la commiſſure poſtérieure du cerveau. En effet, la glande pinéale fait ſortir de ſa baſe, entre les péduncules, une lame médullaire qui lie entr'eux les péduncules qui procedent de part & d'autre de la baſe de cette glande. Cette lame blanche médullaire (qu'on peut fort bien voir dans l'une & l'autre Figure, Lett. C.) s'étant un peu élargie, & deſcendant en arriere, continue & s'inſere dans ce faiſceau cylindrique médullaire, qu'on appelle la commiſſure poſtérieure du cerveau (Fig. Lett. B.) De cette façon la glande pinéale, au moyen de la lame médullaire ſusdite, tient d'une maniere plus étendue à cette commiſſure poſtérieure du cerveau, tandis qu'elle eſt conſtamment attachée par les funicules médullaires aux couches des nerfs optiques. J'ai cru que, pour rendre cette découverte plus claire, on ne pouvoit ſe paſſer du ſecours des Figures ci-jointes, dont la premiere repréſente la glande dans ſa ſituation naturelle, placée ſur les nates, vue par devant, où l'on apperçoit auſſi le troiſieme ventricule ouvert entre les couches des nerfs optiques, & la lame médullaire C qui paroit continuée de la baſe A de la glande pinéale jusqu'à la commiſſure poſtérieure du cerveau B, d'une façon ſi immédiate, qu'elle va ſans interruption s'engager droit dans cette commiſſure. La ſeconde Figure montre la glande pinéale A renverſée, & la lame médullaire C ſortant de ſa baſe, en ſorte que la ſubſtance même plus épaiſſe de la baſe de la glande s'éleve au deſſus de cette lame médullaire; & la continuation auſſi bien que l'inſertion de ladite lame dans la ſurface antérieure de la commiſſure antérieure du cerveau B, vers le quatrieme ventricule, s'offrent évidemment à la vue; & l'on ne voit pas moins diſtinctement ſous la glaode même renverſée, les nates, les teſtes, la raye transverſale du cerveau & ſa grande valvule. Cette liaiſon de la glande pinéale a échapé, entre pluſieurs autres, à l'induſtrie de *Turin*, qui a pourtant fait une revue fort exacte du cerveau, & qui, dans l'Ouvrage très utile qu'il a donné ſous le titre d'*Adverſaria Anatomica*, repréſente fort bien, quoiqu'un peu trop

en petit, la liaiſon de la glande par le moyen des péduncules médullaires, mais omet entierement celle qui va aboutir à la commiſſure.

Quant à la ſtructure même de cette glande, il m'eſt arrivé rarement, dans le très grand nombre de cerveaux que j'ai diſſéqués, de n'y pas trouver de petits cailloux ou des grains de ſable. La Figure en offre deux qui ſont attachés à la baſe dans la ſurface antérieure de la glande (Fig. 1. Lett. b.b.) & cela ſe rencontre non ſeulement dans ceux qui ont eu l'eſprit dérangé, mais également dans ceux qui ont jusqu'à la fin de leur vie joui de l'uſage de la raiſon. Je n'y trouve rien de ſurprenant; car il eſt de la nature de la lymphe, lorsqu'elle eſt en état de ſtagnation, d'engendrer de ſemblables corps pierreux; & notre glande qui eſt entourée de toutes parts de vaiſſeaux lymphatiques, eſt encore plus expoſée à cette ſtagnation que les autres parties corticales du cerveau. Cependant je ne l'ai jamais trouvée purement pierreuſe.

Une autre partie du cerveau, dont j'entreprens de donner une connoiſſance plus diſtincte, c'eſt la cloiſon tranſparente avec la voûte, dont il s'agit d'expoſer la nature de façon qu'on voye évidemment s'il y a, ou non, une connexion des ventricules tricornes entr'eux & avec le troiſieme. On trouve de grandes différences dans les deſcriptions de cette cloiſon & de cette voûte, qui ont été fournies par les Auteurs, & par ceux même qui ont le plus de ſavoir & d'habilité: ce qui m'a engagé à prendre d'autant plus de peine pour découvrir la vérité par des obſervations réitérées ſur pluſieurs cerveaux, & pour donner une deſcription qui y ſoit ſolidement fondée; ce qui ne peut manquer de faire plaiſir aux gens du métier. Il eſt néceſſaire d'entamer cette deſcription par la conſtitution de la cloiſon transparente, de façon qu'on puiſſe en inférer ce que c'eſt que la voûte, & quelle ſéparation exiſte entre les ventricules.

La cloiſon transparente eſt une double lame médullaire du cerveau, qui continue depuis la baſe du cerveau, entre les grands ventricules tricornes, ou entre les corps ſtriés & les couches des nerfs

nerfs optiques, ſe portant en haut vers la ſurface inférieure du corps calleux, ou pour mieux dire, deſcendant de la ſurface inférieure de ce corps ſuivant toute ſa longueur dans l'interſtice des parties ſusdites. Cette cloiſon étant détachée avec circonſpection de la ſurface du corps calleux, commence à ſon extrémité poſtérieure, de façon que les deux lames médullaires de la cloiſon, la droite & la gauche, ſont ſéparées l'une de l'autre de la diſtance d'environ un tiers de pouce. Ces lames, en deſcendant de cette extrémité poſtérieure, s'engagent dans ce qu'on nomme les jambes poſtérieures de la voûte. Conſervant toujours la même diſtance l'une de l'autre depuis leur extrémité poſtérieure, elles vont en continuant vers les couches des nerfs optiques. Depuis l'extrémité poſtérieure des couches, où ils s'écartent l'un de l'autre, les lames de la cloiſon ſont encore ſéparées; mais, quand vers le milieu de leur longueur les couches ſont plus proches l'une de l'autre, les lames auſſi deviennent convergentes jusqu'à ce qu'elles s'appliquent l'une à l'autre. Ainſi ces deux lames ſont ſéparées l'une de l'autre de plus de trois quarts de pouce à l'extrémité poſtérieure de la cloiſon; & la partie poſtérieure du plexus choroïde impair, ou troiſieme, dans l'endroit où il s'inſere dans la grande veine du cerveau, dite de Galien, eſt ſituée librement entre ces lames, depuis les couches jusqu'à la fin du corps calleux. Dans cet interſtice, de la ſurface inférieure du corps calleux la pie mere vaſculeuſe s'applique à la ſurface interne des lames de la cloiſon, & les revêt intérieurement jusqu'à leur extrémité antérieure. Les lames ſéparées, lorsqu'elles ſont parvenues environ au tiers de la longueur des couches, à commencer par leur extrémité poſtérieure, ſe réuniſſent entre les couches des nerfs optiques, & au moyen d'une raye médullaire longitudinale, mince & tranſparente, elles acquierent une cohérence qui des deux lames n'en fait qu'une, au lieu qu'auparavant elles deſcendent ſéparément de la ſurface inférieure du corps calleux, étant revêtues de la pie-mere. J'ai vu, dans le cerveau d'un inſenſé, ces lames de la cloiſon ſi éloignées entr'elles, depuis le corps calleux jusqu'à la raye médullaire qui réunit les lames par

embas,

embas, que cet interſtice ſe trouvoit rempli de lymphe. Ainſi la voûte n'exiſte pas comme corps médullaire triangulaire; ſeulement les lames médullaires de la cloiſon ſe rapprochent entre les couches, ſans former pour cela un corps médullaire triangulaire, mais il y a ſimplement une raye médullaire qui les réunit par embas. Cette réunion des lames de la cloiſon médullaire transparente par le moyen d'un petit faiſceau médullaire, ou d'une raye, ſe continue de l'extrémité antérieure des couches optiques jusqu'aux jambes antérieures de la voûte, auxquelles, après qu'elles ſe ſont jointes, les lames de la cloiſon s'attachent & s'incorporent; & dans cet endroit-là, les lames de la cloiſon ont plus de contiguité entr'elles que dans la partie poſtérieure où leur diſtance eſt plus grande. Auſſi eſt-il difficile de ſéparer les lames de la cloiſon l'une de l'autre dans cet endroit. Mais, à meſure que la cloiſon tranſparente avance, depuis le bord antérieur des jambes antérieures de la voûte jusqu'à l'extrémité antérieure du corps calleux, les lames de la cloiſon devenues plus larges s'écartent de nouveau l'une de l'autre, étant divergentes du côté antérieur, de façon qu'à l'extrémité antérieure la diſtance des lames de la cloiſon va à un huitieme de pouce, ces lames étant revêtues intérieurement & extérieurement de la pie-mere, & très faciles à ſéparer. Mais plus bas dans la même partie elles ſe réuniſſent & deviennent cohérentes au moyen de la ſubſtance médullaire, qui exiſte entre les corps ſtriés dans la partie antérieure des ventricules tricornes. Les lames médullaires de la cloiſon tranſparente qui deſcendent de l'extrémité antérieure du corps calleux, ſont donc ſéparées l'une de l'autre, & cela de façon que leur diſtance eſt la plus grande là où elles ſont adhérentes au corps calleux, & qu'en continuant depuis ce corps jusqu'aux jambes antérieures de la voûte elles prennent de la convergence. Cette partie de la cloiſon tranſparente ne repoſe pas ſur la voûte, mais elle eſt attachée de la longueur de ſix lignes ou de plus d'un demi-pouce, depuis les jambes antérieures de la voûte jusqu'à l'extrémité antérieure du corps calleux, à la ſubſtance médullaire des lobes antérieurs du cerveau qu'il réunit ici. Ainſi l'extrémité

anté-

antérieure de la cloiſon tranſparente eſt fermée dans cette partie du cerveau, parce que ſes lames deviennent ici adhérentes à la partie antérieure du corps calleux, là où il ſe termine dans la moëlle des lobes antérieurs du cerveau ; mais l'extrémité poſtérieure étant ouverte entre la lame droite & la gauche, laiſſe un paſſage à la pie-mere pour arriver à la ſurface intérieure des lames de la cloiſon. De cette façon il n'y a point de *pſalter*, ou d'eſpace, où les jambes poſtérieures de la voûte ſe réuniſſent & deviennent cohérentes par des fibres longitudinales médullaires, à moins qu'on ne veuille, en renverſant le cerveau, & après avoir coupé les jambes poſtérieures du cerveau, la cloiſon tranſparente demeurant adhérente à la ſurface inférieure du corps calleue, conſidérer la choſe comme ſi le corps calleux même repréſentoit par cet endroit de ſa ſurface la möelle ſtriée qui ſe trouve placée entre l'intervalle des lames de la cloiſon tranſparente. Il en eſt de même à l'égard de la voûte, dès qu'on voudra donner le nom de corps médullaire à une partie médullaire ſolide triangulaire. En effet les lames médullaires de la cloiſon tranſparente ſéparées l'une de l'autre du côté poſtérieur, en deſcendant du corps calleux, de part & d'autre au deſſus de la ſurface convexe des couches des nerfs optiques en dehors, depuis le troiſieme plexus choroïde intermédiaire, prennent une telle expanſion, que s'étendant au deſſus des couches, à la pointe aigue qui forme leur limite extérieure, elles conſtituent cette partie du cerveau, qu'on nomme de part & d'autre les jambes poſtérieures de la voûte, étant continuées dans les corps bordés ou *corpora fimbriata* du cerveau & dans les grandes cornes d'Ammon. Mais, vers la partie antérieure des couches, les lames médullaires de la cloiſon conſtituent par embas de part & d'autre un filet médullaire ſéparé, aſſez épais, étant ſeulement réunies plus bas encore par la raye médullaire ſusdite; de ſorte qu'il faut compter deux parties de la voûte, depuis les jambes antérieures jusqu'aux poſtérieures jointes entr'elles par une petite lame, ou raye médullaire. Leur figure de part & d'autre eſt triangulaire, l'une des ſurfaces, ſavoir l'inférieure étant concave vers les couches des nerfs optiques,

l'autre ſupérieure répondant à la ſurface intérieure du corps calleux, où la cloiſon a une adhérence intérieure ; & la troiſieme intérieure plus plane, étant continue à la ſurface interne des lames de la cloiſon tranſparente, toutes ces ſurfaces ſe regardant l'une l'autre là où elles ſont unies entr'elles à l'extrémité de leur bord par la raye médullaires. Sous ces parties de la voûte, au delà de la ſurface convexe des couches, les plexus choroïdes latéraux ſont continués en dedans vers le milieu, comme une pie-mere très vaſculeuſe : ce qui a été parfaitement repréſenté d'après nature par mon illuſtre Maître, M. *de Haller*, dans la ſeconde Planche du ſeptieme Recueil de ſes *Icones Anatomicæ*. Mais là où les lames de la cloiſon tranſparente deviennent cohérentes par embas, près des jambes antérieures de la voûte, & ſéparées par en haut à leur iſſue du corps calleux, ſe trouve l'endroit ſitué entre l'extrémité antérieure des couches des nerfs optiques & le commencement antérieur de la voûte; où, ſous la voûte, de part & d'autre, au delà des couches, les plexus choroïdes qui deſcendent, ſe réuniſſent; & c'eſt là auſſi où la lymphe raſſemblée dans l'hydropiſie des ventricules du cerveau, perce & ſe fait un paſſage contre nature des ventricules tricornes dans le troiſieme; car il n'y a point là d'ouverture naturelle, ni aucune connexion entre le troiſieme ventricule, & les grands ventricules dits tricornes. Par le moyen donc de la cloiſon tranſparente, l'un des ventricules tricornes eſt parfaitement ſéparé de l'autre, de façon qu'il n'y a aucune communication de l'un dans l'autre. Ce qu'on nomme la voûte n'égale pas non plus toute la longueur des ventricules tricornes; mais cette voûte eſt plus courte que la cloiſon tranſparente d'un demi-pouce; car cette partie de la cloiſon qui eſt entre les jambes antérieures de la voûte, & l'extrémité antérieure du corps calleux, & qui eſt auſſi la partie antérieure de la cloiſon, repoſe ſur le cerveau, & non ſur la voûte.

Par rapport à la largeur de la cloiſon, ou plutôt à ſa hauteur, entre le corps calleux, & la région longitudinale qui eſt au milieu des grands ventricules, elle n'eſt pas égale partout? En effet ſa partie anté-

térieure, entre les couches des nerfs optiques, & l'extrémité antérieure du corps calleux, eſt conſtituée par des lames médullaires plus larges qui s'appuyent les unes contre les autres de la largeur de 4 lignes, entre l'extrémité antérieure des couches optiques, & de ſept lignes entre l'extrémité antérieure des corps cannelés; au lieu que ces lames ſont de 3 lignes & demie entre la convexité des couches & la ſurface inférieure du corps calleux, & tout à fait courtes de 3 lignes ſeulement à la partie poſtérieure; de ſorte que, depuis les parties poſtérieures juſqu'aux antérieures, cette cloiſon s'élargit toujours davantage de ſon extrémité poſtérieure vers ſa fin antérieure.

La troiſieme Obſervation que j'ajoute aux précédentes, a pour objet l'origine du nerf mol de la ſeptieme paire, ou de celui des nerfs du cerveau qu'on nomme acouſtique. Les Savans les plus verſés dans la connoiſſance du corps humain, ont été juſqu'ici, par rapport à l'origine de ce nerf, dans l'idée que cette portion molle de la ſeptieme paire des nerfs du cerveau procédoit du quatrieme ventricule du cerveau, renfermé dans le cervelet & dans la moëlle allongée, par des fibres médullaires blanches, qui ſortoient transverſalement de ce qu'on nomme dans ce ventricule *calamus ſcriptorius*, ou *raye longitudinale;* leſquelles fibres différent en nombre & en grandeur, & forment, ſuivant cette hypotheſe, en avançant extérieurement vers le haut, le nerf mol qui n'en eſt qu'une continuation. Cette diſcuſſion m'a engagé à conſidérer la choſe plus attentivement dans un grand nombre de cerveaux d'inſenſés, qui ſont plus durs que les autres. Il eſt vrai que cette ſubſtance tout à fait molle du nerf acouſtique, ſe ſoultrait presque entierement aux recherches les plus exactes dans les cerveaux d'une conſtitution naturelle, & qu'au moindre attouchement elle s'écoule avec tant de facilité, que la découverte de l'origine & du progrès de ce nerf dépend moins de l'induſtrie de celui qui s'y applique que de la nature & de l'état du cerveau. En y regardant donc de plus près dans les cerveaux que j'ai indiqués, j'ai obſervé que ce nerf mol de la ſeptieme paire tiroit principalement ſon origine du bord poſtérieur du pont du Varole, ou plutôt des péduncules du cervelet;

mais par un filet différent & ſéparé de la portion dure de ce nerf acouſtique, en ſorte que la portion molle étant la plus proche du cervelet ſort par une origine large du péduncule du cervelet qui conſtitue le pont de Varole, & qu'à la diſtance d'une ligne, ou de la dixieme partie d'un pouce, la portion plus petite, qu'on appelle dure, procede de la partie la plus voiſine de la moëlle allongée du bord poſtérieur du pont de Varole. Je conſerve pluſieurs ſemblables cerveaux dans de l'eſprit de vin; & leur inſpection ſuffit pour mettre ſous les yeux la vérité de ce que j'avance. La Figure ci-jointe, tracée d'après nature, déſigne de la maniere la plus exacte cette origine de la portion molle Lett. A, & celle de la portion dure Lett. B. Mais j'ai vu le *calamus ſcriptorius* du quatrieme ventricule, quelquefois tout à fait dépourvu de fibres blanches transverſales, & dans d'autres ces fibres ſe terminant dans la moëlle allongée même, tandis qu'il y en a qui ſe réfléchiſſent autour de cette moëlle, & parviennen. jusqu'à l'endroit des péduncules du cervelet, d'où ce nerf mol tire de part & d'autre ſon origine.

EXPLICATION DES FIGURES.

Figure I.

Repréſentation de quelques parties du cerveau, depuis le côté antérieur, ou le front, juſqu'au côté poſtérieur.

A, La glande pinéale, dans ſa ſituation naturelle, au deſſus des *nates*, derriere la commiſſure poſtérieure du cerveau.

B, La commiſſure poſtérieure du cerveau.

C, La lame médullaire blanche qui lie la baſe de la glande pinéale avec cette commiſſure.

DD. Les péduncules de la glande pinéale.

EE. Les *nates*.

FF. Les *teſtes*.

G. La raye transverſale du cerveau.

a, l'origine du nerf de la quatrieme paire de cette raye transverſale.

H. La grande valvule du cerveau.

II, Les couches des nerfs optiques.

Fig. I.

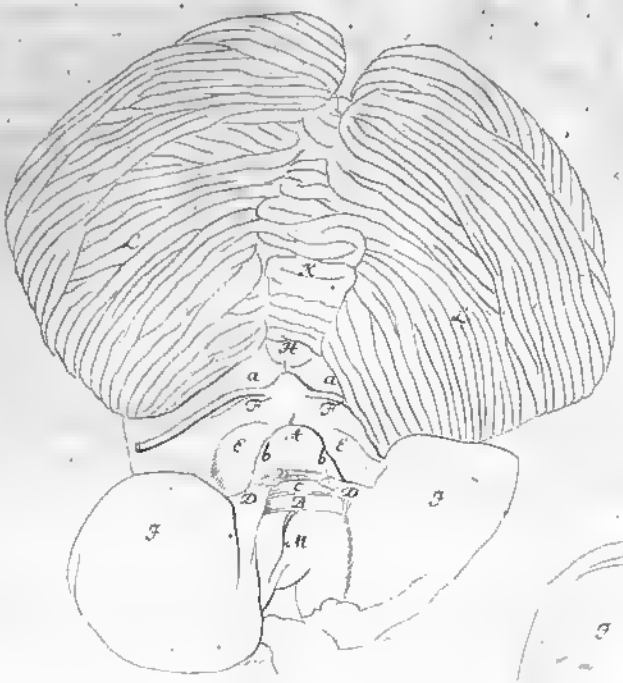


Fig. II.

Fig. III.

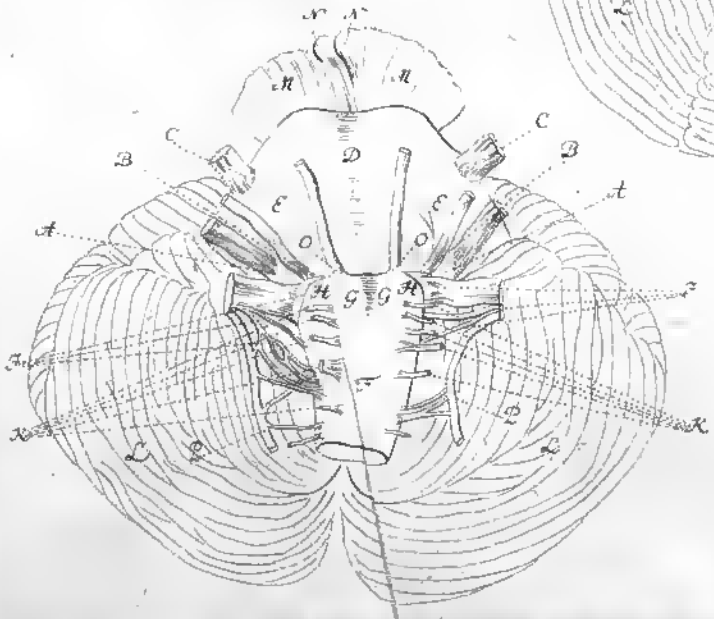


Fig. I.

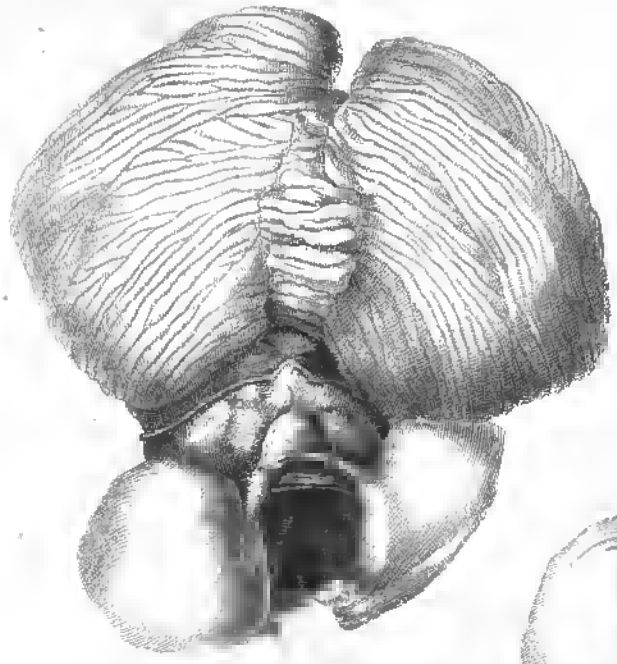


Fig. II.

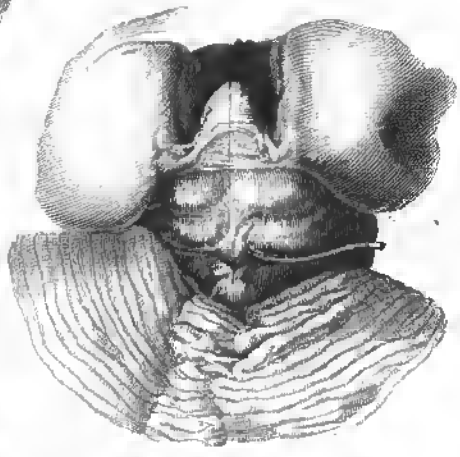
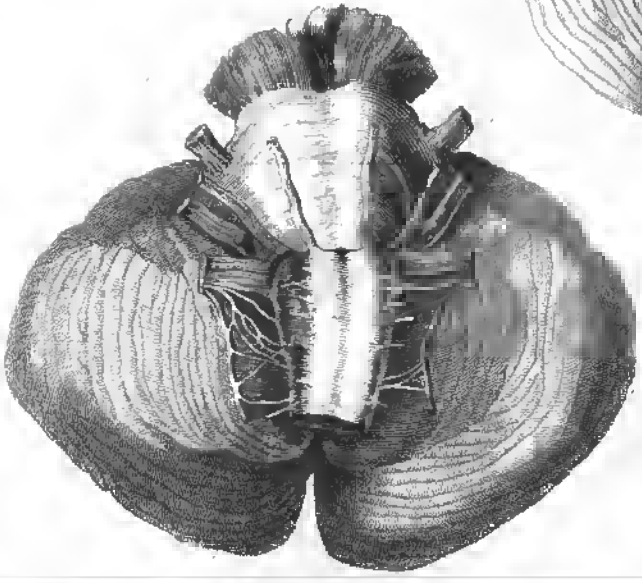


Fig. III.



Mem. de l'Acad.re des Tome XXI. Pl. 2. b. pag. 101.

Jos. Hoppler, del. et sculp.

D. Berger Sc. Berolini.

K, Le lobe vermiforme du cervelet.
LL, Partie des lobes latéraux du cervelet.
M, Le troiſieme ventricule.

Figure II.

Repréſentation de l'état de quelques parties du cerveau vû par derriere, c'eſt à dire, de l'occiput vers le front.

A, La glande pinéale renverſée de derriere en devant, & foulevée des *nates* vers le ventricule, de façon que la lame qui la joint avec la commiſſure s'offre d'autant mieux aux regards.
B. La commiſſure poſtérieure du cerveau.
C, La lame médullaire qui deſcend de la baſe de la glande pinéale dans cette commiſſure.
DD, Les peduncules de la glande pinéale recourbés avec la glande.
EE, Les *nates*, auxquelles la glande pinéale tient naturellement, vues à nud.
FF, Les *teſtes*.
G, La raye transverſale du cerveau.
a, L'iſſue du nerf de la quatrieme paire de cette raye.
H. La grande valvule du cerveau.

Le reſte comme dans la Figure précédente.

Figure III.

A, L'origine du nerf mol de la ſeptieme paire.
B, L'iſſue du nerf dur de la ſeptieme paire.
C. Le nerf de la cinquieme paire.
D. Le pont de Varole.
E. Les péduncules du cervelet qui par leur concours forment ce pont.
F. La moëlle allongée.
GG, Les corps pyramidaux de la moëlle allongée.
HH, Ses corps olivaires.
II, L'iſſue du nerf de la huitieme paire.
KK. Les fibres du nerf de la neuvieme paire.
LL. Partie des lobes du cervelet.

MÉMOIRE

SUR

LA RÉSISTANCE DES FLUIDES AVEC LA SOLUTION DU PROBLEME BALISTIQUE.

PAR M. LAMBERT.

§. 1.

La théorie du mouvement des corps dans un milieu réſiſtant eſt un de ces ſujets, dont la phyſique nous préſente un grand nombre. Elle eſt d'une utilité manifeſte, puisque la perfection de l'art de jetter les bombes en dépend. Elle eſt compliquée dans ſes principes, puisque les milieux étant ſuppoſés fluides, il faudroit avoir égard au mouvement de chaque particule du fluide, dont on cherche la réſiſtance. Et ſi, en n'en conſidérant que la ſomme, on parvient à découvrir une loi, ſinon exacte à toute rigueur, du moins tolérable en ce qu'elle ne s'écarte pas conſidérablement de l'expérience, on eſt encore bien éloigné du but auquel on ſe propoſe de parvenir. Il s'agit d'y appliquer le calcul, afin d'en tirer des formules ſimples & facilement applicables: difficulté, qu'il n'eſt pas ſi facile de ſurmonter. Et quand même on pourroit le faire, il s'agit encore de vérifier par des expériences les conſéquences & les regles, que le calcul nous fournit. Car les principes employés pour cet effet, n'étant vrais qu'à peu près ou en gros, on court riſque que ce qu'on en déduit par le calcul, s'éloigne encore d'avantage de la parfaite préciſion à laquelle il faudroit pouvoir parvenir.

§. 2. Je ne retracerai pas ici l'hiſtoire de ce qu'on a fait à cet égard. On ſait qu'un corps peſant étant projetté obliquement dans un eſpace vuide d'air avec une viteſſe quelconque, parcourt une parabole,

bole, & qu'il affecte pour ainſi dire de parcourir cette courbe dans l'air même, dès qu'il ne ſe meut pas avec une très grande viteſſe, & que ſa gravité ſpécifique ſurpaſſe celle de l'air pluſieurs centaines de fois. En effet, la denſité de l'air étant ſi peu conſidérable, il eſt aiſé d'en conclure, que ſa réſiſtance ne ſauroit être fort grande. Mais, comme cette réſiſtance s'augmente en raiſon du quarré de la viteſſe, ou peut être encore plus fortement, elle devient très grande dans le cas où la viteſſe égale celle des bombes & des boulets de canon. De là vient que les regles qu'on donne pour les jets paraboliques, ne ſont d'aucun uſage pour l'artillerie, & que, ſi elles ont quelque élégance, on ne peut les conſidérer que comme des propriétés remarquables des paraboles. C'eſt dommage en effet qu'on ne puiſſe les y employer, & qu'il faille y ſubſtituer des formules, qui n'offrent que des quantités logarithmiques, circulaires ou tranſcendentes, de façon qu'il faut ſe contenter, quand on peut parvenir à les exprimer par des ſuites infinies, qui ſoient encore paſſablement convergentes. On peut juger des difficultés qui s'y rencontrent, dès qu'on ſait que *Newton*, après avoir donné les principes & les regles pour les cas les plus ſimples, abandonna la ſolution du probleme principal; que feu M. *Jean Bernoulli* ne la donna que ſous la condition de *conceſſis quadraturis;* & que M. *Euler*, au lieu de donner les formules intégrales, ſe contenta d'une approximation, en ſubſtituant des lignes droites aux petites parties de l'arc, que la bombe parcourt, & en ſubſtituant de la ſorte à la véritable courbe une eſpece de poligone, dont on pouvoit déterminer la longueur & la poſition de chaque côté, du moins à très peu près.

§. 3. A ces difficultés qu'offre le calcul, ſe joignent celles qu'on rencontre dans l'examen des principes & dans la maniere de les examiner par des expériences. On eſt aſſez généralement d'accord, que la réſiſtance eſt en raiſon du quarré des viteſſes, mais on ne ſe rencontre pas ſur la queſtion, s'il faut prendre ce quarré double ou ſimple, & ſi pour les grandes viteſſes il ne faut pas encore y joindre le rapport du cube, du biquarré, ou de quelques puiſſances plus élevées

vées de la viteſſe. S'il étoit facile de faire & de varier les expériences de toutes les façons qu'on pourroit ſouhaiter, cette difficulté ſeroit bientôt levée. On n'auroit qu'à exprimer l'effet de la réſiſtance par une ſuite, qui procede ſuivant toutes les dimenſions ou puiſſances de la viteſſe, & en déterminer les coëfficiens, & par ce moyen on auroit cet effet tel qu'il eſt du à toutes les cauſes qui peuvent y influer. De la ſorte il ne reſteroit plus à ſurmonter que les difficultés & les embarras du calcul.

§. 4. Mais ces ſortes d'expériences ne ſont pas ſi faciles à faire. On laiſſa tomber des boules & des veſſies fort legeres du haut d'une tour, & on obſerva le tems de la chûte. Ce tems & la hauteur étant donnés, de même que le volume & le poids de la boule, on en déduiſit le coëfficient, qui diviſe ou multiplie le quarré de la viteſſe. Mais cette viteſſe n'étant pas fort grande, on reſte en doute, ſi pour des viteſſes plus conſidérables ce ſeul coëfficient ſuffit. Les expériences faites à Petersbourg ne décident point cette queſtion. On tira avec différentes charges un boulet d'un canon verticalement élevé, & on compta les ſecondes de tems, que le boulet employoit à monter & deſcendre. Ce tems ne pouvoit donner tout au plus que la viteſſe initiale; & pour la trouver, il falloit ſuppoſer, que la réſiſtance de l'air ſuit le quarré des viteſſes. Si on avoit pu obſerver ſéparément le tems de la montée, celui de la chûte, & la hauteur à laquelle le boulet parvint, il y auroit eu moyen d'examiner, ſi le quarré de la viteſſe ſuffit, ou bien s'il faut employer le cube, le biquarré &c. Peut-être pourroit-on refaire cette expérience, en élevant un mortier verticalement, & en ne le chargeant que d'un boulet de bois ou d'une autre matiere fort legere, & ſur laquelle la réſiſtance de l'air ait plus de priſe. Mais l'expérience qui fut faite ici le 15 Juin de l'année paſſée a beaucoup plus d'avantages, ſi elle peut être faite avec plus de ſoin, & ſi on arrange d'avance les préparatifs, qu'elle exige. Comme par là on peut déterminer autant de points que l'on veut, de la courbe que la bombe parcourt, il ſera enſuite facile d'en déduire le tems & la viteſſe pour chaque point de la courbe. Il ſeroit même poſſible de faire

re en ſorte, qu'un certain nombre de ces expériences étant fait, on en puiſſe immédiatement déduire des tables pour l'uſage des bombardiers. Car chaque courbe déterminée de cette façon tient lieu de toutes celles où la bombe, ſous un moindre angle d'élévation, auroit eu un degré déterminé de viteſſe.

§. 5. Ces remarques préliminaires font voir, à peu près, où nous en ſommes, & qu'il n'eſt pas ſi hors de propos de reprendre depuis les premiers commencemens la théorie dont il eſt ici queſtion. Il s'y joint encore une autre raiſon, qui me détermine à en agir de la ſorte. Car, en employant les mêmes lettres dans tous les calculs que je vais expoſer, on ſe trouvera mieux en état de faire la comparaiſon des différens cas que cette théorie préſente, & de voir juſqu'où ceux qui ſont plus compliqués peuvent ſe réduire aux plus ſimples. Je tâcherai de rendre cette comparaiſon plus facile en ce que je ne me bornerai pas à ne donner que des formules algébriques, mais qu'après les avoir expoſées, je les traduirai dans le langage ordinaire, toutes les fois qu'elles auront quelque élégance ſuſceptible d'une ſemblable traduction, ou que je pourrai les raccourcir & les ſimplifier juſqu'à leur donner cette élégance.

§. 6. Soit donc AB une ligne droite dans laquelle ſe meuve un corps ſphérique. Que la viteſſe initiale en A ſoit $= G$, que le corps dans un tems $= \tau$ ſoit parvenu en P, & que la viteſſe qui lui reſte encore ſoit $= c$. Soit enfin l'eſpace parcouru AP $= x$. La viteſſe en P étant $= c$, le corps pourroit parcourir dans un tems infiniment petit $d\tau$, l'eſpace Pq. Mais, comme il eſt retardé par la réſiſtance du milieu, il ne parcourt en effet que l'eſpace Pp, qui ſera par conſéquent $= dx$. Or l'effet de la retardation, qui eſt $= pq = ddx$, eſt proportionel au quarré de la viteſſe. Car, pour aller du plus ſimple au plus compoſé, je m'en tiendrai à cette condition dans les premiers calculs que je vais propoſer. Nous aurons donc $-ddx \propto cc$, & pour réduire cette analogie à l'égalité, nous introduirons un coëfficient a tel qu'il ſoit

Planche III. Fig. 1.

$$-ddx = cc d\tau^2 : a.$$

§. 7. Je remarquerai d'abord, que cette équation ſe réduit à des nombres abſolus, quand on fixe les unités auxquelles les lettres x, c, τ ſe rapportent. J'exprimerai donc les tems τ en minutes ſecondes, les eſpaces parcourus x en pieds du Rhin, & les viteſſes c par les eſpaces qu'un corps mu uniformément avec ces viteſſes pourroit parcourir en une minute ſeconde de tems. Ce qui étant établi, il s'enſuit que la lettre a exprime une ligne droite, & que par là même elle pourra être comparée avec le diametre du corps dont il s'agit de calculer le mouvement. La ſuite du calcul nous donnera lieu de la rendre intelligible encore de diverſes autres façons.

§. 8. Reprenant donc l'équation

$$-ddx = cc d\tau^2 : a,$$

nous pourrons exprimer l'eſpace ddx encore d'une autre maniere. Car il eſt

$$dx = c d\tau,$$

& partant

$$ddx = dc d\tau,$$

ce qui étant ſubſtitué nous donne

$$-dc.d\tau = cc d\tau^2 : a,$$

ou bien

$$-\frac{dc}{cc} = \frac{d\tau}{a},$$

d'où on tire l'intégrale

$$\frac{a}{c} - \frac{a}{G} = \tau.$$

La conſtante $a : G$ eſt telle que τ ſoit $= 0$, lorsqu'il eſt $c = G$.

§. 9. Cette formule, qui exprime le rapport entre le tems & la viteſſe, nous fait voir que ce rapport eſt ſimplement réciproque, & que, quand même la viteſſe initiale G ſeroit infinie, il ne faudra qu'un

qu'un tems fini $a : c = \tau$, pour qu'elle devienne auſſi petite que l'on voudra. Le changement des grandes viteſſes étant donc ſi rapide, il s'enſuit, comme nous l'avons remarqué ci-deſſus, que la réſiſtance du milieu n'eſt pas une choſe dont on puiſſe faire abſtraction, ſans s'aſſurer préalablement de la quantité de ſon effet.

§. 10. L'équation trouvée

$$-\frac{dc}{cc} = \frac{d\tau}{a},$$

ſe change ſans peine en

$$-\frac{dc}{c} = \frac{c\,d\tau}{a} = \frac{dx}{a},$$

ce qui donne l'intégrale

$$\log \frac{G}{c} = \frac{x}{a}.$$

Cette formule, qui exprime le rapport entre la viteſſe & l'eſpace parcouru, fait voir que la viteſſe décroît en progreſſion géométrique tandis que l'eſpace parcouru croît en progreſſion arithmétique. On auroit pu commencer le calcul par cette conſidération. Car le corps parcourant l'eſpace dx, rencontre le même nombre d'obſtacles, quand on ſuppoſe cet eſpace partout égal ou conſtant, & chaque obſtacle lui ôte d'autant plus de ſa viteſſe, plus cette viteſſe eſt grande. On déduit cette proportion également des formules que l'on donne pour le choc des Corps, quand on conſidere le fluide ou le milieu réſiſtant comme un aſſemblage de petits globules, comme l'a fait M. *Jean Bernoulli* dans ſa *Diſſertation ſur le mouvement* &c.

§. 11. Il nous reſte encore à trouver le rapport entre le tems & l'eſpace parcouru. Ce rapport ſe déduira aiſément des deux formules intégrales trouvées

$$\frac{a}{c} - \frac{a}{G} = \tau,$$

$$\log \frac{G}{c} = \frac{x}{a}.$$

 Car

Car la premiere donne

$$\frac{G}{c} = \frac{G\tau}{a} + 1,$$

d'ou l'on tire

$$\frac{x}{a} = \log\left(\frac{\tau.G}{a} + 1\right),$$

$$\& \quad \frac{G\tau}{a} = e^{x:a} - 1,$$

en prenant $\log e = 1$.

§. 12. Il ſeroit à ſouhaiter qu'on pût imaginer des expériences, pour examiner les formules que nous venons de trouver. Elles ne renferment d'autre inconnue que la lettre a, qui diviſe le quarré des viteſſes dans les formules différentielles, & qui dans les formules intégrales devient encore ſignificative d'une autre façon. Car dans celle du §. 8.

$$\frac{a}{c} - \frac{a}{G} = \tau,$$

elle déſigne la viteſſe, que le corps, après avoir commencé à être mu avec une viteſſe infinie, a encore de reſte après la premiere ſeconde de tems. Au contraire dans la formule du §. 10.

$$\frac{x}{a} = \log\frac{G}{c},$$

la lettre a dénote la ſoutangente de la logarithmique, dont les ordonnées repréſentent la viteſſe du corps pour chaque point de l'eſpace parcouru. Dans ce cas cette lettre eſt la meſure abſolue de la force de la réſiſtance, puisqu'elle dénote l'eſpace que le corps pourroit parcourir, ſi ſa viteſſe continuoit de décroître dans chaque petit eſpace dx de la même quantité, dont elle a diminué dans le premier eſpace dx.

§. 13.

§. 13. Mais, comme le mouvement horizontal rectiligne s'altere ſubitement par la peſanteur, il n'y a pas moyen d'en reſter à ces formules; mais, en introduiſant dans le calcul l'action de la gravité, il s'agit d'en trouver d'autres pour le cas où le corps monte ou tombe dans une ligne verticale. Ce cas eſt encore aſſez ſimple, puiſque le mouvement reſtant droit, on évite l'embarras qui nait de la déviation, qui ſe rencontre & ſe change continuellement dans le mouvement oblique. Je vais donc examiner ce cas en ſorte qu'on puiſſe parvenir à le comparer avec le précédent, & à définir la valeur de la lettre a par une eſpece de théorie auſſi bien que par des expériences.

§. 14. Soit donc la verticale AB. Que le corps commence à tomber en A, & qu'après τ ſecondes de tems il ſe trouve en P, de ſorte que l'eſpace parcouru ſoit $AP = x$. La viteſſe en P ſoit $= c$. Cette viteſſe croîtra par l'action de la gravité, & au contraire elle ſera diminuée par la réſiſtance du milieu. Il s'agit donc de voir, quel eſt l'un & l'autre de ces deux effets pendant le tems $d\tau$, dans lequel le corps continue de tomber par le petit eſpace $Pp = dx$. Je remarquerai en conſéquence, que l'effet de la réſiſtance ſe détermine par la formule du §. 10. Fig. 2.

$$-\frac{dc}{c} = \frac{dx}{a},$$

car il ſera $= cdx : a$. Au contraire l'effet de la gravité ſe trouve, quand on cherche la hauteur ξ par laquelle un corps doit tomber dans le vuide pour acquérir la viteſſe c. Nommant donc $\frac{1}{2}g$ l'eſpace de la chûte d'un corps, qui répond à une ſeconde de tems, la lettre g ſera de $31\frac{1}{4}$ pieds du Rhin dans le vuide, mais dans un fluide il faudra la diminuer dans le même rapport que le poids du corps y diminue. Or les loix de la gravité nous fourniſſent la formule

$$c = V(2g\xi),$$

d'où l'on tire la différentielle

$$dc = gd\xi : V(2g\xi),$$

ou bien

$$dc = \frac{g\,d\xi}{c}.$$

Posant donc

$$d\xi = dx,$$

on aura l'effet ou l'accélération due à la gravité

$$= \frac{g\,dx}{c}.$$

Et, en soustraiant de cet effet celui qui est du à la résistance, on aura l'accroissement de la vitesse

$$dc = \frac{g\,dx}{c} - \frac{c\,dx}{a},$$

ce qui donne

$$\frac{c\,dc}{ga - cc} = \frac{dx}{a},$$

& partant l'intégrale

$$\frac{2x}{a} = \log \frac{ag}{ag - cc},$$

$$c = \sqrt{ag}.\sqrt{(1 - e^{-2x:a})}.$$

D'où l'on voit, que c ne sauroit devenir plus grand que la racine quarrée de ag, & que par conséquent cette racine dénote la vitesse terminale, à laquelle le corps pourroit parvenir, si sa chûte se continuoit à l'infini. Nous nommerons cette vitesse C, & il paroit qu'elle est la moyenne proportionelle entre g & a.

§. 15. En reprenant l'équation

$$\frac{dx}{a} = \frac{c\,dc}{ag - cc},$$

nous

nous la transformerons en

$$\frac{dc}{ag - cc} = \frac{dx}{ac} = \frac{d\tau}{a},$$

ce qui donne l'intégrale

$$\frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{a}} \cdot \tau = \log \frac{\sqrt{(ag)} + c}{\sqrt{(ag)} - c},$$

ou bien

$$\frac{2C}{a} \cdot \tau = \log \frac{C + c}{C - c},$$

d'où l'on tire réciproquement

$$c = C \cdot \frac{e^{2\tau C : a} - 1}{e^{2\tau C : a} + 1}.$$

§. 16. Egalant enfin cette quantité à celle que nous avons trouvée ci-deſſus (§. 14.)

$$c = C \cdot \sqrt{(1 - e^{-x : a})},$$

nous en tirerons

$$e^{\tau C : a} = e^{x : a} + \sqrt{(e^{2x : a} - 1)},$$

& réciproquement

$$2e^{x : a} = e^{\tau C : a} + e^{-\tau C : a}.$$

§. 17. Voilà donc toutes les formules dont on pourra avoir beſoin pour déterminer le tems, ou l'eſpace, ou la viteſſe d'un corps, qui tombe dans un milieu réſiſtant. Pour trouver des formules applicables aux cas où le corps eſt jetté verticalement en haut, il ſuffira de remarquer, que dans ces cas la gravité & la réſiſtance contribuent l'une & l'autre à diminuer la viteſſe. En revenant donc à ces deux effets

effets déterminés dans le §. 14. il ſuffira de les faire l'un & l'autre ſouſtractifs, & nous aurons, en accentuant la lettre c,

$$-dc' = -\frac{g\,dx}{c'} - \frac{c'\,dx}{a}.$$

Mais, avant que de paſſer à l'intégration de cette équation, nous la comparerons à celle que nous avions trouvée pour la deſcente (§. 14.) & qui eſt

$$dc = \frac{g\,dx}{c} - \frac{c\,dx}{a}.$$

Ces deux équations ſe transforment facilement en les deux ſuivantes

$$ac\,dc = ag\,dx - cc\,dx$$
$$ac'dc' = ag\,dx + c'c'dx,$$

donc en ſouſtraiant l'une de l'autre, on aura

$$ac'dc' - acdc = (c'c' + cc)\,dx,$$

& partant

$$\frac{dx}{a} = \frac{c'dc' - cdc}{c'c' + cc},$$

équation, qui exprime la hauteur x par les deux viteſſes c, c', qui lui répondent. Elle ne ſemble pas être intégrable. Mais nous allons d'abord voir, qu'on peut lui ſubſtituer la ſuivante

$$\frac{dx}{a} = \frac{c'dc'}{c'c'} - \frac{cdc}{cc}.$$

§. 18. Reprenons pour cet effet les deux équations

$$dc' = \frac{g\,dx}{c'} + \frac{c'dx}{a},$$

$$dc = \frac{g\,dx}{c} - \frac{c\,dx}{a},$$

&

& nous en tirerons

$$\frac{dx}{a} = \frac{cdc}{ag - cc} = \frac{c'dc'}{ag + c'c'}$$

& partant

$$agcdc + c'c'cdc = agc'dc' - cc'dc'$$

ce qui donne

$$c'c'cdc + cc'dc' = ag(c'dc' - cdc)$$

d'où l'on tire l'intégrale

$$c'c'cc = agc'c' - agcc$$

$$c'c' = \frac{agcc}{ag - cc}$$

$$cc = \frac{agc'c'}{ag + c'c'}.$$

Ces équations font voir, que la viteſſe du corps en montant étant donnée, on en trouve immédiatement la viteſſe qu'il a en retombant au même point de la hauteur P. Soit AD la viteſſe terminale C (§. 14.) AB la viteſſe en montant, la perpendiculaire AE du triangle rectangle DAB ſera la viteſſe en deſcendant. Fig. 3.

§. 19. L'équation trouvée

$$c'c'cc = agc'c' - agcc$$

ſe change en

$$\frac{1}{ag} = \frac{1}{cc} - \frac{1}{c'c'}$$

d'où l'on tire la différentielle

$$\frac{dc}{ccc} = \frac{dc'}{c'c'c'}$$

ou bien

$$0 = \frac{c^2c'dc'}{c'c'} - \frac{c'c'cdc}{cc}.$$

Or, en ajoutant de part & d'autre $c'dc' - cdc$, on obtient

$$c'dc' - cdc = c'dc' + \frac{c^2 c'dc'}{c'c'} - \frac{c'c'cdc}{cc} - cdc$$

ce qui donne

$$\frac{c'dc'}{c'c'} - \frac{cdc}{cc} = \frac{c'dc' - cdc}{c'c' - cc} = \frac{dx}{a} \quad (\S.\ 17.)$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{a} = \frac{dc'}{c'} - \frac{dc}{c}$$

$$\frac{x}{a} = \log \frac{c'}{c}.$$

§. 20. Cette formule eſt aſſez remarquable en ce qu'elle nous met en état de comparer le mouvement vertical d'un corps avec
Fig. 2. ſon mouvement horizontal. Car la viteſſe initiale c eſt à la viteſſe qu'il a en retombant, dans le même rapport que ſi le corps dans le même milieu réſiſtant avoit parcouru la droite $AP = 2$. (§. 10.) On en tire facilement la conſéquence, que, dans le cas où le corps monte & retombe, l'action de la gravité ne fait que redoubler le chemin parcouru, & changer la direction du mouvement.

§. 21. Mais revenons maintenant à l'équation différentielle

$$dc = \frac{g\,dx}{c} + \frac{c'\,dx}{a}$$

que nous avons trouvée (§. 17.) pour le cas, où le corps monte. Elle ſe transforme en

$$\frac{c'\,dc'}{ag + c'c'} = \frac{dx}{a}$$

d'où nous tirons l'intégrale

$$\frac{2x}{a} = \log \frac{ag + c'c'}{ag}$$

&

& rèciproquement

$$c' : C = \sqrt{(e^{2x:a} - 1)}$$

§. 22. Or nous avions (§. 14.) pour la chûte:

$$c : C = \sqrt{(1 - e^{-2x:a}}$$

donc il eſt

$$c' : c = e^{x:a}$$

$$x : a = \log \frac{c'}{c}.$$

tout comme dans le §. 19.

§. 23. La même équation

$$\frac{c'\,dc'}{ag + c'c'} = \frac{dx}{a}$$

nous donne

$$\frac{dc'}{ag + c'c'} = \frac{dx}{c'a} = \frac{d\tau}{a}$$

dont l'intégrale eſt

$$\frac{\tau C}{a} = \text{Arc. tang } \frac{c'}{C}$$

& réciproquement

$$\frac{c'}{C} = \text{tang Arc. } \frac{\tau C}{a}.$$

§. 24. Après avoir trouvé le tems de la montée & celui de la deſcente, nous tâcherons d'en exprimer la ſomme de la maniere la plus ſimple qu'il ſera poſſible, par la viteſſe c' avec laquelle le corps commence à monter. Faiſons d'abord la tangente

$$\frac{c'}{C} = \cot 2\omega, \quad \text{ou bien} \quad \frac{C}{c'} = \text{tang } 2\omega$$

& l'équation (§. 18.)

$$cc = \frac{CC\,c'c'}{CC + c'c'}$$

étant changée en

$$\frac{cc}{CC} = \frac{c'c' : CC}{1 + c'c' : CC}$$

ſe transformera en

$$\frac{cc}{CC} = \frac{\cot 2\omega^2}{\operatorname{cosec} 2\omega^2} = \operatorname{cof} 2\omega^2$$

d'où l'on tire

$$\frac{c}{C} = \operatorname{cof} 2\ \omega.$$

Mais le tems de la deſcente eſt (§. 15.)

$$\frac{2\tau C}{a} = \log \frac{1 + c : C}{1 - c : C}$$

ce qui donne

$$\frac{2\tau C}{a} = \log \frac{1 + \operatorname{cof} 2\ \omega}{1 - \operatorname{cof} 2\ \omega} = \log \cot \omega^2$$

& partant

$$\frac{\tau C}{a} = \log \cot \omega$$

Au contraire, le tems de la montée étant (§. 23.)

$$\frac{\tau C}{a} = \text{Arc. tang } \frac{c'}{C}$$

nous aurons, en poſant $\pi = 3{,}1415926 \ldots$ &c.

$$\frac{\tau C}{a} = \tfrac{1}{2}\pi - 2\ \omega$$

Par

Par conſéquent la ſomme de l'un & de l'autre tems étant exprimée par T, il ſera

$$T = (\tfrac{1}{2}\pi - 2\omega + \log \cot \omega)\frac{a}{C}$$

Il eſt presque ſuperflu d'avertir, que dans cette formule il faut entendre les logarithmes hyperboliques, & prendre le rayon du cercle égal à l'unité.

§. 25. Comparons encore le tems de la montée avec la hauteur à laquelle le corps parvient avant que de retomber. Pour cet effet nous avons (§. 23. 21.)

$$c' : C = \text{tang Arc.} \frac{\tau C}{a}$$

$$\frac{2x}{a} = \log\left(1 + \frac{c'c'}{CC}\right)$$

d'où nous tirons

$$\frac{x}{a} = \text{log. sec. Arc.} \frac{\tau C}{a}.$$

Et puisqu'il eſt (§. 24. 23.)

$$\frac{c'}{C} = \cot 2\omega = \text{tang. Arc.} \frac{\tau C}{a}$$

il ſera

$$\frac{x}{a} = \log.\ \text{cosec}\ 2\omega.$$

Donc le même arc 2ω, qui eſt tel que $\cot 2\omega = c' : C$, ſuffit pour trouver d'une maniere fort facile, & la hauteur x, & la ſomme du tems de la montée & de la deſcente, ou bien chacun ſéparément.

On trouvera facilement, que dans le triangle ADB cet arc 2ω eſt l'angle B, & que, tandis qu'il eſt Fig. 3.

$$c' : C = \cot 2\omega,$$

il ſera $c : c' = \sin 2\omega$ & $c : C = \cos 2\omega$

puisqu'en faiſant

$$A\,D = C,$$
$$A\,B = c'$$

il eſt

$$A\,E = c \quad (\S.\ 18.)$$

§. 26. Nous allons maintenant déterminer la valeur de la lettre a, que nous avons employée dans tout ce calcul, & que nous employerons encore dans les ſuivants. La remarque que nous avons faite au §. 14. que la viteſſe terminale d'un corps tombant eſt la racine quarrée de ag, ou qu'il eſt

$$ag = C\,C,$$

nous met en état de comparer cette viteſſe & la réſiſtance qui lui eſt due avec l'action de la gravité, qu'exprime la lettre g, qui dénote la viteſſe qu'un corps tombant dans le vuide acquérroit dans la premiere ſeconde de tems, ſi ſa gravité étoit égale à celle qu'il a lorsqu'il eſt plongé dans le fluide. (§. 14.) Il eſt clair, que ſi la viteſſe terminale C pouvoit être trouvée immédiatement par des expériences, on n'auroit qu'à diviſer ſon quarré $C\,C$ par g, & on trouveroit la valeur de la lettre a, ſans avoir beſoin d'entrer dans d'autres recherches. Mais, comme un corps tombant n'acquiert cette viteſſe que lorsqu'il tombe d'une hauteur infinie dans le même milieu, cette expérience n'eſt pas faiſable. Cependant, quand on connoit à peu près cette viteſſe, il ne ſeroit pas impoſſible de jetter le corps en bas avec une force qui lui donne d'abord une viteſſe approchante, & il eſt clair que le corps en continuant de tomber s'approchera d'avantage de la viteſſe C, que l'on cherche.

§. 27. Mais nous pourrons nous y prendre de diverſes autres manieres. Je remarque en conſéquence, que le tems & le lieu ne changeant rien dans les choſes, la réſiſtance & ſon effet reſtent les mêmes,

mêmes, ſoit que le corps ſe meuve dans le milieu réſiſtant, ou que ce milieu ſe meuve contre le corps repoſant. Il eſt clair qu'en employant une certaine force, on pourra retenir ce corps en ſorte que le mouvement du milieu ne l'entraioe point, & qu'il y aura un équilibre tel que, pour peu qu'on relâche de cette force, le corps commence à être entrainé. Subſtituons à cette force un poids qui lui ſoit égal, & nous pourrons par là eſtimer l'effort du fluide par celui de la peſanteur.

§. 28. Afin de rendre cette comparaiſon moins compliquée, nous ſuppoſerons la viteſſe du fluide, ou du milieu réſiſtant, égale à celle que le corps acquerroit en tombant dans ce milieu d'une hauteur infinie. Cette viteſſe eſt telle, que ſi le corps eſt pouſſé en bas avec une force qui la lui procure, elle n'eſt, ni augmentée par l'action de la gravité, ni diminuée par la réſiſtance du milieu dans lequel le corps tombe, & que par conſéquent l'action de la gravité eſt parfaitement égale à celle de la réſiſtance.

§. 29. Soit maintenant CDE un tuyau recourbé, & ouvert en C & E, de ſorte que l'une & l'autre ouverture ſoit égale. Que par le canal AB il tombe continuellement une colonne d'eau, ou du fluide réſiſtant, ſur l'ouverture C, on ſait qu'elle remplira le tuyau CDE jusqu'à la hauteur E, qui eſt de niveau avec B. La colonne BC en tombant acquiert une viteſſe, que nous appellerons C, & qui répond à la hauteur BC, en ſorte que $BC = \frac{CC}{2g}$. Or, quel que ſoit l'effort dû à cette viteſſe, il eſt clair que le ſimple poids de la colonne DE y maintient l'équilibre. Cet équilibre aura lieu de quelque maniere que ce poids ſoit appliqué. Il ſuffit que ſa réaction ſoit directement oppoſée à l'action de la colonne BC, ou que, ſi elle ne l'eſt pas, ou pas tout à fait, on en tienne compte. Fig. 4.

§. 30. Suppoſons donc un levier horizontal appuyé ſur A, & chargé des deux cylindres égaux C, D, ce levier reſtera en équilibre. Fig 5.

bre. Qu'il tombe maintenant ſur C une colonne d'eau, ou du fluide réſiſtant, qui ne ſoit ni plus ni moins large que ne l'eſt le cylindre; il eſt clair que, pour ne point voir l'équilibre levé, il faudra contrebalancer l'action de cette colonne par un poids E, & ce poids ſera égal à celui de toute la colonne B, entant que ſa hauteur eſt CB, & la baſe égale à celle du cylindre C.

§. 31. Mais ſi, au lieu du cylindre C, on avoit placé en C une boule, l'action de la colonne BC y auroit eu moins de priſe, puisque la boule l'auroit fendue plus facilement. La théorie de la percuſſion oblique nous fait voir que, dans ce cas, le poids E qui contrebalance l'action de la colonne BC ſe réduit à la moitié, & que par conſéquent il eſt égal à celui de la colonne CF, dont la hauteur eſt $= \frac{1}{2}$ BC, & la baſe égale à la ſurface du plus grand cercle de la boule.

§. 32. Voilà donc l'action du fluide comparée à celle de la gravité. Nous avons vu ci-deſſus, que l'une & l'autre eſt égale dans le cas où la viteſſe du fluide en C eſt la même que celle que le corps acquerroit dans ce fluide en tombant d'une hauteur infinie, ſi ſon poids ou ſa gravité n'étoit point diminuée par celle du fluide. Si donc cette viteſſe eſt $= C$, & qu'on faſſe $\gamma = 31\frac{1}{4}$ pieds du Rhin, c'eſt à dire, égal à la gravité abſolue du corps, la hauteur de la colonne CB ſera $= \frac{CC}{2\gamma}$, & partant $CF = \frac{CC}{4\gamma} = \frac{a}{4}$. (§. 26.)

De la ſorte une colonne du fluide, dont la hauteur eſt $\frac{a}{4}$, & la baſe égale à la ſurface du plus grand cercle de la boule qui s'y meut, cette colonne, dis-je, eſt du même poids que la boule. Or, ce poids étant donné, nous pourrons nous en ſervir pour déterminer la valeur de a.

§. 33. Soit le poids de la boule $= P$, celui d'un globe du fluide d'un égal volume: ſoit $P:D$, la denſité ou la gravité ſpécifique du

du globe étant posée D fois plus grande que celle du fluide. Soit le demi-diametre de la boule $= r$; & nous aurons le poids d'un cylindre du fluide circonscrit à la boule $= 3\,P : 2\,D$, le nombre de ces cylindres dans la colonne $\frac{1}{4}a$ sera $= a : 8r$; par conséquent leur poids $= 3\,P\,a : 16\,D\,r$. Or, ce poids étant égal à celui de la boule, nous aurons

$$3\,a\,P : 16\,r\,D = P$$

d'où l'on tire la valeur de la lettre

$$a = \tfrac{16}{3}\,r\,D.$$

Cette valeur se définit donc en chaque cas par le demi-diametre de la boule, & par le rapport de la gravité spécifique de la boule & du fluide.

§. 34. Il est cependant assez ordinaire, que l'on connoît plus aisément le poids de la boule que sa gravité spécifique, quoique celle-ci en puisse être trouvée, dès que l'on sait le diametre de la boule. Afin donc d'abréger ce calcul, nous déterminerons en nombres absolus le poids d'une boule d'eau du même diametre. Supposons qu'un pied cubique d'eau, mesure de Paris, pese 70 livres poids de marc, le pied cubique, mesure du Rhin, dont nous nous servirons dans ce discours, ne pesera que $63\frac{1}{2}$ ℔. Si donc nous mettons pour base une boule d'eau, dont le diametre est d'un pied de Rhin, ces $63\frac{1}{2}$ livres seront encore diminuées dans le rapport de 21 à 11. De là nous aurons le poids de cette boule $= \frac{11}{21} \cdot 63\frac{1}{2} = 33\frac{1}{4}$ livres, poids de marc. Si donc le poids & le diametre d'une boule quelconque est donné, on la réduira aisément à une boule, dont le diametre est un pied du Rhin, & on en trouvera le poids, en observant qu'il faut l'augmenter ou le diminuer en raison du cube des diametres. Ce poids étant trouvé, on le comparera avec les $33\frac{1}{4}$ livres, que pese une boule d'eau d'un diametre d'un pied du Rhin, & on trouvera par là le rapport entre la gravité spécifique de la boule & de l'eau. Or le rapport de la gravité de l'eau & de celle des autres fluides étant connu, on changera ce rapport de la boule à l'eau dans celui de la boule à tel fluide que l'on

voudra. Nous pourrions trouver une même regle pour l'air, ſi ſa denſité n'étoit pas extrêmement variable. Communément on regarde l'air comme environ 850 fois plus leger que l'eau. Ce rapport réduiroit le poids d'une boule d'air, dont le diametre eſt d'un pied de Rhin, à $\frac{33\frac{1}{4}}{850}$ ℔ ou $\frac{2}{51}$ ℔. Il y a cependant des cas où l'air eſt plus peſant, comme il y en a nombre d'autres où il eſt plus leger, que ce rapport ne le donne. De la table des hauteurs barométriques répondantes aux élévations des endroits au deſſus de la mer, que j'ai donnée dans le traité des *Propriétés remarquables de la route de la lumiere par les airs, &c.* & qui eſt tirée immédiatement des obſervations faites ſur les Pyrénées, il réſulte, que depuis la ſurface de la mer, où le barometre eſt de 28 pouces de Paris, il faut s'élever de $73\frac{1}{3}$ toiſes, pour que le barometre s'abaiſſe d'un demi-pouce. Or ces $73\frac{1}{3}$ toiſes font 10560 demi-pouces, & partant le vif argent eſt 10560 plus peſant que l'air. Diviſant donc ce nombre par 14, nous aurons 754 pour le rapport entre la gravité ſpécifique de l'eau & celle de l'air; ce qui fait voir, que l'air eſt quelquefois plus denſe que ne le donne le rapport dont nous avons parlé au commencement de ce paragraphe. Mais il poutra encore être plus peſant par une double raiſon. Car cette peſanteur répond à la hauteur du barometre de 28 pouces. Or cette hauteur peut aller jusqu'à 29 pouces, & même au delà. Ceci diminue encore le nombre 754 en raiſon de 29 à 28, de ſorte que l'eau ne ſera que 728 fois plus peſante que l'air comprimé par une colonne de 29 pouces de mercure. Enſuite je remarquerai que les obſervations dont je tire ce réſultat, ont été faites aux mois de Fevrier & de Mars, & dans un climat qui approche de celui de l'Italie, de ſorte que le Thermometre n'y aura été que fort peu au deſſous de la température. Ce qui fait que, dans des climats plus froids, le nombre 728 devra encore être diminué d'une 12 ou 10 partie, & par là il ſera réduit à 650, de ſorte que dans les païs du Nord, à la ſurface de la mer, & le barometre étant à 29 pouces de Paris, comme cela arrive pendant les plus grands froids, la peſanteur de l'eau n'excédera que 650 fois celle de l'air. §. 35.

§. 35. Au contraire, pendant l'été, & le barometre n'étant qu'à $27\frac{1}{2}$ pouces de hauteur, le nombre 754 devra être augmenté dans le rapport de $27\frac{1}{2}$ à 28, ce qui donne 782; & en outre d'une 10 partie par rapport à la chaleur, ce qui le change en 860. Nous voyons de là, que la variation de la denſité de l'air peut aller depuis 650 jusqu'à 860. Il eſt clair que ce changement influera aſſez conſidérablement ſur la réſiſtance que l'air oppoſe à des corps mûs avec autant de viteſſe, que les boulets de canon & les bombes en ont.

§. 36. Tout ceci ne regarde encore que l'air tel qu'il eſt à la ſurface de la mer, & même indépendamment des variations qui peuvent réſulter de l'humidité & des vapeurs dont l'air eſt toujours plus ou moins chargé. Voyons ce qui en ſera pour des endroits plus élevés; & pour avoir un nombre rond, prenons une élévation de 1000 toiſes au deſſus de la mer, en ſuppoſant que le barometre à la mer reſte à ſa hauteur moyenne de 28 pouces, & que le thermometre ſe trouve à la température. A cette hauteur de 1000 toiſes, répond à une ligne du barometre, une élévation de $16\frac{2}{3}$ toiſes, ou de 14170 lignes, de ſorte que l'air y eſt 14170 fois plus leger que le vif-argent, & par conſéquent $\frac{14170}{14} = 1012$ fois plus leger que l'eau: au lieu que, ſous les mêmes conditions, il n'étoit que 754 fois plus leger à la ſurface de la mer. On voit par là, que pour déterminer exactement la valeur de la lettre n, il faut avoir égard à toutes les circonſtances dont nous venons d'indiquer l'effet & l'influence, & qu'il eſt à propos de peſer l'air, dans les cas où l'on veut s'aſſurer à toute rigueur des effets de la réſiſtance qu'il oppoſe aux corps qui s'y meuvent avec des viteſſes conſidérables. Nous avons vu ci-deſſus, que cette lettre dénote la ſoutangente de la logarithmique, dont les ordonnées repréſentent les viteſſes & leur décroiſſement (§. 10. 19. 20.) & que par là elle eſt l'expoſant de la progreſſion géométrique ſuivant laquelle ces viteſſes décroiſſent. Je remarquerai encore, comme en paſſant, que feu Mr. *Muſſchenbroek* a donné une table des

différentes peſanteurs de l'air, telles qu'elles avoient été obſervées par divers Phyſiciens. On verra par ce que je viens de dire, comment il eſt poſſible qu'il s'y trouve des réſultats fort différens, & que quelques unes doivent être cenſées moins exactes que les autres.

§. 37. Je vais maintenant rapporter les expériences qui ont été faites à Londres ſur la Tour de l'Egliſe de *St. Paul.* Mr. *Hawksbée*, ayant fait faire des globes de verre creux & fort legers, les laiſſa tomber du haut de cette Tour, & fit obſerver le tems de la chûte. La hauteur étoit de 220 pieds de Londres, ce qui revient à 213,6 pieds du Rhin, le barometre ſe trouvoit à $29\frac{7}{10}$ de pouce, meſure de Londres, ce qui revient à 27 pouces $4\frac{1}{2}$ lignes meſure de Paris, & enfin le thermometre étoit 60 dégrés au deſſus du terme de congélation, ce qui marque généralement parlant une chaleur d'été ; & par l'une & l'autre raiſon nous pourrons nous en tenir au §. 35. & ſuppoſer que pendant ces expériences l'air a été à très peu près 850 fois plus leger que l'eau. Voici maintenant les expériences.

Poids grains.	Diametres pouces.	Temps ſecondes.
510	5, 1	$8\frac{1}{2}$
642	5, 2	8
599	5, 1	8
515	5, 0	$8\frac{1}{4}$
483	5, 0	$8\frac{1}{2}$
641	5, 2	8

Le poids eſt marqué en grains, dont une once peſe 480, ou une livre 7680. Et Mr. *Hawksbée* obſerve que le tems de la chûte eſt généralement trop grand d'environ $\frac{3}{10}$ de ſecondes, à cauſe d'un inconvénient qu'il y avoit en obſervant.

§. 38.

§. 38. Pour appliquer le calcul à ces expériences, déterminons d'abord la valeur de la lettre a par le poids & le diametre des boules. Soit le demi-diametre $= r$, le rapport du diametre à la circonférence $= 1 : \pi$, celui de la peſanteur de l'air à celle de l'eau $= 1 : 850$, & le poids d'un pied cubique d'eau, meſure du Rhin, $= 63\frac{1}{2}$ ℔, le poids d'un pied cubique d'air ſera $= \frac{127}{1700}$ ℔, & le poids d'une boule d'air, dont le demi-diametre eſt d'un pied du Rhin, ſera $= \frac{4.\,127.\,\pi}{3.\,1700} = 0,3130$ ℔, & le demi-diametre étant en général $= r$ pieds, le poids de la boule d'air ſera $= 0,313.\,rrr$ livres.

§. 39. Or par le §. 33. le poids de la boule même étant P, celui de la boule d'air d'un même volume eſt $= P : D$, d'où nous aurons

$$P : D = 0,313.\,r^3$$
$$D = P : (0,313.\,r^3)$$
$$a = \tfrac{16}{3}\,rD = \frac{16.\,P}{0,939.\,rr} = 17,043.\,\frac{P}{rr}.$$

§. 40. Mais il eſt (§. 14.)

$$C\,C = a\,g$$
$$g = 31\tfrac{1}{4} \text{ pieds du Rhin}$$

donc il ſera

$$CC = 532,605\,.\,\frac{P}{rr} = \frac{500}{3}\,.\,rD$$

d'où l'on voit, que la viteſſe terminale eſt en raiſon réciproque du diametre de la boule, & en raiſon directe de la racine quarrée de ſon poids. Il convient de remarquer, qu'en faiſant $g = 31\frac{1}{4}$ pieds, je laiſſe à cette lettre la valeur qu'elle auroit dans le vuide. Il auroit fallu la diminuer dans le rapport de $D : (D - 1)$. Mais les boules

ayant été peſées dans l'air, & par conſéquent dans le milieu réſiſtant, cette diminution ſe trouve déjà dans la valeur de a, qui eſt $= 17,043\ P : rr$. Donc le produit $ag = CC$ eſt tel qu'il doit être. (§. 14. 26.) Du reſte le rapport $D : (D - 1)$ ne différant que fort peu de l'unité, on voit bien que nous aurions pu en faire abſtraction.

§. 41. Appliquons maintenant ces rapports trouvés à la troiſieme expérience de Mr. *Hawksbée*, & nous aurons le poids de la boule $P = \frac{599}{7680}$ ℔ $= \frac{1}{12,8}$ ℔. Le diametre $2r = 5,1$ pouces de Londres $= \frac{5'}{12}$ pieds du Rhin, enfin la hauteur de la chûte $x = 213,6$ pieds du Rhin. D'où nous trouvons

$$a = 17,043 \frac{P}{rr} = \frac{4.\ 144.\ 17,043}{25.\ 12,8} = 30,678 \text{ pieds}$$

$$CC = ag = 958,69 \text{ pieds quarrés}$$

$$C = 30,96.$$

§. 42. Ces données ſuffiſent pour trouver le tems de la chûte par la formule du §. 16.

$$e^{\tau C : a} = e^{x : a} + V(e^{2x : a} - 1)$$

car il ſera

$$\frac{x}{a} = \frac{213,6}{30,678} = 6,97$$

ce qui fait, que nous pourrons réduire cette équation à

$$e^{\tau C : a} = 2\, e^{x : a}$$

d'où nous aurons $\tau\ C : a = \log 2 + x : a$

$$\tau = \frac{a \log 2}{C} + \frac{x}{C}$$

mais

mais il eſt $\log 2 = 0,693$

d'où nous tirons $t = 7\frac{3}{4}$ ſecondes. Mais l'expérience donna ce tems $= 8 - \frac{3}{10} = 7\frac{7}{10}$ ſecondes. Donc la différence n'eſt que d'une $\frac{1}{20}$ de ſeconde, c'eſt à dire, ſi petite qu'elle n'a pu être obſervée.

§. 43. Cet exemple eſt le ſeul que j'aye calculé. Car on voit par la table du §. 37. que les autres 5 expériences ne ſauroient donner des différences plus notables. Toutes les boules étoient à peu près d'un même diametre, & la différence qui ſe trouvoit entre leur poids répond au plus ou moins de tems que les boules employoient à tomber, puisque ce tems ſuivoit à très peu près le rapport des racines quarrées du poids, en croiſſant ou décroiſſant en raiſon inverſe de ces racines.

§. 44. Mr. *Déſaguliers* a fait de ſemblables expériences ſur la même Tour, en laiſſant tomber de la hauteur de 272 pieds de Londres des veſſies de porc, des boules de papier & de verre, & en obſervant le tems de la chûte. Il répéta les expériences faites avec les mêmes veſſies & les boules de papier. En voici le réſultat

Diametres pouces.	Poids grains.	Temps ſecondes.	Expérienc. repetée ſecondes.	
5, 3	128	$19\frac{3}{8}''$	$19''$	Veſſies.
5, 193	156	$17\frac{1}{4}$	$18\frac{3}{8}$	
5, 33	$137\frac{1}{2}$	$18\frac{3}{4}$	$18\frac{3}{8}$	
5, 26	$97\frac{1}{2}$	$22\frac{3}{8}$	24	
5, 2	$99\frac{1}{8}$	$21\frac{5}{8}$	$21\frac{1}{4}$	
5, 5	1800	$6\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	Boules de papier
5, 1	1320	$7\frac{1}{8}$	$6\frac{1}{2}$	
5, 1	1500	7	$6\frac{1}{2}$	
5, 42	2610	$6\frac{1}{4}$		Boules de verre.
5, 45	2910	6		

§. 45.

§. 45. Je ne prendrai de ces expériences que la cinquieme, pour y appliquer le calcul. On voit que la durée de la chûte y étoit très conſidérable, & que l'expérience répétée s'accorde très bien avec la premiere, ce qui fait croire que la veſſie avoit été fort ronde & d'une figure réguliere. Nous avons donc

$$2r = \frac{5}{12} \text{ pieds du Rhin}$$

$$P = \frac{100}{7680} \text{ livres}$$

$$x = 262 \text{ pieds du Rhin}$$

D'où nous tirons

$$a = \frac{17,043 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 10}{25 \cdot 768} = 5,1123 \text{ pieds.}$$

$$x : a = 51,24$$

$$\tau \sqrt{\frac{g}{a}} = x : a + \log 2 = 51,24 + 0,69 = 51,93$$

$$\tau = 21''.$$

Ce qui s'accorde, à $\frac{1}{4}$ de ſeconde près, avec l'expérience répétée, qui donne ce tems de $21\frac{1}{4}''$. La premiere le donne de $21\frac{5}{8}$. Mais il ſemble que l'air a été plus peſant qu'il ne le fût dans les expériences de Mr. *Hawksbée*, qui les fit pendant l'été & lorsque le barometre étoit fort bas. J'ignore ſi Mr. *Déſaguliers* a obſervé le barometre & le thermometre. Mais je ſuis fort porté à croire, qu'il auroit trouvé l'état de l'air différent. En conſéquence j'ai encore calculé la ſeptieme de ces expériences, & je trouve le tems de la deſcente de $6\frac{7}{10}$ ſecondes. Mr. *Déſaguliers* l'a obſervé la premiere fois de $7\frac{1}{8}$, la ſeconde de $6\frac{1}{2}$ ſecondes. Le terme moyen eſt 6,8 ſecondes, & ſurpaſſe le tems trouvé par le calcul d'une $\frac{1}{10}$ partie, au lieu que dans l'exemple précédent cette différence, qui eſt $= 21\frac{7}{10} - 21 = \frac{7}{10}$ eſt d'une $\frac{1}{40}$ partie. Quoiqu'il en ſoit, ces différences ſont ſi petites qu'il

qu'il ne vaut pas la peine de s'y arrêter. Et nous avons tout lieu d'en conclure, que la maniere dont nous avons déterminé la valeur de la lettre a convient très exactement avec les expériences, & qu'il faudra la laiſſer paſſer, du moins pour toutes celles où la viteſſe n'eſt pas fort conſidérable. Je vais en conſéquence appliquer ce calcul à un cas qui arrive très ſouvent, & qui excite même la curioſité des perſonnes qui n'étudient ni la Phyſique ni ces ſortes de calculs.

§. 46. On ſait que la pluye tombe des nuées. Leur hauteur eſt aſſez variable, & les gouttes elles-mêmes ſont d'une groſſeur fort différente. Si donc on demande, quelle eſt leur viteſſe en tombant, & combien de tems elles employent, cette queſtion ne ſauroit ſe décider généralement. Je vais donc prendre quelque terme moyen. Je ne donnerai à la hauteur des nuées que 5000 pieds. Elles ſont quelquefois plus baſſes, & particulierement en hyver; mais auſſi en revanche les trouve-t-on au deſſus des plus hautes montagnes, & la neige permanente au haut des Cordelieres nous fait voir, que les nuées peuvent s'élever au-delà de 20000 pieds au deſſus de la mer. Quoiqu'il en ſoit, il y a encore une autre raiſon qui rend cette ſuppoſition ſuperflue, c'eſt que le froid exceſſif qui regne dans ces grandes hauteurs, change toujours les nuées en flocons de neige, qui ne ſe fond que lorsqu'en tombant elle parvient dans un air, qui, par là qu'il eſt plus proche de la ſurface de la terre, en peut être aſſez échauffé pour fondre la neige. En gardant donc la hauteur de 5000 pieds, je ſuppoſerai le diametre d'une goutte de pluye égal à une ligne du pied du Rhin, & en prenant un terme moien, je garderai la denſité de l'air 850 fois plus petite que celle de l'eau. De là nous aurons

$$r = \frac{1}{288} \qquad D = 850$$

$$a = \frac{16}{3}\, r \qquad D = \frac{850 \cdot 16}{288 \cdot 3} = 15{,}74$$

$$C = 22{,}18.$$

Ainſi la plus grande viteſſe que cette goutte peut acquérir en tombant, n'eſt que de $22\frac{1}{2}$ pieds par ſeconde, & ne s'aggrandit qu'en raiſon de la racine quarrée du diametre, de ſorte que ſi ce diametre n'eſt que d'un $\frac{1}{4}$ de ligne, cette viteſſe ſera encore de 11 pieds par ſecondes. Pour trouver maintenant le tems de la chûte, nous aurons

$$\tau \sqrt{\frac{g}{a}} = x : a + \log 2$$

ce qui donne

$$\tau = 229'', 4.$$

Ainſi une goutte de 1 ligne de diametre, en tombant de la hauteur de 5000 pieds, employera $3', 49''$ pour cette deſcente. En tombant uniformément avec la viteſſe terminale de 22, 18 pieds par ſeconde, elle employeroit 225,4 ſecondes de tems. Et ſans la réſiſtance de l'air, & tombant par la ſeule action de la gravité, elle feroit ce chemin en 18 ſecondes de tems.

§. 47. Appliquons le même calcul à une dragée de fer, dont le diametre eſt d'une ligne, meſure du Rhin. Le fer eſt 7, 645 fois plus peſant que l'eau. Mais la valeur de la lettre a croit en raiſon de la gravité ſpécifique. En multipliant donc les 15, 74 pieds que nous venons de trouver pour une goutte d'eau du même volume, avec 7, 645, & nous aurons pour cette dragée de fer

$$a = 120, 41.$$

$$C = \sqrt{a\, g} = 61, 34.$$

La plus grande viteſſe que cette dragée peut acquérir en tombant dans un air 850 fois plus leger que l'eau, n'eſt donc que de $61\frac{1}{3}$ pieds du Rhin par ſeconde ; & quand même elle ſeroit jettée horizontalement avec une viteſſe infinie, cette viteſſe diminueroit ſi rapidement, qu'au bout de la premiere ſeconde de tems elle ne ſeroit plus que de $120\frac{2}{3}$ pieds par ſeconde, en continuant de décroître en raiſon réciproque du tems, de ſorte qu'au bout de la deuxieme ſeconde elle ſeroit réduite à la moitié, &c. (§. 9. 12.)

§. 48.

§. 48. Il ne ſera pas plus difficile d'appliquer ce calcul aux boules de ſavon. On ſait qu'elles ne tombent presque point du tout. Suppoſons p. ex. une goutte d'eau ſavonnée, dont le diametre eſt d'une ligne, étendue en une boule de deux pouces de diametre. Par là ſon volume devient $24^3 = 13824$ fois plus grand. Ce qui fait que l'air renfermé dans la boule peſera $\frac{13824}{850} = 16$ fois plus que l'eau. Donc la gravité ſpécifique de toute la boule ſera $D = \frac{1}{16}\frac{7}{6}$. Et le diametre étant $2r = \frac{1}{6}$ pied, on aura $n = \frac{1}{3}^6 \cdot \frac{1}{16}\frac{7}{6} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{3}\frac{7}{6}$. Et comme dans ce cas il eſt $g = \frac{D-1}{D} \cdot 31\frac{1}{4} = \frac{1}{6}\frac{2}{8}^5$, on aura $CC = \frac{1}{3}\frac{7}{6} \cdot \frac{1}{6}\frac{2}{8}^5 = \frac{1}{12}\frac{2}{4}\frac{5}{4}$ ce qui donne à très peu près $C = \frac{1}{12}\frac{1}{2} = 11$ pouces, qui eſt la plus grande viteſſe que la boule pourra acquérir en tombant.

§. 49. Après ces exemples, où la viteſſe des corps tombants eſt peu conſidérable, j'en vais rapporter quelques uns où elle eſt conſidérablement plus grande. Mr. *Sulzer* ayant vu les difficultés que Mrs. *Robins* & *Euler* oppoſoient à l'hypotheſe de la réſiſtance exactement proportionelle au quarré des viteſſes, entreprit d'examiner le réſultat que donnent les calculs de Mr. *Euler*, par des expériences ſimplifiées à un tel point qu'on puiſſe répondre de toutes les circonſtances qui y influent: prérogative, dont celles de Mr. *Robins* ne jouiſſent pas. Mais, ſans m'arrêter ici à cet examen, je me bornerai à rapporter les expériences de Mr. *Sulzer*, afin de pouvoir enſuite y appliquer le calcul, & faire voir, qu'on auroit pu en prédire l'effet, en admettant ſimplement le principe de la réſiſtance proportionnelle au quarré de la viteſſe.

§. 50. Mr. *Sulzer* ayant appliqué à la boëte d'un fuſil à vent un tuyau de verre de près de 12 pieds de longueur, le remplit de vif-argent, enſorte qu'en comprimant l'air enfermé dans la boëte, la hauteur de la colonne de mercure dans ce tuyau lui indiquât exactement

le degré d'élaſticité de cet air comprimé. Il chargea enſuite le fuſil d'une boule de plomb, dont le diametre étoit $3\frac{2}{3}$ lignes pied du Rhin, & ayant donné au fuſil une poſition verticale il lâcha le coup, & obſerva le tems que la boule employoit à monter & à deſcendre. Cette expérience fut répétée cinq fois pour différens dégres d'élaſticité. En voici les réſultats tels qu'ils ont été obſervés :

Hauteur du mercure pieds du Rhin	Tems de la montée & de la deſcente
$f = 9,08$	$T = 12\frac{1}{2}$ ſecondes
8,75	12
6,54	11
4,71	10
2,56	$7\frac{1}{2}$

Je remarquerai d'abord, que pour avoir l'entier dégré de l'élaſticité de l'air comprimé, il faut ajouter à ces colonnes de mercure le poids de l'atmoſphere, ou la hauteur du barometre, que nous pouvons ſuppoſer avoir été de 2,45 pieds du Rhin, parce que Mr. *Sulzer* me dit qu'il avoit fait ces expériences à Berlin au mois de Juin, & que ç'avoit été un des plus beaux jours d'été. J'ajoute ces circonſtances, parce qu'il en réſulte auſſi, que pour déterminer la réſiſtance de l'air, nous pourrons nous en tenir au §. 35. en donnant à cet air 850 fois moins de gravité ſpécifique qu'à l'eau.

§. 51. Pour tirer parti de ces expériences il s'agit avant toutes choſes de déterminer la viteſſe avec laquelle la boule a été tirée. Ce calcul demande encore d'autres données. Mr. *Sulzer* y a pourvu, en nous donnant exactement les meſures qu'il a priſes en conſéquence. Les voici toutes en pieds du Rhin & ſes parties décimales.

La capacité de la boëte	$= 0,00677$ pieds cub.	$= \alpha$
La baſe du canon . .	$= 0,000532$ pieds quarrés	$= \beta$
La longueur . . .	$= 2,5833$ pieds . .	$= \gamma$
Le diametre de la boule	$= 0,02546$.	$= \delta$
L'aire de ſon grand cercle	$= 0,000508$ pieds quarrés	$= \epsilon$

Le

Le rapport de la gravité ſpécifique du mercure & du plomb $= 1,2378 = m$. Enfin je poſerai la hauteur du barometre de 2,45 pieds $= \lambda$.

§. 52. De là il ſuit que l'élaſticité de l'air comprimé dans la boëte eſt égale à une colonne de mercure haute de $f + \lambda$ pieds. Cette colonne étant changée en une colonne de plomb du même poids, la hauteur de celle-ci ſera $= (f + \lambda)m$ pieds, d'où il ſuit qu'elle ſurpaſſoit $\frac{3m}{2\delta}(f + \lambda)$ fois le poids de la boule de plomb dont le fuſil étoit chargé, & qu'elle mit en mouvement par ſa preſſion. Si donc la preſſion de la gravité eſt poſée $= 1$, la force accélératrice de l'air comprimé dans la boëte ſera $= \frac{3m}{2\delta}(f + \lambda)$.

§. 53. Cette force diminue en raiſon réciproque de l'eſpace. Suppoſons qu'elle ait pouſſé la boule dans le canon du fuſil juſqu'à la diſtance $= \xi$, la denſité de l'air comprimé dans la boëte ſera diminuée en raiſon $\frac{\alpha}{\alpha + \beta\xi}$, & ſa force accélératrice ſera donc réduite à

$$\frac{3mf\alpha}{2\delta(\alpha + \beta\xi)},$$

Or cette force doit non ſeulement pouſſer la boule, mais encore tout le poids de l'air extérieur, qui, étant égal à une colonne de mercure $= \lambda$, ſera $= \frac{3m\lambda}{2\delta}$, quantité conſtante dont la force accélératrice de l'air comprimé doit être, diminuée. Elle ne ſera donc efficace qu'avec la quantité, ou portion,

$$\frac{3mf\alpha}{2\delta(\alpha + \beta\xi)} - \frac{3m\lambda}{2\delta}.$$

§. 54. Soit maintenant v la hauteur, par laquelle un corps doit tomber dans le vuide pour acquérir la viteſſe que la boule a acquiert à la diſtance ξ, de ſorte que cette viteſſe ſoit $= \sqrt{v}$, & nous aurons par les loix de la mécanique

$$dv = \frac{3\alpha m (f+\lambda)\, d\xi}{2\alpha\delta + 2\beta\delta\xi} - \frac{3 m \lambda\, d\xi}{2\delta}$$

d'où l'on tire l'intégrale pour toute la longueur du canon du fuſil

$$v = \frac{3\alpha m (f+\lambda)}{2\beta\delta} \log\left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right) - \frac{3 m\lambda\gamma}{2\delta}.$$

§. 55. Remarquons ici en paſſant, que la hauteur v auſſi bien que ſa différentielle dv peut devenir $= 0$. Dans ce dernier cas elle offre un *maximum*, qui aura lieu lorsque

$$\xi = \frac{\alpha (f+\lambda)}{\beta\lambda}$$

ce qui veut dire, que la viteſſe de la boule croîtra jusqu'à ce qu'on donne au canon du fuſil une longueur telle, que l'air comprimé de la boëte ſe dilatant dans toute la longueur du canon, ait alors une denſité égale à celle de l'air extérieur. On voit par cette équation que cette plus grande longueur du canon eſt en raiſon directe de l'élaſticité de l'air comprimé dans la boëte, & en raiſon réciproque de l'élaſticité de l'air extérieur. Le premier cas, où la hauteur v devient $= 0$, a lieu, lorsque la compreſſion de l'air enfermé dans la boëte eſt ſi petite, que la force accélératrice qui en nait, ne ſauroit pouſſer la boule que jusqu'au bout du canon du fuſil. Car dans ce cas elle n'en ſortira pas, mais l'air extérieur gagnant le deſſus, de même que le propre poids de la boule, la feront rentrer, en lui faiſant faire des oſcillations diminuées jusqu'à ce qu'elle s'arrête là, où par ſon propre poids joint à celui de l'air extérieur elle tient en équilibre l'air qui reſte dans la boëte. Ceci arrive quand on ſuppoſe, que la boule remplit exactement le canon du fuſil. Car, lorsqu'elle eſt plus petite, elle retombe entierement, &c. §. 56.

§. 56. Mais revenons à notre calcul. Nous n'aurons pour cet effet qu'à ſubſtituer aux lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, f, \lambda$ les valeurs, que nous donnent les expériences de Mr. *Sulzer*, & nous aurons

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha} = 0,2030$$

$$\log\left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right) = 0,18483$$

$$\frac{3\,m\,\lambda}{2\,\delta} = 461,56$$

$$\frac{3m\alpha}{2\delta\beta}\log\left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right) = 171,528$$

$$\frac{3m\alpha\lambda}{2\beta\delta}\log\left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right) = 420,24$$

$$461,56 - 420,24 = 41,32$$

& enfin

$$v = 171,528\,f - 41,32$$

d'où l'on voit, que ſi f n'étoit que de $\frac{41,32}{171,528}$, ou environ $\frac{1}{4}$ pied, c'eſt à dire, ſi l'élaſticité de l'air comprimé dans la boëte n'excédoit celle de l'air extérieur que de 3 pouces de mercure, la balle ne ſortiroit point du fuſil, mais qu'elle retomberoit dans la boëte.

§. 57. Subſtituons maintenant dans la derniere de ces équations les valeurs de la lettre f (§. 50.) & nous aurons les hauteurs

$$v = 1516 \text{ pieds}$$
$$= 1460$$
$$= 1080$$
$$= 767$$
$$= 364.$$

§. 58.

§. 58. Or, pour trouver la viteſſe initiale de la boule c', on n'aura qu'à multiplier ces valeurs de v par $2g = 62\frac{1}{2}$ pieds, & prendre les racines quarrées des produits. Mais, avant que de faire cela, nous chercherons encore la valeur de la lettre C, ou de la plus grande viteſſe que la boule peut acquérir en tombant par l'air, tel qu'il étoit dans ces expériences. Cet air étant 850 fois plus leger que l'eau, & l'eau 11,3 fois plus legere que le plomb, il s'enſuit que la boule avoit $113 \cdot 85 = 9350$ fois plus de denſité que l'air. Il ſera donc $D = 9350$. Enſuite nous avons le demi-diametre de la boule $r = \frac{1}{360}\frac{1}{4}$ pieds. Ces deux nombres étant ſubſtitués dans la formule du §. 33.

$$a = \frac{16}{3} r D$$

nous donnent

$$a = \frac{176 \cdot 9350}{2592} = 634,9$$

De là

$$\log a = 2,8026893$$

$$\log g = 1,4948500$$

$$\log ag = 4,2975393 = \log CC \text{ (§. 26.)}$$

$$\log C = 2,1487696 \qquad C = 140,85$$

$$\log \frac{a}{g} = 1,3078393$$

$$\log \sqrt{\frac{a}{g}} = 0,6539197 \quad \sqrt{\frac{a}{g}} = \frac{a}{C} = 4,507.$$

§. 59.

§. 59. De là nous aurons les nombres ſuivants (§. 24.)

v	$\log v g$	$\log V 2vg = \log c'$	c'	$\log \frac{c'}{C} = \log \cot 2\omega$	2ω
1516	4, 6755492	2, 4882896	307, 8	0, 3395200	24°, 35′ +
1460	4, 6592028	2, 4801164	302, 1	0, 3313468	25 , 0
1080	4, 5282737	2, 4146518	259, 8	0, 2658822	28 ,28
767	4, 3796454	2, 3403377	218, 9	0, 1915681	32 ,45 +
364	4, 0559514	2, 1784907	150, 8	0, 0297211	43 , 2

Ce qui donne encore

$\frac{1}{2}\pi - 2\omega$	ω	log. cot ω	log. cof 2 ω
65°, 25′	12°, 18′	0, 6614733	0, 3808897
65 , 0	12 , 30	0, 6542448	0, 3740517
61 , 32	14 , 14	0, 5957514	0, 3218028
57 , 15	16 , 23	0, 5316127	0, 2668232
46 , 58	21 , 31	0, 4042321	0, 1659459

§. 60. Or ces logarithmes étant tabulaires, il faut les multiplier par log 10 = 2,30258 pour les changer en hyperboliques. Et par la même raiſon il faut multiplier les dégrés $(\frac{1}{2}\pi - 2\omega)$ par la longueur d'un degré, qui eſt = 0,01745 &c. Mais les formules des §. 24. 25.

$$T = (\tfrac{1}{2}\pi - 2\omega + \log \cot \omega)\,\frac{a}{C}$$

$$x = a \log \text{cofec. } 2\omega$$

demandent encore qu'on multiplie les log. cot ω par $\frac{a}{C}$, que nous avons trouvé être = 4,507 & les log. cofec 2 ω par $a = 634,9$. De là, en multipliant d'abord ces multiplicateurs, il ſuffira de multiplier les dégrés $(\frac{1}{2}\pi - 2\omega)$ par 0, 07864, & les log. cot ω par

par 10,378, pour avoir les tems de la montée & de la deſcente, & partant les ſommes, & enfin les log. coſec. 2ω par 1462, pour avoir les hauteurs x, ce qui donnera

Tems montée	calculés deſcente	ſomme	Tems obſervés	Différence	Hauteurs
$5''$,15	$6''$,87	$12''$,02	$12''\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{8}''$	567,0
5 ,11	6 ,79	11 ,90	12	$+\frac{1}{10}$	546,9
4 ,84	6 ,18	11 ,02	11	0	470,6
4 ,50	5 ,52	10 ,02	10	0	390,2
3 ,69	4 ,19	7 ,88	$7\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	242,6

§. 61. Je regarde ces différences des tems comme nulles. Car les dégrés d'élaſticité de l'air comprimé dans la boëte différoient trop peu entre eux, pour qu'ils euſſent du produire une différence d'une $\frac{1}{2}$ ſeconde dans le tems. Nous voyons que la ſeconde, la troiſieme, & la quatrieme obſervation diffèrent chacune d'une ſeconde entiere, & que pour produire cette différence, celle de l'élaſticité a du être de près de 2 pieds de mercure. (§. 50.) Mais la premiere & la ſeconde expérience ne différoient que d'un $\frac{1}{3}$ de pied, ce qui ne pourra produire qu'une $\frac{1}{8}$ partie de ſeconde de différence dans le tems; minutie qui ne pouvoit être obſervée, quoiqu'elle ait pu porter l'obſervateur à compter pour la premiere obſervation une demi-ſeconde davantage. On peut juger de la même maniere des $\frac{2}{5}$ ſecondes, dont la derniere expérience diffère du calcul. De la ſorte ces expériences ſont telles, qu'au lieu de changer la moindre choſe au principe de la réſiſtance proportionelle au quarré des viteſſes, elles le confirment autant qu'on peut le ſouhaiter. Les viteſſes, dans les deux premieres expériences ſurtout, étoient telles, que ſi la boule avoit été tirée horizontalement avec une viteſſe infinie, elle auroit été réduite à cette viteſſe après la deuxieme ſeconde de tems (§. 12. 9.) Mr. *Sulzer*, d'après les raiſons aſſez plauſibles que donne Mr. *Euler*, a joint au quarré des viteſſes encore une petite fonction du biquarré. On peut voir dans ſon Mémoire, que les

deux

deux dernieres expériences ſe trouvant aſſez conformes aux réſultats de ſon calcul, les deux premieres, dans leſquelles ce biquarré ſe trouve conſidérablement plus grand, différent au de là d'une ſeconde, & par conſéquent de la 10 partie du tems entier.

§. 62. Déterminons encore pour la premiere de ces expériences le tems que la boule auroit employé à monter & à deſcendre dans le vuide, & dans un air dont la réſiſtance auroit été double de ce qu'elle a été en effet. Le tems pour le vuide ſe trouve aiſément. Car il eſt $= 2c' : g$ & par conſéquent $= \frac{615,6}{31,25} = 19,7$ ſecondes. Au contraire dans un air, dont la réſiſtance ſeroit double, la valeur de la lettre a ſe réduit à la moitié de ce que nous avons trouvé, ou à 317,4 pieds. Il ſera donc

$$\begin{aligned}
\log\ a &= 2,5016593\\
\log\ g &= 1,4948500\\
\log\ ag &= 3,9965093 = \log CC\\
\log\ C &= 1,9982546 \text{ donc } C = 99,60 \text{ pieds}\\
\log\ a : g &= 1,0068093\\
\log \sqrt{\tfrac{a}{g}} &= 0,5034046 \text{ donc } \sqrt{\tfrac{a}{g}} = \tfrac{a}{C} = 3,187.
\end{aligned}$$

De là nous aurons

$$\begin{aligned}
\log\ C &= 1,9982562\\
\log\ c' &= 2,4882896\\
\log\ c' : C &= 0,4900334 = \log \cot a\ \omega\\
2\ \omega &= 17^{\circ}, 56'\\
\omega &= 8\ ,\ 58\\
\tfrac{1}{2}\pi - 2\omega &= 72\ ,\ 4\\
\log.\ \cot\ \omega &= 0\ ,\ 8019258.
\end{aligned}$$

Ce logarithme étant changé en logarithme hyperbolique, eſt $= 1,8465$, & l'arc $(\frac{1}{2}\pi - 2\omega)$ étant converti en parties déci-

males du rayon eſt = 1, 2576. Or l'un & l'autre de ces nombres doit encore être multiplié par $c' : C = 3, 187$, pour avoir le tems

de la montée = 4″, 01
de la deſcente = 5 , 89
Tems T . . . = 9 , 90.

Nous voyons de là que tems décroît de maniere, que la denſité de l'air étant repréſentée par les abſciſſes, & le tems T par les ordonnées, cette courbe devient aſſymtotique, & que les tems décroiſſent plus lentement que ne croiſſent les denſités, &c. Car il eſt pour la

denſité = 0 . . . . T = 19, 7
= 1 . . . . . = 12, 0
= 2 . . . . . = 9, 9. &c.

La hauteur x différe également. Elle eſt $x = a$ log. coſec. 2ω (§. 25.) Or le logarithme tabulaire de coſec 2ω eſt = 0, 5119665, qui étant multiplié par 2, 30258 $a = 731$, donne $x = 384, 3$. de ſorte qu'il eſt pour la

denſité = 0 $x = 1516$
= 1 . . . = 567
= 2 . . . = 384 &c.

d'où il paroit, que les hauteurs décroiſſent plus vite que les tems.

§. 63. Jusqu'ici nous avons conſidéré le cas où le milieu réſiſtant eſt en repos. Il ne ſera pas inutile de donner encore quelque attention à ceux où il a quelque mouvement. Nous ſuppoſerons ce mouvement rectiligne & uniforme; & pour commencer par le cas le plus ſimple, nous le regarderons comme étant directement oppoſé à celui du corps qui s'y meut. Soit donc AB la droite, dans Fig. 1.

laquel-

laquelle un corps ſphérique ſe meuve de A vers B, de ſorte qu'après un tems $= \tau$ il ait parcouru l'eſpace $AP = x$. Que ſa viteſſe en P ſoit $= c$. Avec cette viteſſe le corps pourroit parcourir dans le tems $d\tau$ l'eſpace Pq, s'il n'étoit rétardé par la réſiſtance & par l'action du fluide. Le fluide ſe mouvant de B vers A, avec une viteſſe, que nous nommerons $= \gamma$, la viteſſe rélative du corps ſera $= \gamma + c$; & c'eſt du quarré de cette viteſſe que dépend l'effet de la réſiſtance, ou le retardement $pq = -ddx$. Nous aurons donc

$$-ddx = (c+\gamma)^2\, d\tau^2 : a.$$

Mais il eſt

$$dx = c.\, d\tau$$
$$ddx = dc.\, d\tau.$$

Donc, en ſubſtituant cette valeur, nous aurons

$$-dc = (c+\gamma)^2\, d\tau : a$$
$$-\frac{dc}{(c+\gamma)^2} = \frac{d\tau}{a}$$

& l'intégrale, en faiſant la viteſſe initiale $= G$, ſera

$$\frac{\tau}{a} = \frac{1}{c+\gamma} - \frac{1}{G+\gamma}$$

de ſorte que le tems eſt en raiſon réciproque de la viteſſe rélative $c + \gamma$.

§. 64. L'équation

$$-\frac{dc}{(c+\gamma)^2} = \frac{d\tau}{a}$$

ſe change en

$$-\frac{c\,dc}{(c+\gamma)^2} = \frac{c\,d\tau}{a} = \frac{dx}{a}$$

ce qui donne l'intégrale

$$\frac{x}{a} = \log \frac{G+\gamma}{c+\gamma} - \frac{\gamma}{c+\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma+G}$$

Et, en exprimant la viteſſe c par la valeur du tems, il ſera

$$\frac{x}{a} = \log \left(\frac{\tau(G+\gamma)}{a} + 1 \right) - \frac{\gamma\tau}{a}$$

Dans cette formule $\gamma\tau$ eſt l'eſpace que le milieu parcourt dans le tems τ, & au contraire $a \log \left(\frac{\tau(G+\gamma)}{a} + 1 \right)$ eſt l'eſpace, que le corps auroit parcouru, ſi, en ſuppoſant le fluide en repos, le corps avoit eu la viteſſe initiale $G+\gamma$ (§. 11.) Ainſi l'eſpace x eſt la différence de ces deux eſpaces. Ou bien, en tranſpoſant les termes de cette équation, nous avons la ſuivante.

$$x + \gamma\tau = a \log \left(\frac{\tau(G+\gamma)}{a} + 1 \right)$$

dont l'un & l'autre membre dénote l'eſpace rélatif, ou la diſtance de la boule d'une particule du fluide emportée par ce fluide.

§. 65. L'équation que nous venons de trouver pour l'eſpace parcouru, nous préſente un *maximum*. Ce qui fait voir qu'une boule pouſſée contre le torrent du fluide avec une viteſſe quelconque eſt rallentie, en ſorte qu'après avoir parcouru un certain eſpace, ſa viteſſe devient $= 0$, & qu'elle commence à être entrainée par le fluide. Pour en trouver le tems, nous n'aurons qu'à faire $c = 0$, dans l'équation

$$\frac{\tau}{a} = \frac{1}{c+\gamma} - \frac{1}{G+\gamma},$$

& elle ſe change en

$$\frac{\tau}{a} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{G+\gamma},$$

Par exemple, dans la premiere expérience de Mr. *Sulzer*, nous avions la viteſſe initiale de la boule $= 307,8$ pieds, & la valeur de la lettre $a = 634,9$, ce qui donne

$$\tau = \frac{634,9}{\gamma} - \frac{634,9}{307,8+\gamma}$$

Suppoſons la viteſſe du vent $= 60$ pieds par ſeconde, & il ſe trouvera que le tems τ n'eſt que de $8,85$ ſecondes, de ſorte que cette boule étant tirée horizontalement avec une viteſſe de $307,8$ pieds, & contre un vent dont la viteſſe eſt de 60 pieds, rebrouſſera chemin en moins de 9 ſecondes, & elle ne fera que 618 pieds de chemin.

§. 66. Pour accommoder les formules que nous venons de trouver, au cas où le mouvement du fluide ſuit la même direction que le corps qui s'y meut, nous n'aurons qu'à prendre la lettre γ négative, ce qui donne

$$\frac{\tau}{a} = \frac{1}{c-\gamma} - \frac{1}{G-\gamma}$$

$$\frac{x}{a} = \log\frac{G-\gamma}{c-\gamma} + \frac{\gamma}{c-\gamma} - \frac{\gamma}{G-\gamma}$$

$$\frac{x}{a} = \log\left(\frac{\tau(G-\gamma)}{a}+1\right) + \frac{\gamma\tau}{a}$$

Ces formules auront lieu, lorsque la viteſſe initiale du corps eſt plus grande que celle du fluide, dans lequel il ſe meut. Mais, ſi le fluide ſe meut plus vite, on aura les formules ſuivantes

$$\frac{\tau}{a} = \frac{1}{\gamma-c} - \frac{1}{\gamma-G}$$

$$\frac{x}{a} = -\log\frac{\gamma-G}{\gamma-c} + \frac{\gamma}{\gamma-c} - \frac{\gamma}{\gamma-G}$$

$$\frac{x}{a} = -\log\left(1+\frac{\tau(\gamma-G)}{a}\right) + \frac{\gamma\tau}{a}.$$

§. 67.

§. 67. Ce qui donne pour le cas où le mouvement du corps commence par le repos

$$\frac{\tau}{a} = \frac{1}{\gamma - c} - \frac{1}{\gamma} = \frac{c}{\gamma - c}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{c}{\gamma - c} - \log \frac{\gamma}{\gamma - c}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{\gamma \tau}{a} - \log \left(1 + \frac{\tau \gamma}{a}\right).$$

Fig. 6. §. 68. Cette derniere formule ſe conſtruit de la maniere ſuivante. Ayant tiré à angle droit les lignes AB, RT, on fait $AB = AT = a$, & on tire par le point B une logarithmique EBM, dont la ſoutangente ſoit $AT = a$, l'axe RT. Après avoir enſuite tiré BT prolongée vers Q, & BP parallele à RT, on prend $PM = \tau\gamma$, & on aura $MQ = x$. Car il eſt

$$AR = BP = PQ = a \log \frac{RM}{AB}$$

$$RM = a + \tau\gamma$$

$$BP = PQ = a \log \frac{a + \tau\gamma}{a}$$

$$PM = \tau\gamma;$$

$$\text{donc} \quad QM = \tau\gamma - a \log \left(1 + \frac{\tau\gamma}{a}\right).$$

Si donc les tems croiſſent comme PM, les eſpaces croiſſent comme QM.

§. 69. L'équation

$$\frac{x}{a} = \frac{c}{\gamma - c} - \log \frac{\gamma}{\gamma - c}$$

étant

étant réſolue en une ſuite, nous donne

$$x = \frac{a\,c\,c}{2\gamma\gamma} + \frac{2\,a\,c^3}{3\,\gamma^3} + \frac{3\,a\,c^4}{4\,\gamma^4} + \text{&c.}$$

Si donc la viteſſe du fluide eſt incomparablement plus grande que celle du corps, & que le fluide ſoit fort rare, il ſuffira de garder le premier terme de cette ſuite, puisque les ſuivants s'évanouiſſent. Il ſera donc

$$x = \frac{a}{2\gamma\gamma} \cdot c\,c$$

La lettre a dépend de la denſité du fluide. Ainſi, ſi nous ſuppoſons que la peſanteur des corps dérive du mouvement d'un ſemblable fluide, le rapport $a : 2\gamma\gamma$ ſe définit par la loi de la chûte des corps. Car il eſt

$$x = \frac{c\,c}{2g}$$

d'où l'on tire

$$\frac{a}{2\gamma\gamma} = \frac{1}{2g}$$
$$a\,g = \gamma\gamma$$
$$g = \gamma\gamma : a = 31\tfrac{1}{4} \text{ pieds.}$$

§. 70. Mais, ſans nous arrêter à ces recherches, nous paſſerons à conſidérer le mouvement d'un corps ſphérique dans un milieu qui ſe meut dans une direction oblique, & qui par conſéquent non ſeulement altere la viteſſe du corps, mais qui en change en même tems la direction.

§. 71. Soit donc AB la direction du mouvement du fluide, de ſorte qu'il ſe meuve de A vers B, & que ſa viteſſe ſoit $= AF$. Soit AME la courbe que le corps parcourt, de ſorte qu'en A ſa direction ſoit perpendiculaire à celle du fluide. Suppoſons la viteſ- Fig. 7.

ſe en A = AG, & achevant le rectangle AFHG, tirons la diagonale AH. Faiſons

$$AF = \gamma$$
$$AG = Q$$
$$HAG = \psi$$

Suppoſons maintenant qu'après un certain tems $= t$, le corps ſoit parvenu en M, & que dans ce point ſa viteſſe ſoit $= c$. Il s'agira de voir, de quelle maniere il change de viteſſe & de direction.

§. 72. La viteſſe du fluide étant ſuppoſée conſtante & parallele, nous transférerons AF en MN, & ayant tiré la tangente MQ, nous ferons MQ $= c$, de ſorte que les droites MM, MQ, expriment les directions & les viteſſes du fluide & du corps qui s'y meut. Comme l'effet reſte le même, ſoit que le fluide pouſſe de N vers M, ou que le corps ſoit pouſſé de M vers N, en achevant le parallélogramme NMQP, & tirant la diagonale MP, cette diagonale repréſentera la direction, & la viteſſe qui naît de la compoſition des deux mouvemens du corps, de même que la direction ſuivant laquelle le corps eſt détourné de ſa route. Soit Pp l'effet qui en réſulte pendant le tems dt, & nous n'aurons qu'à transférer Pp en Qq, en gardant la même direction. De cette maniere le corps, au lieu de ſe mouvoir ſuivant la direction tangentielle MQ, ſe meut en effet par le petit arc Mq.

§. 73. Cet effet ſe réſout facilement en deux autres, paralleles & perpendiculaires à la direction NM. Prolongeant PQ en r, & abaiſſant ſur Qr la perpendiculaire qr, tirons encore MS parallele, & Mm, rqs perpendiculaires à AB; & faiſons

$$Am = x$$
$$mM = y$$

& il ſera

$$MS = dx$$
$$Qr = +ddx$$
$$Sr = dy$$
$$rq = -ddy$$

Nom-

Nommons encore la viteſſe ſuivant $MS = k$, celle qui eſt ſuivant $SQ = q$, & ces quantités ſe réduiront à des équations de la maniere ſuivante.

§. 74. La diagonale MP exprimant la viteſſe, nous avons d'abord.

$$Pp = Qq = PM^2 : a$$

Cette équation ſe réſout dans les deux ſuivantes

$$Qr = \quad ddx = \frac{PM \,.\, PR}{a}$$

$$rq = -ddy = \frac{PM \,.\, MR}{a}$$

Or il eſt

$$MR = SQ = dy$$
$$PR = PQ - RQ = \gamma d\tau - dx.$$

Donc en ſubſtituant ces valeurs, on aura

$$\frac{PM}{a} = \frac{ddx}{\gamma d\tau - dx} = -\frac{ddy}{dy}.$$

Mais il eſt

$$dx = k d\tau \qquad ddx = dk d\tau$$
$$dy = q d\tau \qquad ddy = dq d\tau.$$

Donc en ſubſtituant de nouveau

$$\frac{dk}{\gamma - k} = -\frac{dq}{q}$$

dont l'intégrale eſt

$$-\log \frac{\gamma - k}{\gamma} = \log \frac{Q}{q},$$

& partant

$$\frac{q}{Q} = \frac{\gamma - k}{\gamma},$$

ce qui veut dire

$$AG : HG = MR : RP.$$

d'où il ſuit, que la direction de la diagonale MP, ou $Q_q D$, qui eſt celle de la force compoſée, reſte par tout la même, ou qu'elle eſt par tout parallele à AH.

§. 75. Ayant donc trouvé

$$\frac{\gamma - k}{\gamma} = \frac{q}{Q}$$

cette équation étant multipliée par $d\tau$, ſe change en

$$d\tau - \frac{k\,d\tau}{\gamma} = \frac{q\,d\tau}{Q}$$

ce qui donne

$$d\tau - \frac{dx}{\gamma} = \frac{dy}{Q}$$

& partant l'intégrale

$$\tau - \frac{x}{\gamma} = \frac{y}{Q}$$

ou bien

$$\tau = \frac{x}{\gamma} + \frac{y}{Q}$$

c'eſt à dire le tems que le corps employe à parcourir l'arc AM eſt la ſomme du tems que le fluide employe pour parcourir l'abſciſſe Am, & de celui que le corps employeroit, ſi avec la viteſſe qu'il a en A, il avoit à parcourir l'ordonnée mM.

§. 76. Mais revenons à nos équations différentielles, & introduiſons-y l'angle HAG, dont nous venons de voir qu'il eſt conſtant. En conſéquence nous aurons pour les ordonnées

$$PM = MR. \text{ ſec. } \psi = dy \text{ ſec } \psi$$

&

& partant

$$- d\,dy = \frac{dy^2}{a \operatorname{cof}\psi}.$$

Mais il eſt

$$q\,d\tau = dy \qquad dq\,d\tau = d\,dy,$$

ce qui donne

$$- dq.\,d\tau = \frac{q^2\,d\tau^2}{a \operatorname{cof}\psi}$$

$$- \frac{dq}{qq} = \frac{d\tau}{a \operatorname{cof}\psi}$$

dont l'intégrale eſt

$$\frac{\tau}{a \operatorname{cof}\psi} = \frac{1}{q} - \frac{1}{Q} = \frac{Q - q}{Q\,q}.$$

Enſuite la même équation

$$- \frac{dq}{qq} = \frac{d\tau}{a \operatorname{cof}\psi}$$

nous donne

$$- \frac{dq}{q} = \frac{q\,d\tau}{a \operatorname{cof}\psi} = \frac{dy}{a \operatorname{cof}\psi}$$

dont l'intégrale eſt

$$\frac{y}{a \operatorname{cof}\psi} = \log \frac{Q}{q}$$

& de là, en exprimant Q par τ,

$$\frac{y}{a \operatorname{cof}\psi} = \log \left(1 + \frac{\tau Q}{a \operatorname{cof}\psi}\right)$$

$$\tau = \frac{a \operatorname{cof}\psi}{Q} \left(e^{y : a \operatorname{cof}\psi} - 1\right).$$

§. 77. De la même maniere nous avons pour les abſciſſes

$$\frac{ddx}{\gamma d\tau - dx} = \frac{PM}{a} = \frac{(\gamma d\tau - dx)}{a \sin \psi}$$

mais il eſt

$$k d\tau = dx \qquad dk d\tau = ddx.$$

Ces valeurs étant ſubſtituées, il ſera

$$\frac{(\gamma - k)^2 d\tau}{a \sin \psi} = dk$$

$$\frac{d\tau}{a \sin \psi} = \frac{dk}{(\gamma - k)^2},$$

dont l'intégrale eſt

$$\frac{\tau}{a \sin \psi} = \frac{1}{\gamma - k} - \frac{1}{\gamma}.$$

§. 78. Enſuite l'équation

$$\frac{d\tau}{a \sin \psi} = \frac{dk}{(\gamma - k)^2}$$

ſe change en

$$\frac{k d\tau}{a \sin \psi} = \frac{k dk}{(\gamma - k)^2} = \frac{dx}{a \sin \psi}$$

d'où l'on tire l'intégrale

$$\frac{x}{a \sin \psi} = \log \left(\frac{\gamma - k}{\gamma}\right) + \frac{k}{\gamma - k}.$$

§. 79. Enfin nous avons (§. 75.)

$$\tau = \frac{x}{\gamma} + \frac{y}{Q}$$

ce qui donne

$$Q\tau = \frac{Qx}{\gamma} + y$$

ou bien

$$Q\tau = x \cot\psi + y = a\cos\psi\,(e^{y:a\cos\psi} - 1)\ (\S.76.)$$

Donc il eſt

$$x = a \sin\psi\,(e^{y:a\cos\psi} - 1) - y.\ \text{tang}\ \psi.$$

ou

$$\frac{x}{a\sin\psi} = e^{y:a\cos\psi} - 1 - \frac{y}{a\cos\psi}.$$

Faiſant $AT = AB = RP = 1$, Fig. 6.

$AR = BP = y : a\cos\psi$

il ſera $QM = \frac{x}{a\sin\psi}$.

Donc BP de même que BQ eſt proportionelle à y, & QM à x.

§. 80. Cette conſtruction fait voir, comment la courbe AME, ſe conſtruit aiſément moyennant une logarithmique. Il en réſulte pareillement, que la branche AME n'eſt point aſymtotique, mais bien celle qui s'étend de l'autre côté de la ligne AB, & qu'en général la courbe AME n'eſt autre choſe qu'une logarithmique placée obliquement. Fig. 7.

§. 81. Quoique, depuis le point A, le mouvement du fluide commence à accélérer celui du corps, l'effet de la réſiſtance ne laiſſe pas cependant de l'emporter encore, & le corps doit continuer de ſe mouvoir vers E, avant que ces deux effets ſe contrebalancent. L'équation (§. 75.)

$$\frac{\gamma - k}{\gamma} = \frac{q}{Q}$$

nous

nous conduit le plus facilement à trouver le point où cela arrive. Elle ſe change en

$$q = Q - k \cot \psi$$

d'où l'on obtient le quarré de la viteſſe tangentielle

$$c^2 = q^2 + k^2 = k^2 + Q^2 - 2Qk \cot \psi + k^2 \cot \psi^2$$

& en prenant les différentielles

$$o = c\,dc = (k - Q \cot \psi + k \cot \psi^2):$$

ce qui donne

$$k = Q \sin \psi \cos \psi$$
$$q = Q \sin \psi^2$$
$$c = Q \sin \psi.$$

Donc

$$q = c \sin \psi$$
$$k = c \cos \psi.$$

Ainſi le point où la viteſſe tangentielle recommence à croître, ſe trouve là où la diagonale PM eſt perpendiculaire ſur la courbe. L'équation (§. 76.)

$$y = a \cos \psi . \log \frac{Q}{q}$$

nous fournit l'ordonnée repondante à ce point, ſi nous y ſubſtituons la valeur

$$\frac{Q}{q} = \operatorname{cosec} \psi^2$$

que nous venons de trouver. Cette ordonnée ſera donc

$$y = a \cos \psi . 2 \log . \operatorname{cosec} \psi.$$

§. 82. Après les deux cas, que nous venons de conſidérer, nous paſſerons à contempler quelques uns de ceux où il ſe trouve un équi-

équilibre entre l'action de la gravité & celle du fluide, dont le mouvement tend à entrainer un corps qui s'y trouve. A l'exception des fontaines ſaillantes, il n'y a gueres de cas où un fluide ſe meuve de bas en haut dans une direction oppoſée à celle de la peſanteur. Dans ces cas l'équilibre aura lieu, lorsqu'il ſera

$$CC = ng,$$

c'eſt à dire, là où la viteſſe du fluide eſt la même que celle que la boule acquerroit en tombant dans ce fluide d'une hauteur infinie. Si donc on met ſur le tuyau d'une fontaine qui jette ces eaux verticalement, une boule dont la peſanteur ſpécifique ſurpaſſe celle de l'eau, & dont le diametre eſt plus petit, ou du moins pas plus grand que celui de l'ouverture du tuyau, cette boule ſera toujours pouſſée à une certaine hauteur, où elle reſtera comme ſuſpendue en équilibre, & ce point ſera là où il eſt

$$CC = ag.$$

Il eſt cependant poſſible, que ce point ne ſe trouve pas, & cela arrive toutes les fois que la viteſſe initiale du fil d'eau n'eſt pas ſi grande que la viteſſe C, ou la racine quarrée de ag.

§. 83. Si le mouvemeot du fluide eſt horizontal ſuivant la direction AB, & qu'on y ſuſpende une boule plus peſante, B, à un fil BC, l'action du fluide empêchera la boule d'être dans une poſition inclinée BC, dans laquelle la boule reſtera en équilibre. Il y a longtems qu'on s'eſt ſervi de ce moyen pour déterminer la viteſſe du fluide. Ainſi je ne rapporterai ce cas ici, que pour en exprimer les formules par les mêmes lettres dont je me ſuis ſervi dans les calculs expoſés ci-deſſus. Soit donc la viteſſe du fluide $= c$, ſon action ſur la boule ſera $= ccd\tau^2 : a = BM$. Mais la boule ne pouvant ſe mouvoir que dans une direction perpendiculaire au fil BC, nous réſoudrons cette action en MP & PB. Faiſant donc l'angle $BCA = \varphi$, nous aurons l'action ſuivant $MP = ccd\tau^2 \cos\varphi : a$. Au contraire l'action de la gravité eſt $= gd\tau^2 = BG$, & elle doit Fig. 8.

pareillement être réſolue en GQ & QB. Il ſera donc $GQ = g\,d\tau^2 \sin\Phi$. De là nous aurons, en poſant CB = 1,

$$\frac{cc\,d\tau^2 \cos\Phi}{a} - g\,d\tau^2 \sin\Phi = dd\Phi.$$

Or, dans le cas de l'équilibre, nous avons $dd\Phi = 0$; il ſera donc

$$cc = ag \operatorname{tang}\Phi = CC \operatorname{tang}\Phi.$$

Ce qui fait voir que, toutes les fois que l'angle Φ eſt de 45 degrés, la viteſſe c eſt = C, & par conſéquent la même que celle que la boule acquiert en tombant dans ce fluide d'une hauteur infinie.

§. 84. Si on veut ſe ſervir de ce moyen pour déterminer la viteſſe du vent, il ſera bon d'avoir égard à différentes circonſtances qui peuvent en aſſurer le ſuccès. Je remarque d'abord que la lettre a eſt variable, puiſqu'elle dépend de la denſité de l'air, de ſorte qu'il eſt (§. 33.)

$$a = \tfrac{16}{3} r\,D.$$

Nous avons déjà vu ci-deſſus comment la denſité de l'air varie, & de quelle maniere il faut l'eſtimer, en employant le barometre & le thermometre. Mais, comme la lettre a dépend encore du diametre de la boule & de ſa gravité ſpécifique, il convient de déterminer ces deux points, de façon que les angles Φ ne ſoient ni trop grands ni trop petits. Suppoſons, par exemple, que l'angle $\Phi = 45$ degrés doive répondre à la viteſſe du vent de 100 pieds du Rhin, par ſeconde, quand la denſité de l'air eſt 850 fois moins grande que celle de l'eau. Nous aurons donc pour ce cas C = 100, & partant

$$CC = ag = 10000$$

$$a = \frac{10000}{31\frac{1}{4}} = 320 \text{ pieds.}$$

Donc $320 = \tfrac{16}{3} r\,D$

$$r\,D = 60 \text{ pieds.}$$

Moyen-

Moyennant cette équation, la gravité ſpécifique de la boule étant donnée, on en trouve le demi-diametre r. Suppoſons, par exemple, que la boule ſoit d'un bois leger, dont la gravité ſpécifique ne ſurpaſſe celle de l'air que 600 fois; nous aurons $r = \frac{6}{600} = \frac{1}{100}$ pieds. On diminuera ce demi-diametre en prenant une boule plus peſante ſpécifiquement, ou en ſe contentant d'une viteſſe C moins grande. Car on voit qu'il eſt en général

$$r = \frac{3CC}{16D}$$

§. 85. Si, au lieu de la boule, on ne ſuſpend qu'une regle, ou un corps parallelepipede, l'effet de l'action du fluide ſe calcule autrement. Que le poids en ſoit $= P$, le poids d'un volume égal du fluide $= P : D$, l'épaiſſeur $= h$, & nous aurons (§. 31. 32.)

$$\frac{aP}{2hD} = P$$

$$a = 2hD$$

$$CC = ag = 2ghD.$$

§. 86. Enſuite l'action abſolue du fluide eſt également

$$MB = \frac{cc}{a} d\tau^2,$$

mais le plan BC étant oblique, cette action ſera moindre en raiſon du ſinus d'incidence, puisque la quantité du fluide diminue dans ce rapport. Cette action eſt encore moindre à cauſe de l'obliquité d'incidence qui en diminue l'efficace, de ſorte que nous avons

$$MP = \frac{cc d\tau^2}{a} \cdot \cos\Phi^2,$$

& partant

$$MP - QG = \frac{cc d\tau^2 \cos\Phi^2}{a} - g d\tau^2 \sin\Phi = dd\Phi.$$

Or,

Or, pour le cas de l'équilibre, il eſt $dd\Phi = o$, donc il ſera

$$\frac{cc}{a} \operatorname{cof}\Phi^2 = g \operatorname{ſin}\Phi.$$

$$cc = \frac{ag \operatorname{ſin}\Phi}{\operatorname{cof}\Phi^2} = CC \operatorname{tang}\Phi . \operatorname{ſec}\Phi.$$

§. 87. Si ce plan n'eſt point ſuſpendu ou voluble autour d'un point fixe C, le calcul ſe fait encore d'une autre maniere. Fig. 9. Que le plan ſoit CE, la direction du mouvement du fluide AB, ſa viteſſe $= c$. Soit BN l'action du fluide, qui réſulteroit ſi ſon mouvement étoit perpendiculaire au plan; & il ſera

$$BN = \frac{cc}{a} d\tau^2.$$

Mais cette action eſt diminuée en raiſon de BN à MB, puiſqu'un plan oblique eſt expoſé à une moindre quantité du fluide. Elle eſt encore diminuée dans le rapport de MB à MP, parce que l'obliquité d'incidence en diminue la force. Enfin cette action MP ſe réſout en PR & PQ, de ſorte qu'il n'y a que cette derniere qui s'oppoſe à celle de la gravité. Faiſant donc l'angle $EBF = \Phi$, nous aurons

$$PQ = \frac{cc d\tau^2}{a} . \operatorname{cof}\Phi^2 . \operatorname{ſin}\Phi.$$

Soit donc l'action de la gravité $= BG = g d\tau^2$, & il ſera

$$\frac{cc}{a} . d\tau^2 . \operatorname{cof}\Phi^2 . \operatorname{ſin}\Phi - g d\tau^2 = dd x.$$

Et dans le cas de l'équilibre, il eſt $dd x = o$; donc

$$cc = ag : \operatorname{cof}\Phi^2 \operatorname{ſin}\Phi.$$

Si donc la viteſſe du fluide eſt telle que le demande cette équation, le plan EC ne montera ni ne tombera, mais il ſera mu horizontalement avec une viteſſe qui eſt due à la partie de l'action du fluide $= PR =$

$$\frac{cc}{a} d\tau^2 . \operatorname{ſin}\Phi^3.$$

§. 88.

§. 88. Cette derniere équation nous offre un *maximum*. Car, la lettre a dépendant du poids du plan, on peut la conſidérer comme variable. Il s'agit donc de définir les angles Φ, où ce poids peut être le plus grand poſſible, en gardant la même viteſſe du fluide. Il eſt donc

$$a = \frac{cc}{g} \cdot \text{ſin}\,\Phi\,(1 - \text{ſin}\,\Phi^2)$$

$$da = 0 = \frac{cc}{g}\,(d\,\text{ſin}\,\Phi - 3\,\text{ſin}\,\Phi^2 \cdot d\,\text{ſin}\,\Phi)$$

$$\text{ſin}\,\Phi^2 = \tfrac{1}{3}.$$

Mais il eſt en général

$$1 - 2\,\text{ſin}\,\Phi^2 = \text{coſ}\,2\,\Phi:$$

donc il ſera

$$\text{coſ}\,2\,\Phi = \tfrac{1}{3};$$

ce qui donne l'angle $\Phi = 70°, 32'$. Si donc l'angle EBF eſt de $70\frac{1}{2}$ degrés, le plan EC pourra avoir le plus grand poids poſſible. Mais, ſi le poids eſt moins grand, il eſt clair qu'on aura le choix de faire l'angle Φ plus grand ou plus petit que $70\frac{1}{2}$ degrés, & qu'on trouvera toujours un angle tel que le plan ne pourra ni tomber ni deſcendre. On n'aura pour cet effet qu'à réſoudre l'équation

$$\text{ſin}\,\Phi - \text{ſin}\,\Phi^3 = \frac{ag}{cc} = \frac{CC}{cc},$$

& n'en retenir que les racines poſitives. C'eſt à dire qu'on fera

$$-\frac{3CC\sqrt{3}}{2cc} = \text{coſ}\,w,$$

& on aura les trois racines

$$\text{ſin}\,\Phi = \sqrt{\tfrac{4}{3}} \cdot \text{coſ}\,\tfrac{1}{3}w$$

$$\text{ſin}\,\Phi' = \sqrt{\tfrac{4}{3}} \cdot \text{coſ}\,(\tfrac{1}{3}w \pm 120°).$$

Entre ces trois racines il y en a toujours une qui eſt plus grande que 1, & qui par là même ne ſauroit avoir lieu, puisque les ſinus ne ſont jamais plus grands que le rayon. Or l'angle w eſt toujours plus grand que 90 degrés; donc $\frac{1}{3}w > 30°$, & $\frac{1}{3}w + 120° > 150$, de la $\text{cof}(\frac{1}{3}w + 120) > V\frac{3}{4}$. Ainſi la valeur de $V\frac{4}{3}.\text{cof}(\frac{1}{3}w + 120°)$ eſt non ſeulement négative, mais en même tems auſſi plus grande que le rayon. Les deux racines ſeront donc $V\frac{4}{3}.\ \text{cof}\frac{1}{3}w$, & $V\frac{4}{3}\ \text{cof}(\frac{1}{3}w - 120°)$. Du reſte il convient de remarquer, que tout ceci n'a lieu, que lorsque le plan EC n'a point encore reçu de mouvement. Car, dès qu'il ſe meut le calcul doit être fait autrement puisqu'il faudra conſidérer ce qui s'y trouve de rélatif.

§. 89. Paſſons maintenant à conſidérer le cas où une boule, jettée obliquement dans un milieu réſiſtant, eſt expoſée en même tems à la réſiſtance du milieu & à l'action de la gravité. Soit CAB la courbe qu'elle parcourt, AD la droite verticale qui paſſe par le ſommet de cette courbe, EAQ la droite horizontale qui paſſe par le même ſommet A. Que la boule, après avoir paſſé par A, parvienne au point M, & que ſa viteſſe en M ſoit $= c$, de ſorte qu'avec cette viteſſe elle pourroit parcourir l'eſpace Mq dans le tems $d\tau$. Mais la réſiſtance la retardant, elle ne parvient qu'en π, & l'action de la gravité fait que réellement elle ſe trouve en m. Nommons

Planche IV. Fig. 10.

$$AP = x \qquad PQ = NM = dx$$
$$MP = y \qquad Nq = dy$$
$$\text{l'arc } AM = v \qquad Mm = dv$$
$$\text{l'angle } PMT = \phi,$$

Faiſons encore la viteſſe horizontale $= k$, la viteſſe verticale $= q$, de ſorte qu'il ſoit

$$c\,d\tau = dv$$
$$k\,d\tau = dx$$
$$q\,d\tau = dy,$$

&

& il ſera

$$k^2 + q^2 = c^2$$
$$k = c \sin \varphi$$
$$q = c \cos \varphi.$$

§. 90. Ce qui étant poſé, il s'agit de déterminer la diminution des viteſſes c, k, q. Je remarque en conſéquence, que la viteſſe tangentielle c s'altere par la réſiſtance auſſi bien que par la gravité. Le premier effet ſera $= \frac{c\,dv}{a}$, parce qu'il eſt en raiſon de la viteſſe même & en celle de l'eſpace parcouru. Cet effet influe proportionellement ſur les viteſſes horizontale & verticale, de ſorte qu'il ſera pour la verticale $= \frac{q\,dv}{a} = \frac{c\,dy}{a}$, pour l'horizontale $= \frac{k\,dv}{a} = \frac{c\,dx}{a}$. Or la gravité agiſſant verticalement, elle n'altere point la viteſſe horizontale. Nous aurons donc

$$\frac{c\,dx}{a} = \frac{k\,dv}{a} = -\,dk.$$

ce qui donne

$$\frac{dv}{a} = -\,\frac{dk}{k}.$$

Nommant donc la viteſſe au ſommet $A = G$, nous aurons l'intégrale

$$-\log \frac{k}{G} = \frac{v}{u}.$$

Si donc les parties de l'arc croiſſent en progreſſion arithmétique, les viteſſes horizontales décroiſſent en progreſſion géometrique, ou bien le logarithme de la viteſſe horizontale eſt toujours en raiſon de l'arc parcouru par la boule. Cette propoſition eſt fort analogue à celles que nous avons trouvées pour le mouvement horizontal & pour la chûte des corps dans un milieu réſiſtant (§. 10. 19. 20.)

§. 91.

§. 91. La gravité agiſſant verticalement, elle augmente la viteſſe verticale d'une partie $= g\,d\tau = g\,dy : q$. Il ſera donc

$$\frac{g\,dy}{q} - \frac{c\,dy}{a} = dq$$

§. 92. Enfin, cet effet de la gravité étant $= \pi m$, il n'augmente l'arc parcouru que de la partie $\mu m = \pi m \cos\Phi$. Il ſera donc

$$\frac{g\,dy \cdot \cos\Phi}{q} - \frac{c\,dv}{a} = dc.$$

§. 93. Mais il eſt

$$dy : q = dv : c;$$

donc en ſubſtituant il ſera

$$\frac{g\,dv\cos\Phi}{c} - \frac{c\,dv}{a} = dc,$$

& partant

$$\frac{dv}{ac} = \frac{d\tau}{a} = \frac{dc}{ag\cos\Phi - cc}.$$

§. 94. La formule du §. 91.

$$\frac{g\,dy}{q} - \frac{c\,dy}{a} = dq$$

donne pareillement

$$\frac{dy}{aq} = \frac{d\tau}{a} = \frac{dq}{ag - cq} = \frac{dq}{ag - cc\cos q}.$$

§. 95. Enfin nous aurons auſſi (§. 90.)

$$\frac{dv}{ac} = \frac{d\tau}{a} = -\frac{dk}{ck}.$$

de

de ſorte que le tems $d\tau$ s'exprime par les viteſſes de trois manieres différentes, en ce qu'il eſt

$$\frac{d\tau}{a} = -\frac{dk}{kc} = \frac{dc}{ag\cos\Phi - cc} = \frac{dq}{ag - cc.\cos\Phi}.$$

En comparant ces formules avec celles que nous avons trouvées pour le mouvement horizontal & pour la chûte des corps dans des milieux réſiſtans (§. 8. 15.) on trouvera aiſément de quelle maniere elles en différent. Elles ſont d'une même forme, mais plus embaraſſantes, puisqu'il s'y trouve, ou l'angle Φ, ou deux des viteſſes c, k, q, à la fois; & c'eſt l'unique cauſe, qui les rend plus intraitables.

§. 96. Reprenons cependant l'équation

$$\frac{dc}{ag\cos\Phi - cc} = \frac{dq}{ag - cc.\cos\Phi},$$

& elle ſe transformera en

$$\frac{c\,dc}{ag\cos\Phi.\,c - c^3} = \frac{dq}{ag - cc\cos\Phi}.$$

Mais il eſt

$$c\cos\Phi = q;$$

donc il ſera

$$\frac{c\,dc}{ag\,q - c^3} = \frac{dq}{ag - cq},$$

ce qui donne

$$ag\,(c\,dc - q\,dq) = qc^2\,dc - c^3q.$$

Mais il eſt

$$c\,dc - q\,dq = k\,dk;$$

donc il ſera

$$ag\,k\,dk = (q\,dc - c\,dq)\,cc,$$

ou bien

$$\frac{ag\,k\,dk}{cc\,qq} = \frac{q\,dc - c\,dq}{qq} = d\left(\frac{c}{q}\right).$$

Mais il eſt

$$c : q = 1 : \text{cof}\,\Phi$$
$$1 : c = \text{ſin}\,\Phi : k$$
$$1 : q = \text{tang}\,\Phi : k;$$

donc en ſubſtituant il ſera

$$\frac{ag\,k\,dk.\,\text{ſin}\,\Phi^2.\,\text{tang}\,\Phi^2}{k^4} = d\left(\frac{1}{\text{cof}\,\Phi}\right),$$

& partant

$$\frac{ag\,dk}{k^3} = \frac{\text{cof}\,\Phi^2}{\text{ſin}\,\Phi^4}\cdot d\,\frac{1}{\text{cof}\,\Phi} = -\frac{d\,\text{cof}\,\Phi}{\text{ſin}\,\Phi^4} = \frac{d\Phi}{\text{ſin}\,\Phi^3}$$

$$-\frac{ag\,dk}{k^3} = -\frac{d\Phi}{\text{ſin}\,\Phi^3},$$

dont l'intégrale eſt

$$\frac{ag}{kk} = \frac{\text{cof}\,\Phi}{\text{ſin}\,\Phi^2} - \log\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\Phi + \text{conſt.}$$

La conſtante eſt $= ag : GG$, donc il ſera

$$\frac{k}{G} = \frac{C}{\sqrt{(C^2 + G^2(\text{cof}\,\Phi : \text{ſin}\,\Phi^2 - \log\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\Phi))}},$$

ou bien

$$\frac{k}{G} = \frac{C : G}{\sqrt{(C^2 : G^2 + \text{cof}\,\Phi : \text{ſin}\,\Phi^2 - \log.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\Phi)}}.$$

§. 97. Or la quantité $\text{cof}\,\Phi : \text{ſin}\,\Phi^2 - \log.\text{tang}\,\frac{1}{2}\Phi$ eſt la longueur d'un arc parabolique, depuis le ſommet de la parabole juſqu'au point où elle s'incline vers ſon axe ſous un angle $= \Phi$, & le parametre de cette parabole doit être pris $= 4$. Si on prend ſur cette parabole, de l'autre côté du ſommet, un arc $= C^2 : G^2$, on déterminera le point où l'inclinaiſon de la parabole vers ſon axe eſt la même que celle de l'aſymtote EF vers la verticale FAD, de ſorte qu'en

qu'en comptant l'arc parabolique depuis ce point, & ſa longueur juſqu'au point où ſon inclinaiſon eſt $= \Phi$, étant poſée $= p$, on aura

$$\frac{k}{G} = C : G\sqrt{p}.$$

§. 98. Mais nous avons vu (§. 90.) qu'il eſt

$$-\log\frac{k}{G} = \frac{v}{a};$$

Donc, en ſubſtituant la valeur de k, il ſera

$$\frac{v}{a} = \log\frac{G}{C} + \tfrac{1}{2}\log p.$$

Ayant conſtruit une parabole cab, dont le parametre ſoit $= 4$, & dont l'axe ad ſoit parallele à AD, tirez une tangente fe parallele à l'aſymtote FE, & une autre mt parallele à la tangente MT, & vous aurez

$$\frac{AM}{a} = \frac{v}{a} = \log.\text{arc. } eam - \log.\text{arc. } am = \log\frac{\text{arc. } eam}{\text{arc. } am},$$

$$\frac{k}{G} = \frac{\sqrt{\text{arc. } am}}{\sqrt{\text{arc. } eam}}.$$

§. 99. Nous avons trouvé, qu'il eſt (§. 90. 96.)

$$\frac{c\,dx}{a} = -dk$$

$$\frac{ag\,dk}{k^3} = \frac{d\Phi}{\sin\Phi^3};$$

d'où il ſuit

$$\frac{g\,c\,dx}{k^3} = -\frac{d\Phi}{\sin\Phi^3}.$$

Mais il eſt

$$c = k : \sin\Phi ;$$

donc en ſubſtituant, il ſera

$$\frac{g\,dx}{k^2} = -\frac{d\Phi}{\sin\Phi^2} = d\cot\Phi$$

$$g\,dx = k^2 . d\cot\Phi .$$

Et de là

$$g\,dy = k^2 . \cot\Phi . d\cot\Phi$$

$$g\,dv = k^2 . \operatorname{cosec}\Phi . d\cot\Phi$$

$$\frac{g\,dx}{k} = g\,d\tau = k . d\cot\Phi .$$

Or la viteſſe horizontale étant donnée par une fonction de l'angle Φ (§. 96.) on n'aura qu'à la ſubſtituer dans ces formules, pour avoir des équations différentielles entre x, y, τ & Φ.

§. 100. Mais ces équations étant peu traitables, nous remarquerons que le parametre de la parabole cam étant poſé $= 4$, & l'angle $qmt = \Phi$, il ſera

$$\tfrac{1}{2} ns = d\cot\Phi$$

$$\tfrac{1}{2} mn = \cot\Phi . d\cot\Phi .$$

Nous avons de plus (§. 98.)

$$k = G\,V\left(\frac{am}{eam}\right).$$

Donc, en ſubſtituant ces valeurs dans les formules du §. 99. il ſera

$$2g\,dx = G^2 . \frac{am}{eam} . ns$$

$$2g\,d\tau = G . V\left(\frac{am}{eam}\right) . ns$$

$$2g\,dy = G^2 . \frac{am}{eam} . mn$$

Et

Et par ces formules il ſera facile de conſtruire des lignes courbes, dont les eſpaces repréſentent les valeurs x, y, τ. Car les arcs am, eam, ſe déterminant par les angles φ, on n'aura qu'à faire les ordonnées

$$qi = G^2 . \frac{am}{eam}$$

$$qh = G \sqrt{\frac{am}{eam}}$$

$$\lambda l = G^2 . \frac{am}{eam},$$

& on aura les eſpaces des courbes conſtruites de cette façon

$$aIiq = 2gx$$
$$aHhq = 2g\tau$$
$$aL l\lambda = 2gy.$$

Ces trois courbes approchent d'autant plus des lignes droites paralleles à aq & $a\lambda$, moins la réſiſtance eſt grande; & ſi elle eſt $= 0$, on aura au lieu de ces courbes des droites paralleles à aq, $a\lambda$, dont par conſéquent les eſpaces ſont proportionels aux ordonnées & aux abſciſſes de la parabole eam, ce qui veut dire que la route de la boule ſera parabolique.

§. 101. Lorsque l'abſciſſe $a\lambda$ commence à être extrémement grande, la longueur de l'arc am ne différera plus beaucoup de $a\lambda$, & par conſéquent il croîtra à très peu près en raiſon du quarré de l'ordonnée $\lambda m = aq$. Ainſi l'ordonnée qi decroît encore plus fortement qu'en raiſon réciproque de l'abſciſſe aq. Il s'enſuit que l'eſpace $aIiq$, que nous avons trouvé être égal à $2gx$ a une grandeur finie, quand même on prend l'abſciſſe aq infinie. Nous pouvons conclure de là, que la courbe CAM a non ſeulement l'aſymtote oblique EF, mais que ſon autre branche AB a encore une

aſymtote, dont la poſition eſt verticale. Car x ne devient pas un *maximum* à moins qu'il ne ſoit $\Phi = 0$.

§. 102. N'y ayant pas moyen de trouver des formules intégrales finies pour les quantités x, y, t, j'ai eſſayé de les exprimer par des ſuites infinies, dont du moins chaque terme pourroit être exprimé par des logarithmes ou par des fonctions circulaires. Je n'ai pu réuſſir que pour les abſciſſes x. Voici de quelle façon je m'y ſuis pris.

§. 103. Nommons la cotangente de l'angle $\Phi = z$, & nous aurons

$$\text{cotang}\,\Phi = z$$

$$-d\Phi = \frac{dz}{1+zz}$$

$$\text{ſin}\,\Phi = \frac{1}{\sqrt{(1+zz)}},$$

& partant (§. 96.)

$$-\frac{ag\,dk}{k^3} = -\frac{d\Phi}{\text{ſin}\,\Phi^3} = dz.\sqrt{(1+zz)}$$

$$\frac{ag}{k^2} = 2\int dz\sqrt{(1+zz)} + \text{conſt.}$$

ce qui donne (§. 96.)

$$\frac{k}{G} = \frac{C:G}{\sqrt{(C^2:G^2 + 2\int dz\sqrt{(1+zz)})}}.$$

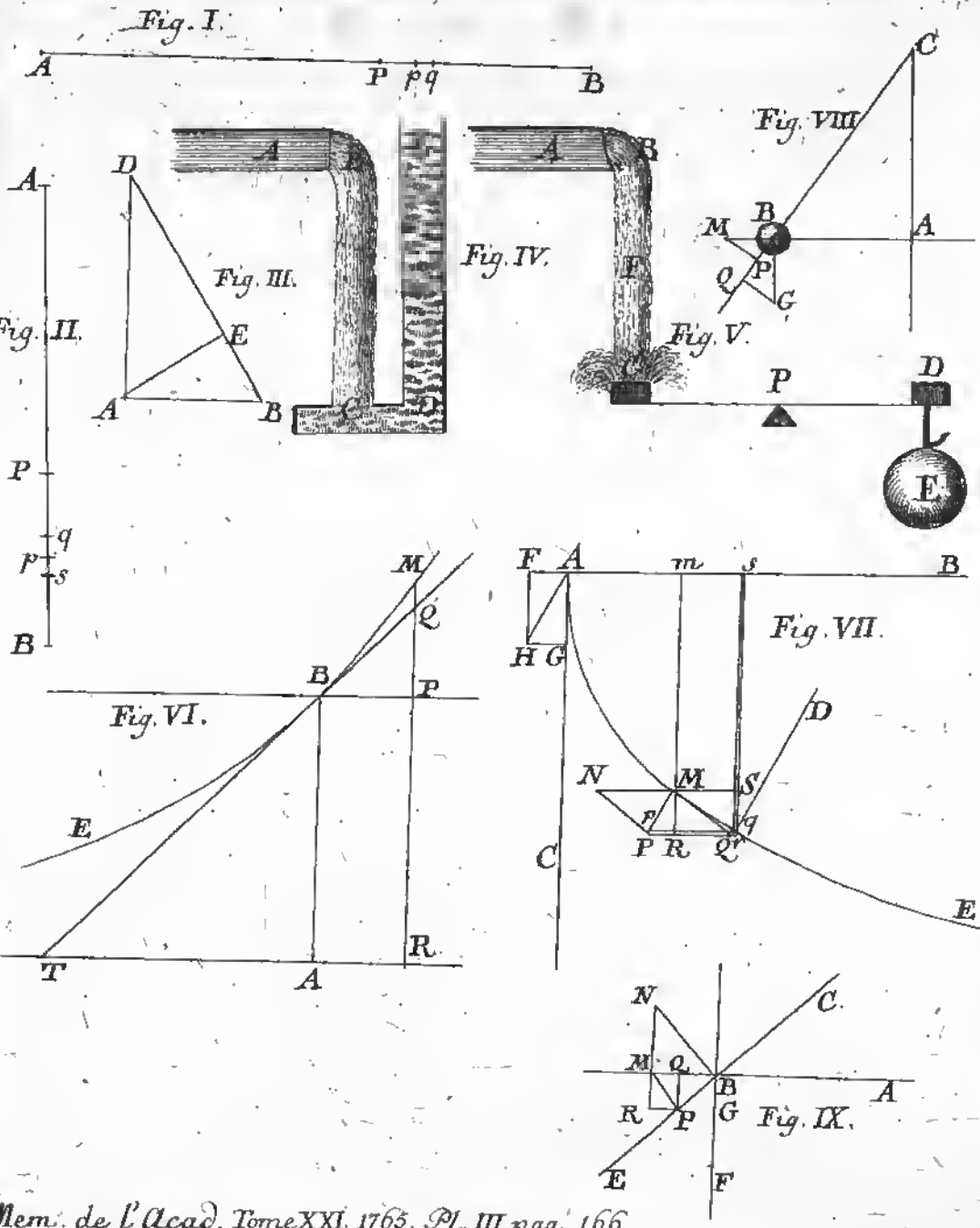
Mais il eſt (§. 99.)

$$g\,dx = k^2\,d\cot\Phi = k^2\,dz;$$

donc, en ſubſtituant la valeur de k, il ſera

$$g\,dx = \frac{CC\,dz}{C^2:G^2 + 2\int dz\sqrt{(1+zz)}}.$$

Cette



Mem. de l'Acad. Tome XXI. 1765. Pl. III pag. 166.

Cette fraction étant réſolue en une ſérie, on aura

$$\frac{g\,dx}{GG} = dz - \frac{2G^2}{C^2}\,dz\int dz\sqrt{(1+zz)} + \frac{4G^4}{C^4}\,dz\left(\int dz\sqrt{(1+zz)}\right)^2$$
$$- \frac{8G^6}{C^6}\,dz\left(\int dz\sqrt{(1+zz)}\right)^3 + \&c.$$

Or nommant les intégrales de chaque terme P, Q, R, S, &c. & faiſant $\int dz\sqrt{(1+zz)} = r$, & $\sqrt{(1+zz)} = s$, on aura

$P = z$

$Q = zr - \frac{1}{3}s^3$

$R = zr^2 - \frac{2}{3}s^3r + \frac{2}{9}z + \frac{4}{9}z^3 + \frac{2}{15}z^5$

$S = zr^3 - \frac{3}{4}s^3r^2 + 2\left(z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5\right)r - \left(\frac{16}{45}s^3 + \frac{8}{105}s^5 + \frac{2}{315}s^7\right)$

$T = zr^4 - \frac{4}{5}s^3r^3 + 4\left(z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5\right)r^2 - \left(\frac{64}{45}s^3 + \frac{32}{105}s^5 + \frac{8}{315}s^7\right)r$
$+ 8\left(\frac{103}{525}z + \frac{292}{1575}z^3 + \frac{802}{7875}z^5 + \frac{88}{3675}z^7 + \frac{1}{315}z^9\right).$

Et il ſera

$$\text{Conſt.} + \frac{gx}{GG} = P - \frac{2G^2}{C^2}.Q + \frac{4G^4}{C^4}.R - \frac{8G^6}{C^6}.S + \frac{16.G^8}{C^8}T - \&c.$$

Dans cette ſuite les lettres P, Q, R, S, T, &c. dépendent uniquement de l'angle Φ, & par conſéquent elles ſont tout à fait indépendantes des viteſſes & de la réſiſtance du milieu. Nous voyons de là, que les abſciſſes x s'expriment par une ſuite qui procede ſuivant les dimenſions paires des viteſſes. Il faut encore remarquer, que lorsqu'on veut avoir les abſciſſes x pour la branche AC, il faut prendre tous les termes de cette ſuite négatifs. Enfin, ſi on compte les abſciſſes depuis le ſommet A, il faut que x devienne $= 0$, lorsque $z = 0$, & par là on détermine la conſtante, qui ſera donc

$$\text{conſt.} = \frac{2G^2}{3C^2} + \frac{8.326}{525}\cdot\frac{G^6}{C^6} + \&c.$$

Du

Du reſte, la ſuite que nous venons de trouver n'eſt convergente, qu'à moins que l'angle φ ſoit plus grand que l'angle AFE.

§. 104. On trouvera de la même maniere une ſuite aſſez ſemblable pour le tems τ. Car il eſt (§. 99. 103.)

$$g\,d\tau = k\,d\cot\varphi = k\,dz$$

$$\frac{k}{G} = \frac{C : G}{\sqrt{(C^2 : G^2 + 2\int dz\sqrt{(1 + zz)})}}.$$

Donc, en ſubſtituant cette valeur de k, on aura

$$\frac{g\,d\tau}{G} = \frac{C\,dz : G}{\sqrt{(C^2 : G^2 + 2\int dz\sqrt{(1 + zz)})}}.$$

Cette formule étant réſolue en une ſuite donnera

$$\frac{g\,d\tau}{G} = dz - \frac{2G^2}{2C^2}\,dz\int dz\sqrt{(1+zz)} + \frac{4.3G^4}{2.4C^4}\cdot dz\left[\int dz\sqrt{(1+zz)}\right]^2$$
$$- \frac{8.3.5.G^6}{2.4.6\,C^6}\cdot dz\left[\int dz\sqrt{(1+zz)}\right]^3 + \text{&c.}$$

dont l'intégrale eſt

$$\text{Conſt.} + \frac{g\tau}{G} = P - \frac{2G^2}{2C^2}\cdot Q + \frac{4.3.G^4}{2.4\,C^4}\cdot R - \frac{8.3.5.G^6}{2.4.6.C^6}\cdot S$$
$$+ \frac{16.3.5.7.G^8}{2.4.6.8.C^8}\cdot T - \text{&c.}$$

On peut faire ſur cette ſérie les mêmes remarques comme ſur celle qui exprime les abſciſſes x. Les Lettres P, Q, R, S, T, &c. ont la même valeur, la conſtante ſe détermine de la même maniere, & elle eſt convergente ſous la même condition &c. Mais, en comparant l'une & l'autre ſuite, on voit que ſi la fraction G : C eſt ſi petite, que

que l'on puiſſe omettre le troiſieme terme & les ſuivans, on aura à très peu près

$$\frac{g\tau}{G} + \frac{gx}{GG} = \frac{G^2}{2C^2} \cdot Q.$$

Mais $x : G$ exprime le tems dans lequel l'eſpace x pourroit être parcouru avec la viteſſe G. Faiſant donc ce tems $= t$, on aura

$$\frac{g}{G}(\tau - t) = \frac{G^2}{2C^2} \cdot Q.$$

§. 105. La ſuite différentielle qu'on pourroit trouver de la même maniere pour l'élément dy, puisqu'il eſt

$$dy = \approx dx$$

n'offre point de termes intégrables. Et comme en général ces ſuites ne ſont convergentes que pour de certains cas, je ne m'y arrêterai pas plus longtems, d'autant qu'elles n'expriment les quantités x, τ, y, que par l'angle Φ ou par ſes fonctions, & qu'elles ne pourroient conduire que d'une maniere extrémement prolixe & indirecte, à déterminer le rapport entre les ordonnées y & les abſciſſes x, qu'il s'agit de chercher.

§. 106. Nous avons trouvé (§. 99.)

$$g\,dv = k^2 . \operatorname{cosec}\Phi . d\cot\Phi.$$

Mais il eſt

$$-d\cot\Phi = d\Phi . \operatorname{cosec}\Phi^2.$$

Donc il ſera

$$-g\,dv = k^2 . \operatorname{cosec}\Phi^3 . d\Phi,$$

& partant

$$-\frac{dv}{d\Phi} = \frac{k^2 \operatorname{cosec}\Phi^3}{g}.$$

Mais $dv : d\Phi$ eſt le rayon de courbure, que nous nommerons R. Il ſera donc

$$R = \frac{k^2 \operatorname{cosec} \Phi^3}{g} = \frac{c^2 . \operatorname{cosec} \Phi}{g} = \frac{CC . \operatorname{cosec} \Phi^3}{g . eam} = \frac{GG e^{-2v:a}}{g . \operatorname{sin} \Phi^3}.$$

Et nommant le rayon de courbure de la parabole eam au point m, $= \varrho$, nous aurons

$$R = \frac{CC}{2g} . \frac{\varrho}{eam}.$$

Car le parametre de cette parabole étant $= 4$, & l'angle $qmt = \Phi$, le rayon de courbure répondant au petit arc ms ſera $= 2 \operatorname{cosec} \Phi^3$. Et ſi la viteſſe au point m eſt $= c$, ce rayon de courbure ſera pareillement $= \frac{c^2 \operatorname{cosec} \Phi}{g}$. Ainſi le rayon de courbure au point M ne dépend que de la viteſſe c & de l'angle Φ, & par conſéquent il eſt le même, quelle que ſoit la réſiſtance du milieu. J'en conclus, que la courbe CAM peut être conſidérée comme compoſée de petits arcs de paraboles, dont le parametre change continuellement. Cette circonſtance fait voir, qu'on peut exprimer les ordonnées y par une ſuite qui procede ſuivant les dimenſions des abſciſſes. Voyons donc de quelle maniere nous la déterminerons.

§. 107. En ſuppoſant les différentielles des abſciſſes dx conſtantes, les différentielles dy croîtront d'une quantité qui eſt due à l'action de la gravité, de ſorte qu'il ſera

$$ddy = g d\tau^2.$$

Mais il eſt

$$dx^2 = k^2 d\tau^2 :$$

donc nous aurons

$$dx^2 : ddy = k^2 : g,$$

&

& partant

$$-\frac{d^3y}{d^2y} = \frac{2dk}{k} = -\frac{2dv}{a}$$

§. 108. Soit donc la ſuite

$$y = \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \mu x^5 + \varrho x^6 + \sigma x^7 + \upsilon x^8 + \&c.$$

& nous aurons

$$dy = (2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\epsilon x^3 + 5\mu x^4 + 6\varrho x^5 + 7\sigma x^6 + 8\upsilon x^7 + \&c.)\,dx$$

$$ddy = (2\gamma + 6\delta x + 12\epsilon x^2 + 20\mu x^3 + 30\varrho x^4 + 42\sigma x^5 + 56\upsilon x^6 + \&c.)\,dx^2$$

$$dddy = (6\delta + 24\epsilon x + 60\mu x^2 + 120\varrho x^3 + 210\sigma x^4 + 336\upsilon x^5 + \&c.)\,dx^2$$

$$\frac{dv^2}{dx^2} = 1 + 4\gamma^2x^2 + 12\gamma\delta x^3 + 16\epsilon\gamma x^4 + 20\mu\gamma x^5 + 24\varrho\gamma x^6 + 28\sigma\gamma x^7 + \&c.$$
$$+ 9\delta\delta.. + 24\delta\epsilon.. + 30\delta\mu.. + 36\delta\varrho..$$
$$+ 16\epsilon\epsilon.. + 40\epsilon\mu..$$

$$\frac{dv}{dx} = 1 + 2\gamma^2x^2 + 6\gamma\delta x^3 + 8\gamma\epsilon x^4 + 10\gamma\mu x^5 + 12\gamma\varrho x^6 + \&c.$$
$$+ \tfrac{9}{2}\delta\delta.. + 12\delta\epsilon.. + 15\delta\mu..$$
$$- 2\gamma^4.. - 12\gamma^3\delta.. + 8\epsilon\epsilon..$$
$$- 27\gamma^2\delta^2..$$
$$- 16\gamma^3\epsilon..$$
$$+ 4\gamma^6..$$

Mais il eſt (§. 107.)

$$\tfrac{1}{2}a\,d^3y = ddy.\,dv.$$

Donc, en multipliant les deux ſuites trouvées pour ddy & dv, & égalant le produit à la ſuite $\frac{1}{2}ad^3y$, on aura

$$\left\{\begin{array}{l}= 3\delta n + 12\varepsilon nx + 30\mu nx^2 + 60\varrho nx^3 + 105\sigma nx^4 + 168\upsilon nx^5 + 252\eta nx^6 \\ = 2\gamma + 6\delta.. + 12\varepsilon.. + 20\mu + 30\varrho.. + 42\sigma.. + 56\upsilon..\end{array}\right.$$

$$+ 4\gamma^3.. + 12\gamma^2\delta.. + 24\gamma^2\varepsilon.. + 40\gamma^2\mu.. + 60\gamma^2\varrho..$$
$$+ 36\gamma\delta^2.. + 72\gamma\delta\varepsilon.. + 120\gamma\delta\mu..$$
$$+ 16\gamma^2\varepsilon.. + 48\gamma\delta\varepsilon.. + 96\gamma\varepsilon^2..$$
$$+ 9\gamma\delta^2.. + 27\delta^3.. + 54\varepsilon\delta^2..$$
$$- 4\gamma^5.. - 12\gamma^4\delta.. - 24\gamma^4\varepsilon..$$
$$+ 20\gamma^2\mu.. + 60\gamma n\delta..$$
$$+ 24\gamma\delta\varepsilon.. + 72\varepsilon\delta^2..$$
$$- 24\gamma^4\delta.. - 72\gamma^3\delta^2..$$
$$+ 24\gamma^2\varrho..$$
$$+ 30\gamma\delta\mu..$$
$$+ 16\gamma\varepsilon^2..$$
$$- 54\gamma^3\delta^2..$$
$$- 32\gamma^4\varepsilon..$$
$$+ 8\gamma^7..$$

§. 109.

§. 109. En comparant donc les termes, on aura

$$\delta = \frac{2\gamma}{3a}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2a} = \frac{\gamma}{3a^2}$$

$$\mu = \frac{2\varepsilon}{5a} + \frac{2\gamma^3}{15a} = \frac{2\gamma}{15a^3} + \frac{2\gamma^3}{15a}$$

$$\varrho = \frac{\mu}{3a} + \frac{2\gamma^2\delta}{5a} = \frac{2\gamma}{45a^4} + \frac{14\gamma^3}{45a^2}$$

$$\sigma = \frac{2\varrho}{7a} + \frac{8\gamma^2\varepsilon}{21a} + \frac{3\gamma\delta^2}{7a} - \frac{4\gamma^5}{105a} = \frac{4\gamma}{315a^5} + \frac{128\gamma^3}{315a^3} - \frac{4\gamma^5}{105a}$$

$$\upsilon = \frac{\sigma}{4a} + \frac{5\gamma^2\mu}{14a} + \frac{6\gamma\delta\varepsilon}{7a} + \frac{9\delta^3}{56a} - \frac{3\gamma^4\delta}{14a} = \frac{\gamma}{315a^6} + \frac{122\gamma^3}{315a^4} - \frac{11\gamma^5}{105a^2}$$

$$\eta = \frac{2\upsilon}{9a} + \frac{\gamma^2\varrho}{3a} + \frac{5\gamma\delta\mu}{6a} + \frac{4\gamma\varepsilon^2}{9a} + \frac{\varepsilon\delta^2}{2a} - \frac{2\gamma^4\varepsilon}{9a} - \frac{\gamma^3\delta^2}{2a} + \frac{2\gamma^7}{63a}$$

$$= \frac{2\gamma}{9.315.a^7} + \frac{11.32.\gamma^3}{945.a^5} - \frac{134\gamma^5}{945a^3} + \frac{2\gamma^7}{63a}.$$

&c.

§. 110. Le coëfficient γ, qui entre dans toutes les valeurs des autres, ſe détermine par les deux équations (§. 107.)

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{g}{k^2}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = 2\gamma + 6\delta x + 12\varepsilon x^2 + 20\mu x^3 + \text{&c.}$$

Car, en posant $x = o$, il doit être $k = G$: donc il sera

$$g : GG = 2\gamma$$

$$\gamma = \frac{g}{2GG}.$$

§. 111. En considérant ces coëfficiens tels que nous venons de les déterminer, on voit qu'ils procédent suivant les dimensions impaires de γ & suivant les dimensions alternativement paires & impaires de a. Cette circonstance fait, que nous pourrons les exprimer d'une maniere plus concise, en y substituant d'autres lettres. Faisons pour cet effet

$$2x : a = \xi$$
$$2y : a = \eta$$
$$\gamma = m : a.$$

de sorte qu'il soit

$$2m = \frac{ag}{GG} = \frac{CC}{GG}.$$

Et toutes les substitutions & réductions faites, nous aurons la suite

$$\eta = \frac{m\xi^2}{2} + \frac{m}{2.3}\xi^3 + \frac{m}{2.3.4}\xi^4 + \frac{m}{2.3.4.5}\xi^5 + \frac{m.\,\xi^6}{2.3.4.5.6}$$
$$+ \frac{m^3}{2.3.4.5}\xi^5 + \frac{7m^3.\,\xi^6}{2.3.4.5.6}$$
$$+ \frac{m\,\xi^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{m\,\xi^8}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{m.\,\xi^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \&c.$$
$$+ \frac{4.8.m^3.\xi^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{2.61.m^3\,\xi^8}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{11.24.m^3.\,\xi^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \&c.$$
$$- \frac{3.m^5\,\xi^7}{2.3.4.5.6.7} - \frac{3.11.m^5\,\xi^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \frac{3.67.m^5.\,\xi^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \&c.$$
$$+ \frac{5.9.m^7.\,\xi^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \&c.$$

§. 112.

§. 112. Cette ſuite eſt aſſez remarquable. Nous voyons que la premiere ligne, qui n'eſt affectée que de m, eſt la même ſuite que celle qui exprime le nombre par ſon logarithme, & que pour la completter, on n'a qu'à y joindre les deux premiers termes. Nous aurons donc, en faiſant

$$Y = \eta + m + m\xi,$$

$$Y = me^{\xi} + \left(\frac{m^3\,\xi^5}{2.3.4.5} + \frac{7.m^3.\xi^6}{2.3.4.5.6} + \frac{4.8.m^3.\xi^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{&c.}\right)$$
$$- \left(\frac{3.m^5.\xi^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{&c.}\right)$$

§. 113. Or, en faiſant $\xi = 0$, il eſt $\eta = 0$, & partant $Y = m$. Enſuite le terme ξ étant également multiplié par m, il s'enſuit que m eſt la tangente d'un angle, & nommément de celui d'une aſymtote logarithmique dont l'équation eſt

$$s = me^{\xi},$$

& qui par conſéquent a une poſition oblique, de ſorte qu'elle reſſemble à la courbe AE de la ſeptieme figure, que nous avons déterminée ci-deſſus (§. 80.). Mais cette aſymtote n'eſt pas celle de la courbe CAB. Car puiſqu'il eſt (§. 111.)

$$2m = \frac{CC}{GG},$$

& que, l'angle AFE étant fait $= \psi$, il doit être (§. 96.)

$$\frac{CC}{GG} - \text{cof}\psi : \text{ſin}\psi^2 - \text{log. tang } \tfrac{1}{2}\psi = 0,$$

il s'enſuit, qu'il eſt

$$2m = \frac{\text{cof}\psi}{\text{ſin}\psi^2} - \text{log. tang } \tfrac{1}{2}\psi,$$

&

& que partant le parametre de la parabole $c\,a\,b$ reſtant $= 4$, (§. 97.) il eſt

$$2m = \text{arc. } ae.$$

Mais l'arc $\frac{1}{2}ae$ n'eſt égal à la tangente de l'angle fep que dans un ſeul cas; donc ce n'eſt auſſi que dans un ſeul cas que l'aſymtote FE a la même poſition, ou la même inclinaiſon que l'aſymtote de la logarithmique, qu'exprime l'équation $s = m\,e^x$.

§. 114. La ſuite que nous venons de trouver, ne commence à différer d'une ſuite logarithmique que dans la cinquieme dimenſion de l'abſciſſe ξ, où il s'y joint encore un *appendix*, dont on ne connoit point la loi de la progreſſion des coëfficiens. On y voit les multiplicateurs 61, 67, &c. qui ſont nombres premiers, & par là même les plus intraitables de tous. Mais, quoiqu'il en ſoit, c'eſt un avantage pour la pratique que cet *appendix* ne commence que dans la cinquieme dimenſion de ξ. Car l'équation

$$\xi = 2x : n$$

nous fait voir, que ξ eſt presque toujours une fraction aſſez petite, à moins qu'on ne veuille déterminer des points de la courbe CAB, qui ſont très proches des aſymtotes. Cette opportunité fait, qu'on peut presque toujours omettre les termes ξ^5, & les ſuivants, d'autant que leurs diviſeurs ſont conſidérablement grands.

§. 115. Je remarquerai encore, que la ſuite telle que nous venons de la trouver eſt pour la branche de la courbe par laquelle le corps deſcend. Pour l'appliquer à l'autre branche, par laquelle le corps monte, on n'a qu'à prendre l'abſciſſe ξ négative.

§. 116. Mais, comme il eſt aſſez ordinaire, qu'on ne calcule que ces cas où le corps retombe au niveau de l'endroit d'où il a été jetté, il ſera plus convenable d'exprimer les abſciſſes ξ par les ordonnées η. Faiſons pour cet effet

$$2\eta : m = i^2 = 4y : am.$$

Et

Et prenons la ſuite

$$\xi = i + ai^2 + bi^3 + ci^4 + di^5 + ei^6 + \&c.$$

les coëfficiens a, b, c, d, &c. ſe déterminent en ſubſtituant cette valeur de ξ dans la ſuite du §. 111. & en égalant les termes. Par là on trouvera

$$a = -\tfrac{1}{6}$$
$$b = +\tfrac{1}{36}$$
$$c = -\tfrac{1}{270} - \frac{m^2}{120}$$
$$d = +\tfrac{1}{4320}$$
$$e = +\tfrac{1}{17010} + \frac{m^2}{7560} + \frac{m^4}{1680}$$
$$\&c.$$

& partant

$$\xi = i - \tfrac{1}{6}i^2 + \tfrac{1}{36}i^3 - \tfrac{1}{270}i^4 + \tfrac{1}{4320}i^5 + \tfrac{1}{17010}i^6 + \&c.$$
$$- \frac{mm}{120}i^4 \qquad + \frac{m^2}{7560}i^6$$
$$+ \frac{m^4}{1680}i^6$$

§. 117. Cette ſuite eſt pareillement fort convergente. Elle donne la valeur de ξ pour la branche par laquelle le corps deſcend, & pour l'autre branche il faut prendre i négative, ce qui peut ſe faire, parce que i eſt la racine quarrée de $4y : am$. On aura donc

$$\xi' = -i - \tfrac{1}{6}i^2 - \tfrac{1}{36}i^3 - \tfrac{1}{270}i^4 - \&c.$$
$$- \frac{mm}{120}i^4$$

Car cette abſciſſe ſe comptant en arriere, elle eſt par elle-même négative.

§. 118. Quand on ne cherche que le jet horizontal, ou la ſomme des deux abſciſſes ξ, ξ', la ſuite ſe réduit à la moitié des termes, & nous aurons

$$\xi + \xi' = 2i + \tfrac{1}{18} i^3 + \tfrac{1}{2160} i^5 + \text{&c.}$$

§. 119. Mais, quelque convergentes que ſoient ces ſuites, elles ne ſervent que d'une maniere fort vague à calculer le jet horizontal, ſans nous indiquer directement les angles que fait la courbe avec les droites verticales ou horizontales. Je vais donc en chercher une autre, qui dépende de l'angle d'élevation ſous lequel le corps eſt jetté.

Fig. 11. §. 120. Soit cet angle QAP, la ligne horizontale AB, la courbe que le mobile parcourt AMB. Tirons une ordonnée verticale quelconque QMP, & nommons

$$AP = x$$
$$PM = y.$$

Exprimons le rapport entre x & y par la ſuite

$$y = \mathfrak{G}x - \gamma x^2 - \delta x^3 - \varepsilon x^4 - \mu x^5 - \text{&c.}$$

les deux premiers coëfficiens ſe détermineront aiſément. Car $\mathfrak{G}$ ſera la tangente de l'angle d'élévation QAP, de ſorte qu'il ſera

$$\mathfrak{G} = \text{tang QAP.}$$

Et γ ſe définit par la viteſſe horizontale en A, que nous nommerons K Car ſi l'on prend l'abſciſſe x infiniment petite, la quantité x: K dénotera le petit tems que le mobile employeroit à la parcourir, & le ſecond terme γxx marquera l'eſpace par lequel le corps tomberoit dans le même tems. Nous aurons donc, conformément aux loix de la peſanteur,

$$15\tfrac{5}{8} \cdot \frac{xx}{KK} = \gamma xx,$$

&

& partant

$$\gamma = \frac{1000}{64KK} = \frac{g}{2KK} \quad (\S.\ 14.)$$

§. 121. Ces deux coëfficiens devoient être déterminés d'avance parce que tous les autres en dépendent. Afin donc de les déterminer, nous nous ſervirons de l'équation trouvée ci-deſſus (§. 107.)

$$\frac{d^3y}{2d^2y} = \frac{dv}{a}.$$

Car il ſera, en prenant les différentielles, & en poſant dx conſtante:

$$dy = dx(\beta - 2\gamma x - 3\delta x^2 - 4\epsilon x^3 - 5\mu x^4 - \&c.)$$
$$-ddy = dx^2(2\gamma + 6\delta x + 12\epsilon x^2 + 20\mu x^3 + \&c.)$$
$$-d^3y = dx^3(6\delta + 24\epsilon x + 60\mu x^2 + \&c.)$$

D'où l'on aura

$$\frac{d^3y}{2d^2y} = dx\left(\frac{3\delta}{2\gamma} + \frac{6\epsilon}{\gamma}.x + \frac{15\mu}{\gamma}x^2 + \frac{30\varrho}{\gamma}x^3 + \&c.\right)$$
$$-\frac{9\delta\delta}{2\gamma\gamma}.. + \frac{27\delta\epsilon}{\gamma\gamma}.. - \frac{90\mu\delta}{\gamma\gamma}..$$
$$+\frac{27\delta^3}{2\gamma^3}.. - \frac{36.\epsilon\epsilon}{\gamma\gamma}..$$
$$+\frac{108.\epsilon\delta\delta}{\gamma^3}..$$
$$-\frac{81.\delta^4}{\gamma^4}..$$

Et en posant $1 + \mathfrak{E}\mathfrak{E} = \alpha\alpha$, il sera $\alpha = \sec QAP$, &

$$\frac{dv}{a} = dx\left(\frac{\alpha}{a} - \frac{2\gamma\mathfrak{E}}{\alpha a}x - \frac{3\mathfrak{E}\delta}{\alpha a}x^2 - \frac{4\mathfrak{E}\varepsilon}{\alpha a}x^3 - \&c.\right)$$

$$+ \frac{2\gamma\gamma}{\alpha a}\,..\, + \frac{6\gamma\delta}{\alpha a}\,..$$

$$- \frac{2\gamma^2\mathfrak{E}^2}{\alpha^3 a}\,..\, + \frac{6\gamma\mathfrak{E}^2\delta}{\alpha^3 a}\,..$$

$$+ \frac{4\gamma^3\mathfrak{E}}{\alpha^3 a}\,..$$

$$- \frac{4\gamma^3\mathfrak{E}^3}{\alpha^5 a}\,..$$

Egalant donc les termes de ces deux suites, on aura

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{3\delta}{2\gamma} \qquad \text{ce qui donne } \delta = \frac{2\alpha\gamma}{3a}.$$

$$-\frac{2\gamma\mathfrak{E}}{\alpha a} = \frac{6\varepsilon}{\gamma} - \frac{9\delta\delta}{2\gamma\gamma} \text{ ce qui donne } \varepsilon = \frac{\alpha\alpha\gamma}{3aa} - \frac{\gamma\gamma\mathfrak{E}}{3\alpha a}.$$

$$\mu = \frac{2\alpha^3\gamma}{15a^3} - \frac{8.\gamma\gamma\mathfrak{E}}{15.aa} + \frac{2\gamma^3}{15\alpha a} - \frac{2\gamma^3\mathfrak{E}^2}{15aa^3}.$$

&c.

§. 122.

§. 122. Ces valeurs étant ſubſtituées, nous aurons

$$y = \mathfrak{G}x - \gamma x^2 - \frac{2\alpha\gamma}{3a}x^3 - \frac{\alpha\alpha\gamma}{3aa}x^4 - \frac{2a^3\gamma}{15a^3}x^5 - \text{&c.}$$
$$+ \frac{\gamma^2\mathfrak{G}}{3.a\alpha} \cdots + \frac{8\gamma\gamma\mathfrak{G}}{15aa} \cdots$$
$$- \frac{2\gamma^3}{15\alpha a} \cdots$$
$$+ \frac{2\gamma^3\mathfrak{G}^2}{15a\alpha^3} \cdots$$

Dans cette ſuite il eſt (§. 120. 121.)

$$\mathfrak{G} = \text{tang QAP}$$
$$\alpha = \text{ſec. QAP}$$
$$\gamma = \frac{1000}{64.\text{KK}}.$$

Et par là on voit, que le premier terme de cette ſuite ne dépend que de l'angle d'élévation QAP, le ſecond de la viteſſe horizontale en A & de la gravité, & que les autres dépendent des deux premiers & de la réſiſtance du milieu, puisque la lettre a entre dans la détermination des coëfficiens.

§. 123. Nommons maintenant la viteſſe tangentielle en A $=$ V, l'abſciſſe AQ $= w$, l'angle d'élévation QAP $= \omega$, & nous aurons

$$x = w.\ \text{coſin}\ \omega$$
$$\text{K} = \text{V.}\ \text{coſin}\ \omega$$
$$\gamma = \frac{1000.\ \text{ſec}\ \omega^2}{64.\text{VV}} = \frac{g\ \text{ſec}\ \omega^2}{2\text{VV}}$$
$$\mathfrak{G}x = w.\ \text{ſin}\ \omega.$$

Donc, en ſubſtituant ces valeurs, il ſera

$$y = w.\sin\omega - \frac{g.w^2}{2V^2} - \frac{w^3 g}{3aV^2} - \frac{gw^4}{6a^2V^2} - \frac{gw^5}{15V^2a^3} - \&c.$$
$$- \frac{g^2 w^4 \sin\omega}{12aV^4} + \frac{2ggw^5\sin\omega}{15V^4a^2}$$
$$- \frac{g^3 w^5 \cos\omega^2}{60aV^6}$$

Voilà donc la ſuite qu'il s'agiſſoit de trouver, & qui exprime l'ordonnée PM par l'abſciſſe AQ, la viteſſe initiale V, l'angle d'élévation ω, la gravité g & l'effet de la réſiſtance a.

§. 124. Mais, pour comparer cette ſuite à celle que nous avions trouvée ci-deſſus (§. 111.) nous ferons des ſubſtitutions tout à fait analogues. Nommons donc

$$\frac{2w}{a} = \xi$$
$$\frac{2y}{a} = \eta$$
$$\frac{g}{VV} = \frac{2m}{a}.$$

Ces valeurs étant ſubſtituées, nous aurons

$$\eta = \xi\sin\omega - \frac{m\xi^2}{2} - \frac{m.\xi^3}{2.3} - \frac{m\xi^4}{2.3.4} - \frac{m\xi^5}{2.3.4.5} - \&c.$$
$$+ \frac{m^2.\xi^4\sin\omega}{2.3.4} + \frac{2.\sin\omega.m^2\xi^5}{2.3.4.5}$$
$$- \frac{\cos.\omega^2.m^3\xi^5}{2.3.4.5}$$

D'où

D'où l'on voit qu'on n'aura qu'à faire $\omega = 0$, pour que cette ſuite ſe change en celle du §. 111, & que ce n'eſt que cet angle qui la rend plus compliquée. En effet on voit ici, que cet *appendix* dont nous avons parlé au §. 114. commence à la quatrieme dimenſion de ξ, mais qu'il en diſparoit, dès qu'on fait $\omega = 0$.

§. 125. Cherchons maintenant la corde horizontale AB. L'ordonnée au point B étant $= 0$, nous aurons

$$0 = \sin\omega - \frac{m\xi}{2} - \frac{m\xi^2}{2\cdot 3} - \frac{m\xi^3}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{m\xi^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \&c.$$
$$+ \frac{m^2 \sin\omega \xi^3}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2\sin\omega . m^2 \xi^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$
$$- \frac{\cos\omega^2 . m^3 \xi^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

De là en faiſant

$$\frac{2\sin\omega}{m} = \zeta,$$

il ſera

$$\zeta = \xi + \frac{\xi^2}{3} + \frac{\xi^3}{3\cdot 4} + \frac{\xi^4}{3\cdot 4\cdot 5} + \&c.$$
$$- \frac{m.\sin\omega.\xi^3}{3\cdot 4} - \frac{2\sin\omega . m\xi^4}{3\cdot 4\cdot 5}$$
$$+ \frac{\cos\omega^2 . m^2 \xi^4}{3\cdot 4\cdot 5}.$$

Soit donc la ſuite

$$\xi = \zeta + a\zeta^2 + b\zeta^3 + c\zeta^4 + \&c.;$$

&

& en ſubſtituant cette valeur dans la ſuite précédente, il ſera

$$\begin{aligned}\zeta = \xi &+ a\zeta^2 &+ b\zeta^3 &+ c\zeta^4 &+ \&c.\\ &+ \tfrac{1}{3}\zeta^2 &+ \tfrac{2}{3}a\zeta^3 &+ \tfrac{2}{3}b\zeta^4\\ & & & + \tfrac{1}{3}a^2\zeta^4\\ & &+ \tfrac{1}{12}\zeta^3 &+ \tfrac{1}{4}a\zeta^4\\ & &- \frac{m\sin\omega.\zeta^3}{12} &- \frac{ma\sin\omega\zeta^4}{4}\\ & & &+ \tfrac{1}{80}.\zeta^4\\ & & &- \tfrac{1}{30}.m\sin\omega.\zeta^4\\ & & &+ \tfrac{1}{80}.m^2\cos\omega^2.\zeta^4\end{aligned}$$

Or les termes étant égaux à zéro, il ſera

$$0 = a + \tfrac{1}{3}, \text{ ce qui donne } a = -\tfrac{1}{3},$$

$$b = \tfrac{2}{9} - \tfrac{1}{12} + \frac{m\sin\omega}{12} = \tfrac{5}{36} + \tfrac{1}{12}m\sin\omega$$

$$c = \tfrac{17}{270} - \tfrac{19}{180}m\sin\omega - \tfrac{1}{80}m^2.\cos\omega^2.$$

&c.

& partant

$$\begin{aligned}\xi = \zeta &- \tfrac{1}{3}\zeta^2 &+ \tfrac{5}{36}\zeta^3 &+ \tfrac{17}{270}.\zeta^4 &- \&c.\\ & &+ \tfrac{1}{12}m\sin\omega.\zeta^3 &- \tfrac{19}{180}m\sin\omega\zeta^4\\ & & &- \tfrac{1}{80}m^2\cos\omega^2\zeta^4\end{aligned}$$

Cette ſuite eſt fort peu convergente. Car, puiſqu'il eſt

$$\zeta = \frac{2\sin\omega}{m} = \frac{4VV.\sin\omega}{ag} = \frac{4VV\sin\omega}{CC},$$

il

il faut que la viteſſe initiale V ſoit conſidérablement plus petite que C, ou que l'angle d'élévation ne ſoit que de quelques degrés. Elle ſera donc principalement applicable aux coups de canon, qui ſe tirent presque horizontalement. Mais, ſi le canon eſt abſolument horizontal, cette ſuite donne $\xi = 0$, puisqu'en effet alors la corde AB eſt $= 0$.

§. 126. Lorsqu'il ne s'agit que de conſtruire la courbe, ou d'en calculer autant de points qu'il en faut pour une conſtruction fort exacte, la ſuite trouvée au §. 124. pourra être employée de maniere qu'elle ſera très convergente en tous les cas. On prendra d'abord une abſciſſe initiale $AQ = \xi$, qui ſoit aſſez petite pour qu'on n'ait beſoin que des premiers termes de la ſuite du §. 124. Or, l'angle $QAP = \omega$ étant donné, on trouvera l'ordonnée $PM = \eta$. Enſuite on prendra une ſeconde abſciſſe ſur la tangente qM, & il eſt clair qu'on trouvera également l'ordonnée mp, en employant l'angle qMp, & la viteſſe de la boule en M. Cet angle ſe trouve en ce qu'il eſt

$$d\eta : d(\xi . \text{cof}\omega) = \text{tang. } qMp.$$

En prenant donc les différences, il ſera

$$\text{tang}qMp = \frac{d\eta}{d\xi.\text{cof}\omega} = \text{tang}\omega - \frac{m\xi}{\text{cof}\omega} - \frac{m\xi^2}{2\text{cof}\omega} - \frac{m\xi^3}{2.3.\text{cof}\omega} - \frac{m\xi^4}{2.3.4.\text{cof}\omega} - \&c.$$
$$+ \frac{m^2\xi^3\text{tang}\omega}{2.3} + \frac{2m^3\xi^4\text{tang}\omega}{2.3.4}$$
$$- \frac{m^3.\text{cof}\omega.\xi^4}{2.3.4}.$$

On appliquera pareillement en m une nouvelle tangente, & ayant trouvé l'angle qu'elle fait avec l'horizon, on déterminera un troi-

ſieme point de cette courbe. On voit aiſément qu'il convient de prendre toutes les abſciſſes égales, puisque de cette maniere on n'aura d'autres ſubſtitutions à faire que celles des angles, & des valeurs de m.

§. 127. Comme dans cette façon de procéder on a le choix de prendre les abſciſſes auſſi petites que l'on voudra, il ſera bon de les prendre aſſez petites pour que dans les deux ſuites qu'il faut employer (§. 124. 126.) les termes multipliés par m^2, m^3, &c. puiſſent être omis, de ſorte qu'on puiſſe faire

$$\eta = \xi . \sin\omega - \frac{m\xi^2}{2} - \frac{m\xi^3}{2.3} - \frac{m\xi^4}{2.3.4} - \text{&c.}$$

$$\text{tang } qMp = \text{tang}\,\omega - \frac{m}{\cos^2\omega}\left(\xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{2.3} + \text{&c.}\right)$$

Car de cette maniere, en faiſant $\log e = 1$, nous aurons

$$\eta = \xi \sin\omega + m + m\xi - m e^{\xi}.$$

$$\text{tang } qMp = \text{tang}\,\omega + \frac{m}{\cos^2\omega} - \frac{m}{\cos^2\omega} . e^{\xi} = \text{tang}\,\omega + \sec^2\omega . m(1 - e^{\xi}).$$

§. 128. La valeur de m étant (§. 124.)

$$m = \frac{ag}{2VV} = \frac{CC}{2VV},$$

on voit qu'elle dépend des viteſſes, & que par conſéquent elle varie d'un point de la courbe à l'autre. Mais elle ſe trouve aiſément par les angles, moyennant la derniere équation du §. 96. Car, faiſant l'arc parabolique

$$p = \frac{\cos\Phi}{\sin\Phi^2} - \log . \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\Phi = \text{tang}\,\omega . \sec\omega + \log . \text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\omega),$$

on

on aura pour la branche AG, par laquelle le corps monte

$$\frac{K}{G} = \frac{C : G}{\sqrt{(C^2 : G^2 - p)}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{C^2}{K^2} = \frac{C^2}{G^2} - p.$$

Mais il eſt

$$K = V. \cos \omega.$$

Donc, en ſubſtituant

$$\frac{C^2}{V^2} . \sec \omega^2 = \frac{C^2}{G^2} - p,$$

& partant

$$m = \frac{\cos \omega^2}{2} \left(\frac{C^2}{G^2} - p \right),$$

de ſorte que la viteſſe G étant donnée, ou trouvée par la viteſſe initiale, on trouvera la lettre m moyennant les angles.

§. 129. Sous la même condition on trouvera facilement le tems que le corps a employé pour parcourir chacun de ces petits arcs. Car il eſt en général

$$- ddy = g d\tau^2.$$

Or nous avons (§. 127. 124.)

$$\eta = \frac{2y}{a} = m + (\sin \omega + m) \xi - m e^{\xi};$$

donc

$$\frac{2 dy}{a} = (\sin \omega + m) d\xi - m e^{\xi} d\xi$$

$$\frac{2 ddy}{a} = - m e^{\xi} d\xi^2 = - \frac{2 g d\tau^2}{a},$$

& en prenant les racines quarrées,

$$d\tau = V\left(\frac{ma}{2g}\right).\, e^{\xi:2}\, d\xi$$

dont l'intégrale eſt

$$\tau = V\frac{2ma}{g}.\,(e^{\xi:2} - 1) = \frac{a}{V}(e^{\xi:2} - 1).$$

§. 130. Mais, ſi ſans omettre les termes multipliés par m (§. 127.) on veut employer l'expreſſion générale du tems τ, on trouvera de la même maniere, qu'il eſt

$$\tau = \frac{a}{2V}\left(\xi + \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^3}{24} + \frac{\xi^4}{192} + \text{&c.}\right) + \frac{m\sin\omega.\,\xi^3}{12} - \frac{m\sin\omega.\,\xi^4}{96} + \frac{m^2\cos\omega^2\,\xi^4}{48}.$$

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE MATHÉMATIQUE.

* *
*

SUR

LA PROBABILITÉ
DES SÉQENCES DANS LA LOTTERIE GÉNOISE

PAR M. EULER.

Depuis l'établiſſement d'une telle Lotterie dans cette ville, tous les arrangemens en ſont ſi généralement connus, qu'il ſeroit tout à fait ſuperflu d'en donner une deſcription. Auſſi la plûpart des queſtions qu'on peut former ſur la probabilité des événemens qui ont lieu dans cette Lotterie, ne ſont plus inconnues, vû que leur ſolution ſe déduit aiſement des principes établis dans la ſcience des probabilités. Mais, quand on demande la probabilité des *ſéquences*, qui peuvent ſe trouver dans les cinq nombres qu'on tire chaque fois, la queſtion eſt ſi difficile qu'on rencontre les plus grands obſtacles pour parvenir à la ſolution. Or on nomme *ſéquence*, quand deux ou pluſieurs des cinq nombres qu'on tire chaque fois, ſe ſuivent immédiatement ſelon l'ordre naturel des nombres: d'où l'on comprend ce qu'il faut entendre ſous une ſéquence de deux ou trois, ou quatre, ou de tous les cinq nombres. Ainſi, quand parmi les cinq nombres tirés il y a, par exemple, ces deux 7 & 8, c'eſt une ſéquence de 2: s'il y avoit ces trois nombres 25, 26, 27, ce ſeroit une ſéquence de trois: & ainſi de pluſieurs. On pourroit penſer que, puisqu'il n'y a dans cette Lotterie que 90 nombres, il conviendroit de regarder ces deux 90 & 1 comme une ſéquence de deux, mais il eſt plus naturel de les en exclure, & de s'en tenir uniquement à l'ordre naturel des nombres.

Or

Or il eſt bon de rendre cette queſtion plus générale, & partant je ſuppoſerai, qu'au lieu de 90 billets il y a en tout n billets marqués des nombres 1, 2, 3, 4, ... n, & qu'on en tire au hazard un nombre quelconque qui ſoit $= m$. Cela poſé, on demande qu'elle eſt la probabilité qu'il ſe trouve parmi ces m nombres tirés, ou une ſéquence de deux, ou une de trois, ou une de quatre, &c. ou même à la fois deux ſéquences de deux, ou une de deux ou une de trois, &c. ou enfin qu'il ne s'y trouve point du tout de ſéquences? Voilà donc pluſieurs queſtions que chaque cas fournit, dont le nombre ſera d'autant plus grand, que le nombre des billets tirés m ſera grand. Mais, pour parvenir à la ſolution de toutes ces queſtions, il eſt abſolument néceſſaire de commencer par le cas $m = 2$, où l'on ne tire des n billets que deux: de là je paſſerai à celui où l'on en tire 3, de ſorte que $m = 3$, enſuite à ceux où $m = 4$, & $m = 5$, & $m = 6$, &c. jusques où les difficultés du calcul me permettront de pouſſer ces recherches.

PROBLEME I.

I. *Le nombre des billets marqués des nombres* 1, 2, 3, 4, *&c. étant* $= n$, *quand on en tire deux billets, quelle eſt la probabilité, qu'il y aura une ſéquence, ou non?*

SOLUTION.

On ſait que le nombre de tous les cas poſſibles, qui peuvent avoir lieu dans les deux nombres tirés, eſt $= \frac{n(n-1)}{1.2}$, où l'on ne regarde point à l'ordre de ces deux nombres, de ſorte que, par exemple, les nombres tirés 7 & 10 font le même cas que s'ils étoient tirés 10 & 7. Dans ce nombre des cas $\frac{n(n-1)}{1.2}$ ſont compris tant ceux où il y a une ſéquence, que ceux où il n'y en a point. Or il eſt aiſé de faire le dénombrement de tous les cas qui ren-

renferment une ſéquence, qui ſont: 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, 5; &c. juſqu'au dernier $(n - 1), n$; dont le nombre eſt évidemment $= n - 1$. Mais la probabilité d'un événement quelconque eſt exprimée par une fraction, dont le numérateur eſt le nombre des cas où cet événement arrive, & le dénominateur eſt le nombre de tous les cas poſſibles, d'où l'on tire la probabilité, que les deux nombres tirés renferment une ſéquence $= \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$. Donc, qu'il n'y ait point de ſéquence, la probabilité ſera $= \frac{n-2}{n}$.

Corollaire I.

2. Donc la multitude des nombres qui ſe ſuivent dans leur ordre naturel, étant $= n$, ſi l'on en tire deux, de ſorte que le nombre de tous les cas poſſibles eſt $\frac{n(n-1)}{1.2}$, le nombre des cas qui contiennent une ſéquence eſt $= n - 1$, & le nombre des cas, qui n'en ont point $= \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$.

Corollaire II.

3. Et partant la probabilité que les deux nombres tirés renferment une ſéquence, eſt $= \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$; & la probabilité que les deux nombres tirés ne donnent point de ſéquence, eſt $= \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)} = \frac{n-2}{n}$.

Corollaire III.

4. Donc, ſi le nombre des billets n étoit 90, & qu'on n'en tirât que deux, la probabilité d'une ſéquence ſeroit $= \frac{1}{43}$; & celle qu'il

qu'il n'y eût point de ſéquence $= \frac{44}{45}$. Ou bien on pourroit parier 1 contre 44, qu'il n'y aura point de ſéquence.

REMARQUE.

5. Il eſt évident que le nombre des cas qui donnent une ſéquence, étant ajouté au nombre des cas qui n'en donnent point, doit produire le nombre de tous les cas poſſibles, qui eſt $= \frac{n(n-1)}{1.\ 2}$: & de là j'ai conclu que, puisque le nombre des cas d'une ſéquence étoit $= n - 1$, le nombre des cas contraires devoit être $= \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2}$. Mais on peut auſſi trouver le même nombre par le dénombrement actuel: qu'on ſuppoſe l'un des nombres tirés a, & puisque l'autre ne ſauroit être, ni $a - 1$, ni $a + 1$, il doit être un des autres dont le nombre eſt $= n - 3$, de ſorte que chaque nombre donne $n - 3$ cas, d'où le nombre de tous les cas ſeroit $= n(n-3)$; mais il faut conſidérer que, ſi l'on prend pour a, ou le premier 1, ou le dernier n, le nombre des cas devient d'une unité plus grand, puisque dans le premier cas le nombre $a - 1$, & dans l'autre le nombre $a + 1$ ne donne point d'excluſion. Par conſéquent le nombre trouvé $n(n-3)$ doit être augmenté de deux, d'où il devient $= nn - 3n + 2 = (n-1)(n-2)$. Mais ici chaque cas eſt compté deux fois, puisque poſant les deux nombres tirés a & b, ce même cas eſt rapporté tant au nombre a qu'au nombre b: d'où je conclus que le nombre des cas exempts de ſéquence n'eſt que la moitié de $(n-1)(n-2)$, & partant $= \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2}$. J'ai ajouté exprès cette opération pour mieux faire connoître les précautions qu'il faut prendre dans la ſuite.

PRO-

PROBLEME II.

6. *Le nombre des billets marqués des nombres naturels* 1, 2, 3, 4, &c. *étant quelconque* $= n$, *ſi l'on en tire trois au hazard, trouver toutes les probabilités à l'égard des ſéquences.*

SOLUTION.

Il y a ici trois cas à développer par rapport aux ſéquences, que je repréſenterai de la maniere ſuivante:

I. a, $a + 1$, $a + 2$, ce qui eſt une ſéquence de trois.

II. a, $a + 1$, b, ce qui marque une ſéquence de deux, le troiſieme nombre b n'étant ni $a + 2$ ni $a - 1$.

III. a, b, c où les nombres a, b, c, ne renferment aucune ſéquence.

Ces trois cas enſemble doivent produire tous les cas poſſibles, dont le nombre eſt $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$. Faiſons donc le dénombrement de tous les cas de chacune de ces trois eſpeces.

Pour la premiere a, $a + 1$, $a + 2$, le dénombrement eſt le plus aiſé, puisque tous ces cas ſont

(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5) &c. jusqu'au dernier $(n-2, n-1, n)$ dont le nombre eſt $= n-2$; & partant la probabilité qu'une ſéquence de trois ait lieu $= \frac{2.\ 3}{n(n-1)}$.

Pour la ſeconde eſpece a, $a + 1$, b nous n'avons qu'à conſidérer toutes les ſéquences de deux, qui ſont au nombre de $n - 1$; & à remarquer que chacune reçoit encore un des autres nombres à l'exception des quatre $a - 1$, a, $a + 1$, $a + 2$, de ſorte que le nombre des valeurs de b ſeroit $n - 4$. Mais il faut conſidérer que pour la premiere ſéquence 1, 2 & la derniere $n - 1$, n le nombre

des valeurs de b eſt $n - 3$, & partant le nombre de tous les cas eſt $(n-1)(n-4) + 2 = nn - 5n + 6 = (n-2)(n-3)$; lequel nombre eſt déjà juſte, puisqu'aucun de ces cas ne ſe rencontre deux fois. Donc la probabilité que cette eſpece arrive eſt $= \frac{2.3(n-3)}{n(n-1)}$.

Pour la troiſieme eſpece a, b, c, prenant le nombre a à volonté, les deux autres b & c doivent être pris de cette ſérie interrompue de nombres:

$$1.2.3 \ldots a-2 \mid a+2, a+3, a+4 \ldots n$$

où le nombre des termes de la premiere partie eſt $= a-2$, & de l'autre $= n-a-1$; mais en ſorte que b & c ne faſſent pas une ſéquence. Suppoſons que tous les deux ſoient pris de la premiere partie, dont le nombre de termes eſt $= a-2$; & puisque la ſérie des nombres $1, 2, 3, 4 \ldots n$ fournit $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ combinaiſons de deux ſans ſéquence, le nombre de ces cas eſt $= \frac{(a-3)(a-4)}{1.2}$. De la même maniere, ſi tous les deux ſont pris de l'autre partie $a+2, a+3, \ldots n$, dont le nombre de termes eſt $= n-a-1$, le nombre des cas eſt $= \frac{(n-a-2)(n-a-3)}{1.2}$. Or, ſi l'on prend l'un de la premiere, & l'autre de la ſeconde partie, chaque combinaiſon eſt exemte de ſéquence, & partant le nombre des cas ſera $= (a-2)(n-a-1)$, d'où le nombre de tous les cas pour chaque nombre a ſera:

$$\frac{(a-3)(a-4) + (n-a-2)(n-a-3) + 2(a-2)(n-a-1)}{1.2}$$

qui ſe réduit à $\frac{nn - 9n + 22}{2}$. Mais ce dénombrement n'a pas

lieu

lieu lorsque le nombre a eſt ou 1, ou 2, ou n ou $n-1$, qu'il faut conſidérer ſéparément. Ayant donc lieu pour $n-4$ valeurs de a, le nombre des cas ſera $= \frac{(n-4)(nn-9n+22)}{2}$. Or les deux cas $a = 1$ & $a = n$ donnent chacun tant de cas $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$, & les deux cas $a = 2$ & $a = n-1$ donnent chacun $\frac{(n-4)(n-5)}{2}$: donc le nombre des cas qui répondent à ces quatre valeurs enſemble ſera

$$\frac{2(n-3)(n-4)}{2} + \frac{2(n-4)(n-5)}{2} = \frac{2(n-4)(2n-8)}{2} = \frac{(n-4)(4n-16)}{2}$$

qui étant joint au nombre précédent produit

$$\frac{(n-4)(nn-5n+6)}{2} = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.}.$$

Enfin il faut obſerver que chaque triade de nombres a, b, c, eſt comptée ici trois fois, puiſque chacun peut tenir lieu de a, & partant le juſte nombre de tous les cas de cette troiſieme eſpece ſe réduit à $\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.}$. D'où la probabilité que, parmi les trois nombres tirés il n'y ait aucune ſéquence,

$$\text{ſera} = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)} = \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}.$$

Coroll. I.

7. Ayant donc trois eſpeces à conſidérer, quand on tire trois de n billets, qui ſont I. $a, a+1, a+2$ II. $a, a+1, b$.

& III. a, b, c, le nombre des cas pour chacune de ces eſpeces eſt:

Pour la premiere, $a, a+1, a+2 \ldots x-2$

Pour la ſeconde, $a, a+1, b \ldots \frac{2(n-2)}{1.} \frac{(n-3)}{2}$

Pour la troiſieme, $a, b, c, \ldots \frac{(n-2)}{1.} \frac{(n-3)}{2.} \frac{(n-4)}{3}$

Coroll. II.

8. Donc, pour qu'il ſe trouve dans les trois nombres tirés une ſéquence de trois a, $a+1$, $a+2$, la probabilité eſt $= \frac{2.3}{n(n-1)}$.

Pour qu'il ne s'y trouve qu'une ſéquence de deux, la probabilité eſt $= 2. \frac{3(n-3)}{n(n-1)}$, & pour qu'il n'y ait aucune ſéquence, la probabilité eſt $= \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$.

Coroll. III.

9. Si l'on demande les cas où il ſe trouve au moins une ſéquence de deux dans les trois nombres tirés, le nombre des cas favorables eſt $= n-2 + (n-2)(n-3) = (n-2)^2$, & partant la probabilité $= \frac{2.3(n-2)}{n(n-1)}$.

Remarque.

10. Il eſt ici évident que les nombres des cas, qui conviennent à chacune de nos trois eſpeces, étant ajoutés enſemble, produiſent

duiſent le nombre de tous les cas poſſibles, qui eſt $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$, tout comme la nature de la queſtion le demande, puisqu'il eſt en effet:

$$n-2+\frac{2(n-2)(n-3)}{1.\ 2} = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$$

& de la même maniere, la ſomme des probabilités qui répondent à ces trois eſpeces devient égale à l'unité, qui eſt le caractere d'une certitude complette. Par cette raiſon j'aurois bien pu me paſſer du raiſonnement embarraſſant, par lequel j'ai fait le dénombrement des cas de la troiſieme eſpece. Mais je l'ai ajouté exprès pour en mieux faire voir la juſteſſe, vû qu'il porte ouvertement l'empreinte de la vérité, afin qu'il ne paroiſſe point ſuſpect, quand je ſerai obligé d'y recourir dans la ſuite. Cependant, puisque je ſuis enfin parvenu à une expreſſion fort ſimple, on ne ſauroit presque douter qu'il n'y eût auſſi une autre route aſſez ſimple, qui conduiſe à la même concluſion, ce qui mérite principalement l'attention de ceux qui s'appliquent à cette eſpece de recherches.

PROBLEME III.

11. *Le nombre des billets marqués des nombres naturels* 1, 2, 3, 4 &c. *étant* $= n$, *ſi l'on en tire* 4 *au hazard, trouver toutes les probabilités qui y peuvent avoir lieu à l'égard des ſéquences.*

SOLUTION.

Parmi les quatre nombres tirés, il faut diſtinguer 5 eſpeces différentes par rapport aux ſéquences, dont la nature peut être repréſentée de la maniere ſuivante,

I. $a, a+1, a+2, a+3$; II. $a, a+1, a+2, b$; III. $a, a+1, b, b+1$;
IV. $a, a+1, b, c$; V. a, b, c, d.

de ſorte que la premiere contient une ſéquence de 4, la ſeconde une de 3, la III. deux ſéquences de 2, la IV. une ſeule ſéquence de 2.

&

& la V ne contient aucune ſéquence. Il s'agit donc de faire le dénombrement des cas pour chacune de ces eſpeces, dont la ſomme doit être égale au nombre de tous les cas poſſibles qui eſt $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$.

I. Le nombre des cas où la premiere eſpece a lieu, eſt $= n-3$, puisque ces cas ſont

$$(1, 2, 3. 4),\ (2, 3, 4, 5)\ .\ .\ .\ .\ (n-3)(n-2)(n-1)n$$

& partant la probabilité que cette eſpece arrive ſera $= \frac{2.\ 3.\ 4}{n(n-1)(n-2)}$.

II. Pour l'eſpece $a, a+1, a+2, b$, le nombre de toutes les ſéquences poſſibles de trois étant $= n-2$, le nombre b doit être pris, ou de cette progreſſion $1, 2, 3\ .\ .\ .\ .\ (a-2)$, ou de celle-ci $(a+4), (a+5)\ .\ .\ .\ n$: donc le nombre des valeurs convenables pour b eſt $= a-2 + n-a-3 = n-5$, pourvu que a ne ſoit ni 1, ni $a+2 = n$. Mettons à côté ces deux cas, & le nombre des autres étant $= n-4$ dont chacun peut exiſter en $n-5$ diverſes manieres différentes, le nombre des cas eſt $= (n-4)(n-5)$. Mais la premiere ſéquence 1, 2, 3 peut être combinée avec $n-4$ différens nombres b, & de même auſſi la derniere $n-2, n-1, n$, d'où le nombre de tous les cas pour cette eſpece eſt $= (n-4)(n-5) + 2(n-4) = (n-3)(n-4)$ dont tous ſont différens, & partant la probabilité que cette eſpece exiſte eſt $= 2.\frac{3.\ 4(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 2.\ \frac{3.\ 4\ (n-4)}{n(n-1)(n-2)}$.

III. Pour la troiſieme eſpece $a, a+1, b, b+1$, la premiere ſéquence $a, a+1$ étant priſe à volonté, ce qui ſe peut faire en $n-1$ manieres différentes, la ſeconde ſéquence $b, b+1$ doit être priſe ou de cette progreſſion $1, 2, 3\ .\ .\ .\ .\ .\ (a-2)$, ce qui peut arriver en $a-3$ manieres, ou de celle-ci $(a+3), (a+4), (a+5)\ .\ .\ .\ n$,

ce

ce qui peut arriver en $n - a - 3$ manieres, pourvu que le nombre a ne ſoit 1 ou 2, & $a + 1$ ni n ni $n - 1$; mettons à côté ces 4 cas, & le nombre des autres étant $= n - 5$, dont chacun peut arriver en $n - 6$ manieres, le nombre des cas ſera $= (n-5)(n-6)$. Mais la premiere ſéquence 1, 2, peut être combinée avec $n-4$, autres ſemblables ſéquences, de même que la derniere $(n-1)$, n & la ſeconde 2, 3 avec $n-5$, de même que l'avant derniere $(n-2)$, $(n-1)$; donc, au nombre des cas déjà trouvé, il faut encore ajoûter $2(n-4) + 2(n-5) = 4n - 18$, de ſorte que le nombre entier de ces cas eſt

$$nn - 11n + 30 + 4n - 18 = nn - 7n + 12 = (n-3)(n-4).$$

Mais ici chaque cas ſe rencontre deux fois, ſelon qu'on conſidere en premier lieu ou l'une ou l'autre ſéquence. Par conſéquent le juſte nombre des cas qui produiſent cette troiſieme eſpece eſt $= \frac{(n-4)}{1.}\frac{(n-4)}{2}$ & la probabilité que ce cas exiſte

$$= \frac{3.4\,(n-3)\,(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{3.4\,(n-4)}{n(n-1)(n-2)}.$$

IV. Pour la quatrieme eſpece a, $a+1$, b, c, la ſéquence a, $a+1$ étant priſe à volonté, ce qui ſe peut faire en $n-1$ manieres différentes, les deux autres nombres b & c doivent être pris de ces deux progreſſions:

$$1, 2, 3 \ldots . a - 2 \quad | \quad a + 3, a + 4, \ldots . n$$

en ſorte qu'ils ne renferment point de ſéquence. Donc, prenant tous les deux de la premiere progreſſion, dont le nombre de termes eſt $a - 2$, cela peut ſe faire en $\frac{(a-3)}{1}\frac{(a-4)}{2}$ manieres différentes: de même, ſi l'on prend tous les deux de l'autre progreſſion, dont le nombre de termes eſt $n - a - 2$, cela peut arriver en

autant de manieres $\frac{(n-a-3)(n-a-4)}{1\quad 2}$. Or, prenant b de la premiere, & c de la ſeconde progreſſion, le nombre des cas eſt $= (a-2)(n-a-2)$, pourvu qu'on excepte les deux premieres & les deux dernieres ſéquences. Le nombre donc de celles où ce dénombrement a lieu étant $= n-5$, dont chacun peut arriver autant de fois

$$\frac{(a-3)(a-4)}{1.\quad 2} + \frac{(n-a-3)(n-a-4)}{1.\quad 2} + (a-2)(n-a-2),$$

ce qui ſe réduit à $\frac{3nn-11n+32}{1.\ 2}$ qu'il faut multiplier par $n-5$. Or la premiere ſéquence 1, 2 donne tant de cas, $\frac{(n-4)(n-5)}{1.\quad 2}$, & autant la derniere $(n-1)n$; & la ſeconde 2. 3 donne $\frac{(n-5)(n-6)}{1.\quad 2}$ cas, & autant l'avant-derniere, de ſorte que le nombre de ces 4 cas eſt $= (n-4)(n-5) + (n-5)(n-6) = (n-5)(2n-10) = 2nn-20n+50$, qui étant ajoutés aux précédens donnent

$$\frac{n-5}{2}(nn-11n+32+4n-20) = \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{1.\ 2},$$

pour le nombre de tous les cas, qui produiſent cette eſpece, & partant la probabilité qu'elle exiſte eſt $= \frac{3.4(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)}$.

V. La cinquieme eſpece n'a pas beſoin d'être développée ſéparément, puisque le nombre des cas de toutes les cinq eſpeces doit être $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$: ajoûtons donc enſemble

ble les cas trouvés pour les quatre eſpeces, dont la ſomme eſt

$$n-3+(n-3)(n-4)+\frac{(n-3)(n-4)}{1.\quad 2}+\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\quad 2}$$
$$=\frac{(n-3)(nn-6n+10)}{1.\quad 2},$$

qui étant retranchée de $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$, laiſſe

$$\frac{n-3}{24}(n(n-1)(n-2)-12(nn-6n+10))=\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$$

pour le nombre de tous les cas où il n'y a point de ſéquence parmi les 4 nombres tirés, d'où la probabilité que cette eſpece exiſte eſt $=\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)}$.

Corollaire I.

12. Voilà donc les nombres des cas qui produiſent chacune des cinq eſpeces rapportées.

nombre des cas

I. Eſpece $a, a+1, a+2, a+3$ . . $\frac{n-3}{1}$,

II. Eſpece $a, a+1, a+2, b$ . . $\frac{2(n-3)(n-4)}{1.\quad 2}$,

III. Eſpece $a, a+1, b, b+1$ . . $\frac{(n-3)(n-4)}{1.\quad 2}$,

IV. Eſpece $a, a+1, b, c$ . . $\frac{3(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\quad 2.\quad 3}$,

V. Eſpece a, b, c, d . . . $\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$.

J'ai exprimé ces nombres en ſorte qu'on en puiſſe peut-être former bientôt une induction pour des queſtions compliquées.

COROLLAIRE II.

13. De la même maniere j'exprimerai la probabilité que chacune de ces cinq eſpeces exiſte.

la probabilité

I. Eſpece a, $a+1$, $a+2$, $a+3$ . . $\frac{2.\ 3.\ 4}{n(n-1)(n-2)}$,

II. Eſpece a, $a+1$, $a+2$, b . . . $2.\frac{3.\ 4\ (n-4)}{n(n-1)(n-2)}$,

III. Eſpece a, $a+1$, b, $b+1$ . . . $\frac{3.\ 4\ (n-4)}{n(n-1)(n-2)}$,

IV. Eſpece a, $a+1$, b, c . . . . $3.\frac{4(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)}$,

V. Eſpece a, b, c, d . . . . . $\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)}$.

PROBLEME IV.

14. *Le nombre des billets marqués des nombres naturels* 1, 2, 3, *&c. étant quelconque* = n, *ſi l'on en tire* 5 *au hazard, trouver toutes les probabilités qui y peuvent avoir lieu à l'égard des ſéquences.*

SOLUTION.

Parmi les 5 nombres tirés il faut diſtinguer les eſpeces ſuivantes auxquelles tous les cas poſſibles, dont le nombre eſt = $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$ ſe réduiſent.

I. Eſpece a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, où il y a une ſéquence de 5.

II. Eſpece a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, b, où il n'y a qu'une ſéquence de 4.

III. Eſpece a, $a+1$, $a+2$, b, $b+1$, où il n'y a qu'une ſéquence de trois, & une de deux.

IV Eſpece a, $a+1$, $a+2$, b, c, où il n'y en a qu'une de trois.

V Eſpece a, $a+1$, b, $b+1$, c, où il n'y en a que deux de deux.

VI Eſpece a, $a+1$, b, c, d, où il n'y en a qu'une ſeule de 2.

VII Eſpece a, b, c, d, e, où il n'y a aucune ſéquence.

Parcourons ſéparément chacune de ces 7 eſpeces.

I. La premiere ne contient que ces cas:

(1,2,3,4,5), (2,3,4,5,6) &c. juſques à $(n-4, n-3, n-2, n-1, n)$, dont le nombre eſt $= n - 4$, & partant la probabilité $= \frac{2.\quad 3.}{n\ (n-1)}\ \frac{4.}{(n-2)}\ \frac{5}{(n-3)}$.

II. Dans la ſeconde eſpece la ſéquence a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, peut varier en $n - 3$ manieres différentes, & le nombre b devant être pris de l'une de ces deux progreſſions

$1, 2, 3 \ldots . a - 2$, ou $(a+5), (a+6) \ldots . . n$,

le nombre de ſes valeurs eſt $= a - 2 + (n - a - 4) = n - 6$, à l'exception de la premiere & derniere ſéquence. Mettant donc ces deux à part, le nombre des autres étant $n - 5$, celui des cas ſera $= (n - 5)(n - 6)$. Or, pour la premiere ſéquence 1, 2, 3, 4, le nombre des valeurs de b eſt $= n - 5$, & auſſi pour la derniere. Ajoûtons donc encore ces $2(n - 5)$ cas au

nombre trouvé $(n - 5)(n - 6)$, & nous aurons le nombre de tous les cas qui conviennent à cette eſpece $= (n-5)(n-4) = 2\frac{(n-4)(n-5)}{1.\quad 2}$, d'où l'on tire la probabilité $= 2.\frac{3.\quad 4.\qquad 5\qquad (n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$.

III. Dans la troiſieme eſpece, a, $a+1$, $a+2$, b, $b+1$, la premiere ſéquence de trois a, $a+1$, $a+2$ peut avoir lieu en $n-2$ manieres différentes, & l'autre ſéquence de deux b, $b+1$ doit être priſe ou de cette progreſſion 1, 2, 3 . . . . $(a-2)$, d'où leur nombre ſera $= a - 3$, ou de cette progreſſion $(a+4)(a+5)$ . . . . . n, d'où le nombre des cas devient $= n - a - 4$; & partant le nombre des valeurs de b eſt $= n - 7$, excepté les deux premieres & les deux dernieres ſéquences de trois. Le nombre des autres étant donc $= n-2-4 = n-6$, & chacune recevant $n - 7$ cas, le nombre des cas eſt $= (n-6)(n-7)$. Mais la premiere 1, 2, 3 admet $n - 5$ cas, & la ſeconde $n - 6$: d'où les deux premieres & les deux dernieres fourniſſent encore $2(n-5)+2(n-6) = 4n-22$ cas, qui étant ajoûtés à $(n-6)(n-7)$ produiſent le nombre de tous les cas de cette eſpece $= nn-9n+20 = (n-4)(n-5) = 2\frac{(n-4)(n-5)}{1.\quad 2}$ comme dans l'eſpece précédente, d'où la probabilité eſt auſſi $= 2.\frac{3.\quad 4.\qquad 5\qquad (n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$.

IV. Dans la quatrieme eſpece a, $a+1$, $a+2$, b, c, la ſéquence de trois a lieu en $n - 2$ cas, & les deux nombres b & c doivent être pris de ces deux progreſſions

1, 2, 3 . . . . $(a-2)$ | $(a+4)$, $(a+5)$ . . . . n,

en

en ſorte pourtant qu'ils ne faſſent point de ſéquence. Prenons d'abord tous les deux de la premiere progreſſion, & le nombre des cas eſt $\frac{(a-3)(a-4)}{1.\ 2}$: mais, ſi nous les prenons de l'autre, le nombre des cas eſt $= \frac{(n-a-3)(n-a-4)}{1.\ 2}$: enfin, prenant l'un de l'une & l'autre de l'autre, le nombre des cas eſt $= (a-2)(n-a-3)$. Ainſi, pour chaque ſéquence de trois, nous avons tant de cas $\frac{(a-3)(a-4)}{1.\ 2} + \frac{(n-a-4)(n-a-5)}{1.\ 2} + (a-2)(n-a-3) = \frac{nn-13n+44}{1.\ 2}$ excepté, les deux premieres & les deux dernieres ſéquences: donc le nombre de celles où ce denombrement eſt juſte étant $= n-2-4 = n-6$, le nombre des cas qui leur convient eſt $\frac{(n-6)(nn-13n+44)}{2}$. Or la premiere & la derniere ſéquence donnent chacune $\frac{(n-5)(n-6)}{2}$ cas, & la ſeconde & l'avant-derniere chacune $\frac{(n-6)(n-7)}{2}$; donc, au nombre des cas trouvés, il faut encore ajoûter $(n-6)(2n-12)$, d'où réſulte la ſomme $\frac{(n-6)(nn-9n+20)}{2} = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ 2}$, qui exprime le nombre des cas pour cette eſpece, & partant la probabilité eſt $= 3.\ \frac{4.\ 5\ (n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$.

V. Pour la cinquieme eſpece a, $a+1$, b, $b+1$, c, conſidérons le nombre c, & les deux ſéquences de deux doivent être tirées de ces deux progreſſions

1, 2, 3 . . . . . $c-2$ | $c+2$, $c+3$ . . . . . n.

Si

Si l'on prend toutes les deux de la premiere, le nombre des cas eſt $= \frac{(c-5)(c-6)}{2}$, & ſi on les prend de l'autre il eſt $= \frac{(n-c-4)(n-c-5)}{2}$. Mais, l'une étant priſe de la premiere & l'autre de la derniere, le nombre des cas ſera $= (c-3)(n-c-2)$: donc, pour chaque nombre c, le nombre des cas ſera:

$$\frac{(c-5)(c-6)}{2} + \frac{(n-c-4)(n-c-5)}{2} + (c-3)(n-c-2) = \frac{nn-15n+62}{2}.$$

Mais il en faut exclure les 4 premiers & derniers nombres c, de ſorte que ce dénombrement n'a lieu que pour $n-8$ valeurs de c, auxquelles convient ce nombre de cas $\frac{(n-8)(nn-15n+62)}{2}$.

Soyent maintenant les autres valeurs qui admettent les cas ſuivans:

nombre des cas

ſi $c = 1$, ou $c = n$ . . . . . $\frac{(n-5)(n-6)}{2}$,

ſi $c = 2$, ou $c = n-1$ . . . . $\frac{(n-6)(n-7)}{2}$,

ſi $c = 3$, ou $c = n-2$ . . . . $\frac{(n-7)(n-8)}{2}$,

ſi $c = 4$, ou $c = n-3$ . . . . $\frac{(n-8)(n-9)}{2} + n - 6$,

dont la ſomme eſt $= 2nn - 27n + 94$, & dont le double $4nn - 54n + 188$ doit être ajoûté au nombre précédent $\frac{n^3 - 23nn + 182n - 496}{2}$, pour avoir le nombre des

cas

cas $\frac{n^3 - 15nn + 74n - 120}{2} = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ 2.\ 3}$,

& partant la probabilité $= 3.\frac{4.\ 5.\ (n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$,

qui eſt préciſément la même que celle de l'eſpece précédente.

VI. Pour la ſixieme eſpece a, $a+1$, b, c, d, je tracerai une autre route en conſidérant le plus petit des nombres a, b, c, d. Soit donc premierement a le plus petit, & les trois ſolitaires b, c, d, ſeront pris de cette progreſſion $a+3$, $a+4$, ... n, dont le nombre des termes eſt $= n - a - 2$, & partant le nombre des cas $= \frac{(n-a-4)(n-a-5)(n-a-6)}{1.\ 2.\ 3}$,

d'où nous aurons pour chaque nombre a les cas ſuivans

ſi a	le nombre des cas ſera	or la ſomme de cette progreſſion ſe trouve
1	$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3}$	$= \frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$
2	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3}$	
3	$\frac{(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\ 2.\ 3}$	
⋮	⋮	
$n-7$	$\frac{3.\ 2.\ 1}{1.\ 2.\ 3}$	

Enſuite, ſi un des nombres ſolitaires d eſt le plus petit, les quatre autres a, $a+1$, b, c, ſeront pris de la progreſſion $d+2$, $d+3$ . . . . n, dont le nombre de termes eſt $= n - d - 1$. Or alors le nombre des cas eſt $= \frac{3(n-d-4)(n-d-5)(n-d-6)}{1.\ 2.\ 3}$.

Par conſéquent

ſi d eſt	le nombre des cas ſera	La ſomme de cette progreſſion ſe trouve
1	$\frac{3(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3}$	$= \frac{3(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$
2	$\frac{3(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3}$	
⋮	⋮	
$n-7$	$3.\frac{3.\ 2.\ 1}{1.\ 2.\ 3}$	

Par conſéquent la ſomme de tous les cas qui produiſent cette eſpece eſt $= 4.\frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$, & partant la probabilité $= 4.\frac{5(n-5)(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$.

VII. Enfin, pour la ſeptieme eſpece, le nombre de tous les cas qui la produiſent, eſt $= \frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$, & partant la probabilité $= \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{n\,(n-1)(n-2)(n-3)}$.

Corollaire I.

15. Mettons devant les yeux à la fois les nombres des cas & les probabilités que nous venons de trouver pour les ſept eſpeces de tirages, quand on tire cinq nombres de n.

nombre

	Nombre des cas	Probabilité
I. $a, a+1, a+2, a+3, a+4$	$\frac{n-4}{1}$	$\frac{2.\ 3.\ 4.\ 5}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
II. $a, a+1, a+2, a+3, b$ . . .	$2.\frac{(n-4)(n-5)}{1.\ 2.}$	$2.\frac{3.\ 4.\ 5\ (n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
III. $a, a+1, a+2, b, b+1$ . . .	$2.\frac{(n-4)(n-5)}{1.\ 2}$	$2.\frac{3.\ 4.\ 5\ (n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
IV. $a, a+1, a+2, b, c$ . .	$3.\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ 2.\ 3}$	$3.\frac{4.\ 5\ (n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
V. $a, a+1, b, b+1, c$ . .	$3\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ 2.\ 3}$	$3.\frac{4.\ 5\ (n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
VI. $a, a+1, b, c, d$ . .	$4\frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$	$4.\frac{5\ (n-5)(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
VII. a, b, c, d, e . .	$\frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$	$\frac{(n-5)(n-6)(n-7(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

Corollaire II.

15. Si l'on demande la probabilité qu'il y ait au moins une ſéquence de deux dans les 5 nombres tirés, toutes les eſpeces, hormis la derniere, ſatisfont: & puisque la ſomme de toutes les probabilités eſt $= 1$, la probabilité cherchée eſt

$$= 1 - \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

Corollaire III.

16. Si l'on demande la probabilité, qu'il y ait parmi les 5 nombres tirés au moins deux ſéquences de deux, puisqu'une ſéquence de 3 en contient deux de 2, toutes les eſpeces ſans les

deux dernieres ſatisfont, & partant la probabilité cherchée ſera $=$

$$1 - \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n+12)}{n(n-1)(n-2)(n-3)},$$

COROLLAIRE IV.

17. Or la probabilité qu'il ſe trouvera parmi les 5 nombres tirés une ſéquence de trois, ſera

$$\frac{3\cdot 4\cdot 5\,(2+4(n-5)+(n-5)(n-6))}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{3\cdot 4\cdot 5\,(n-4)}{n(n-1)(n-2)},$$

& qu'il y ait une ſéquence de 4 la probabilité ſera

$$= \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

Enfin, qu'il y ait une ſéquence de tous les cinq, la probabilité eſt

$$= \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

Application à la Lotterie de Genes.

18. Pour appliquer ces formules à la Lotterie de Genes, où l'on tire chaque fois 5 *numeros* de 90, nous aurons $n = 90$, & pour marquer plus diſtinctement les différens cas par rapport aux ſéquences, j'employerai les caracteres ſuivans.

(1) marque un nombre ſolitaire hors de toute ſéquence,

(2) marque une ſéquence de deux,

(3) marque une ſéquence de trois,

(4) marque une ſéquence de quatre,

(5) marque une ſequence de tous les cinq.

Cela

Cela posé, nous aurons pour chacune des sept différentes especes les probabilités suivantes.

Espece	Probabilité
I. . . (5)	$\frac{2.3.4.5}{90.89.88.87} = \frac{1}{511038}$,
II. . . (4), (1)	$\frac{2.3.4.5.85}{90.89.88.87} = \frac{85}{511038}$
III. (3), (2)	$\frac{2.3.4.5.85}{90.89.88.87} = \frac{85}{511038}$
IV. (3), (1), (1)	$\frac{3.4.5.85.84}{90.89.88.87} = \frac{35700}{511038}$
V. (2), (2), (1)	$\frac{3.4.5.85.84}{90.89.88.87} = \frac{35700}{511038}$
VI. (2), (1), (1), (1)	$\frac{4.5.85.84.83}{90.89.88.87} = \frac{2839700}{511038}$
VII. (1), (1), (1), (1), (1) . . .	$\frac{85.84.83.82}{90.89.88.87} = \frac{404857}{511038}$.

De là je tire les conclusions suivantes:

1°. Que, parmi les 5 nombres tirés, il se trouve au moins une séquence de deux, la probabilité est $= \frac{109409}{511038}$: donc, si l'on permettoit de mettre sur ce cas, le gain devroit être fixé à $4\frac{817}{1000}$ fois la mise: & si l'on n'accordoit que 4 fois la mise, la Lotterie y gagneroit 17 pour cent.

2°. Que, parmi les 5 nombres tirés, il se trouve au moins deux séquences de 2, ou une de trois, ou plusieurs, la probabilité est $= \frac{71119}{511038}$: & partant, en permettant de mettre sur ce cas, le gain doit être fixé à $69\frac{1}{10}$ fois la mise, donc, si l'on n'accordoit que 50 fois la mise, la Lotterie gagneroit 199 sur 699, ou $28\frac{1}{2}$ pour cent.

3°. Que, parmi les 5 nombres tirés, il ſe trouve une ſéquence de trois, ou pluſieurs, la probabilité eſt $= \frac{3744}{371293}$, & partant en permettant de mettre ſur ce cas, le gain devroit être fixé à $136\frac{5}{16}$ fois la miſe; donc, ſi l'on n'accordoit que 90 fois la miſe, on gagneroit 466 ſur 1366, ou bien $34\frac{1}{2}$ pour cent.

4°. Que, parmi les 5 nombres tirés, il ſe trouve une ſéquence de 4, ou de tous les cinq, la probabilité eſt $= \frac{48}{371293}$, & partant ſi l'on mettoit ſur ce cas, le gain devroit être fixé à 5940 fois la miſe: donc, ſi la Lotterie n'accordoit que 3000 fois la miſe, elle gagneroit 2940 ſur 5940, ou bien $49\frac{1}{2}$ pour cent.

REMARQUE.

19. Quelque difficile qu'il ait paru d'abord d'étendre ces recherches à des plus grands nombres de billets tirés, la route particuliere que j'ai employée dans la ſolution de ce probleme pour l'eſpece VI, rend ces recherches fort aiſées, de ſorte qu'on ſera en état de les étendre à un auſſi grand nombre de billets tirés qu'on voudra. Toute cette méthode revient à trouver la ſomme d'une telle progreſſion deſcendante:

$$\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-m+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ m} + \frac{(k+1)(k-2)\ldots(k-m)}{1.\ 2\ \ldots\ m} \text{ &c.}$$

juſques à ce que les termes évanouiſſent. Or on ſait que la ſomme de cette progreſſion s'exprime fort ſimplement en ſorte

$$\frac{(k+1)\,k\,(k-1)\,(k-2)\ldots(k-m+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots\ (m+1)}$$

Je me ſervirai donc de cette méthode pour réſoudre le probleme ſuivant.

PROBLEME V.

20. *Le nombre des billets marqués des nombres naturels* 1, 2, 3, *&c. étant quelconque* $= n$, *ſi l'on en tire ſix au hazard, trou-*

trouver toutes les probabilités, qui y peuvent avoir lieu à l'égard des ſéquences.

SOLUTION.

Il eſt aiſé d'établir toutes les eſpeces différentes qui peuvent ſe rencontrer parmi les ſix nombres tirés, que je développerai l'une après l'autre.

I Eſpece. $a,\quad a+1,\quad a+2,\quad a+3,\quad a+4,\quad a+5.$

Le nombre des cas eſt ici ouvertement $= \frac{n-5}{1}$: donc, puiſque le nombre de tous les cas poſſibles eſt

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6},$$

la probabilité que cette eſpece ait lieu, eſt

$$= \frac{2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6}{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}.$$

II Eſpece. $a,\quad a+1,\quad a+2,\quad a+3,\quad a+4,\quad b,$

Soit a le plus petit des nombres tirés, & b doit être pris de cette progreſſion $a+6,\ a+7,\ a+8 \ldots\ldots n$, dont le nombre de termes eſt $= n-a-5$, qui donne le nombre des valeurs de b pour chaque nombre a. Mais, ſi b eſt le plus petit des nombres tirés, la ſéquence de cinq $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4$, doit être priſe de cette progreſſion $b+2,\ b+3 \ldots\ldots n$ dont le nombre de termes eſt $= n-b-1$, ce qui par le probleme IV. peut arriver en $\frac{n-b-5}{1}$ manieres différentes. Ainſi, pour trouver le nombre des cas, nous n'avons qu'à ſommer les deux progreſſions ſuivantes:

si a eſt	valeurs de b	si b eſt	valeurs de a
1	$\frac{n-6}{1}$	1	$\frac{n-6}{1}$
2	$\frac{n-7}{1}$	2	$\frac{n-7}{1}$
3	$\frac{n-8}{1}$	3	$\frac{n-8}{1}$
&c.		&c.	
ſomme	$\frac{(n-5)(n-6)}{1.\quad 2}$	ſomme $=$	$\frac{(n-5)(n-6)}{1.\quad 2}$.

Donc le nombre des cas eſt $= 2\,\frac{(n-5)(n-6)}{1.\quad 2}$, & la probabilité $= 2.\,\frac{3.\quad 4.\quad 5.\quad 6}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}\,\frac{(n-6)}{}$.

III Eſpece. a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, b, $b+1$.

Si a eſt le plus petit des nombres tirés, la ſéquence de deux b, $b+1$, doit être priſe de cette progreſſion : $a+5$, $a+6$, $a+7$ . . . . . n, dont le nombre des termes $= n-a-4$. Donc, par le probleme I. le nombre des valeurs de b eſt $= \frac{n-a-5}{1}$. Si b eſt le plus petit des 6 nombres tirés, la ſéquence de quarre a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, doit être priſe de cette progreſſion $b+3$, $b+4$ . . . . . n, dont le nombre de termes $= n-b-2$. Donc, par le probleme III, le nombre des valeurs de a eſt $=$

$$\frac{n-b-5}{1}.$$

Voilà

Voilà donc les deux progreſſions que avons à ſommer.

ſi a eſt	valeurs de b
1	$\frac{n-6}{1}$
2	$\frac{n-7}{1}$
3	$\frac{n-8}{1}$
&c.	
ſomme $=$	$\frac{(n-5)(n-6)}{1.\quad 2}$

ſi b eſt	valeur de a
1	$\frac{n-6}{1}$
2	$\frac{n-7}{1}$
3	$\frac{n-8}{1}$
&c.	
ſomme $=$	$\frac{(n-5)(n-6)}{1.\quad 2}$.

Donc le nombre des cas eſt $= 2.\ \frac{(n-5)\ (n-6)}{1.\quad 2}$, & la probabilité $= 2.\ \frac{3.\quad 4.\quad 5.\quad 6\quad (n-6)}{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}$.

IV Eſpece. $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ b,\ c,$

Soit a le plus petit des nombres tirés, & les deux ſolitaires b, c, doivent être pris de cette progreſſion $a+5$, $a+6$ . . . . . n, dont le nombre de termes $= n - a - 4$. Donc, par le probleme I. le nombre des cas eſt $= \frac{(n-a-5)\,(n-a-6)}{1.\quad 2}$.

Soit l'un des nombres ſolitaires c le plus petit, & la ſéquence de 4 avec l'autre ſolitaire a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, b, doit être priſe de cette progreſſion: $c+2$, $c+3$ . . . . . n, dont le nombre de termes $= n - c - 1$. Donc, par le probleme IV. le nombre des cas eſt $= 2.\ \frac{(n-c-5)\,(n-c-6)}{1.\quad 2}$.

Nous aurons donc à ſommer les deux progreſſions ſuivantes:

ſi a eſt	le nombre des cas	ſi c eſt	le nombre des cas
1	$\frac{(n-6)(n-7)}{1.\ 2}$	1	$2\,\frac{(n-6)(n-7)}{1.\ 2}$
2	$\frac{(n-7)(n-8)}{1.\ 2}$	2	$2\,\frac{(n-7)(n-8)}{1.\ 2}$
3	$\frac{(n-8)(n-9)}{1.\ 2}$	3	$2\,\frac{(n-8)(n-9)}{1.\ 2}$
&c.		&c.	
ſomme $=$	$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3}$	ſomme $=2$	$2\,\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3}$

Donc le nombre des cas eſt $= 3\,\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3}$,

& la probabilité $= 3.\frac{4.\ 5.\ 6\ (n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$.

V Eſpece. a, $a+1$, $a+2$, b, $b+1$, $b+2$.

Puiſqu'il y a ici deux ſéquences ſemblables de trois, il eſt indifférent lequel des deux nombres a & b ſoit le plus petit, & la ſéquence de trois, a, $a+1$, $a+2$, doit être priſe de cette progreſſion $b+4$, $b+5$ . . . . n dont le nombre de termes eſt $= n-b-3$.

Donc, par le probleme II, le nombre des cas eſt $= \frac{n-b-5}{1}$,

& la progreſſion à ſommer $\frac{n-6}{1}$, $\frac{n-7}{1}$, $\frac{n-8}{1}$ &c.

Donc le nombre des cas eſt $= \frac{(n-5)(n-6)}{1.\ 2}$, & la probabilité $= \frac{3.\ 4.\ 5\ 6\ (n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$.

VI

VI Eſpece. a, $a+1$, $a+2$, b, $b+1$, c.

Si a eſt le plus petit des nombres tirés, les autres b, $b+1$, c, doivent être pris de cette progreſſion $a+4$, $a+5$ . . . . . n, dont le nombre de termes $= n - a - 3$, d'où le probleme II. le nombre des cas eſt $= 2\,\frac{(n-a-5)(n-a-6)}{1.\quad 2}$, & poſant $a = 1$, on a $2\,\frac{(n-6)(n-7)}{1.\quad 2}$.

Si b eſt le plus petit des nombres tirés, les autres a, $a+1$, $a+2$, c, doivent être pris de cette progreſſion $b+3$, $b+4$ . . . . n, dont le nombre des termes eſt $n-b-2$, d'où par le probleme III. le nombre des cas eſt $=$

$$2\,\frac{(n-b-5)(n-b-6)}{1.\quad 2},$$

& poſant $b = 1$ on a $2\,\frac{(n-6)(n-7)}{1.\quad 2}$.

Si c eſt le plus petit, les autres a, $a+1$, $a+2$, b, $b+1$, doivent être tirés de cette progreſſion $c+2$, $c+3$ . . . . n, dont le nombre de termes $= n - c - 1$, d'où par le probleme IV. le nombre des cas eſt $= 2\,\frac{(n-c-5)(n-c-6)}{1.\quad 2}$, & poſant $c = 1$, on a $2\,\frac{(n-6)(n-7)}{1.\quad 2}$.

Les trois progreſſions à ſommer ſe réduiſent donc à cette ſeule

$$6\,\frac{(n-6)(n-7)}{1.\quad 2} + 6\,\frac{(n-7)(n-8)}{1.\quad 2} + \&c.$$

Donc le nombre des cas eſt $= 6 \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\quad 2.\quad 3}$,

& la probabilité $= 6. \frac{4.\quad 5.\quad 6\quad (n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$.

VII Eſpece. $a,\ a+1,\ a+2,\ b,\ c,\ d.$

Si a le plus petit des nombres tirés, au lieu duquel on peut d'abord prendre l'unité, les autres b, c, d, doivent être pris de cette progreſſion: 5, 6, 7 . . . . n, dont le nombre des termes $= n-4$.

Donc, par le probleme II, le nombre des cas eſt

$$= \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\quad 2.\quad 3}.$$

Si un des ſolitaires eſt le plus petit, comme $d = 1$, les autres a, $a+1$, $a+2$, b, c, doivent être pris de cette progreſſion 3, 4, 5 . . . . n, dont le nombre des termes $= n-2$.

Donc, par le probleme IV, le nombre des cas

$$= 3 \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\quad 2.\quad 3}.$$

Il s'agit donc de ſommer la progreſſion deſcendante qui commence par $4 \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\quad 2.\quad 3}$.

Donc le nombre de tous les cas $= 4 \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$,

& la probabilité $= 4. \frac{5.\quad 6\quad (n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$.

VIII

VIII Eſpece. $a,\ a+1,\ b,\ b+1,\ c,\ c+1.$

Ici il n'y a qu'un ſeul cas à conſidérer. Soit donc $c = 1$, & les autres $a,\ a+1,\ b,\ b+1$, doivent être tirés de cette progreſſion: 4, 5, 6 . . . . n, dont le nombre des termes $= n-3$, d'où par le probleme III. le nombre des cas $= \frac{(n-6)(n-7)}{1.\quad 2}$, qui donne la progreſſion à ſommer.

Donc le nombre de tous les cas eſt $= \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\quad 2.\quad 3}$, & la probabilité $= \frac{4.\ 5.\quad 6\quad (n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$.

IX Eſpece. $a,\ a+1,\ b,\ b+1,\ c,\ d.$

Soit $a = 1$ & les autres $b,\ b+1,\ c,\ d$, doivent être tirés de cette progreſſion: 4, 5, 6 . . . n, dont le nombre des termes $= n-3$.

Donc par le probleme III. le nombre des cas

$$= 3\,\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\quad 2.\quad 3},$$

& dans cette formule eſt déjà compriſe la poſition $b = 1$.

Soit $d = 1$, où eſt déjà compriſe la lettre c, les autres: $a,\ a+1,\ b,\ b+1,\ c$, doivent être tirés de cette progreſſion: 3, 4 . . . . n, dont le nombre de termes $= n-2$.

Donc, par le probleme IV. le nombre des cas

$$= \frac{3\,(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\quad 2\quad 3},$$

& partant on n'a qu'à ſommer la progreſſion deſcendante qui commence par le terme $6\,\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\quad 2.\quad 3}$.

D'où le nombre de tous les cas $= 6\,\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$,

& la probabilité $= 6.\,\frac{5.\quad 6\quad (n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$.

X Eſpece. $a,\quad a+1,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e.$

Soit premierement $a = 1$, & les quatre nombres ſolitaires b, c, d, e, doivent être tirés de cette progreſſion: 4, 5, 6 . . . . . n, dont le nombre des termes $= n - 3$, & par le probleme III. le nombre des cas $= \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$.

Soit enſuite un des ſolitaires $e = 1$, & les autres a, $a+1$, b, c, d, doivent être tirés de cette progreſſion: 3, 4, 5 . . . . n, dont le nombre des termes $= n - 2$, & par le probleme IV. le nombre des cas $= 4\,\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$, de ſorte qu'il s'agit de ſommer la progreſſion deſcendante qui commence par le terme $5\,\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$.

Donc le nombre de tous les cas

$= 5\,\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5}$.

& la probabilité $= 5.\,\frac{6(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$.

XI Eſpece. $a, b, c, d, e, f.$

Ici n'ayant qu'un cas à conſidérer, poſons $f = 1$, & les autres a, b, c, d, e, doivent être tirés de cette progreſſion: 3, 4, 5 . . . . n, dont le nombre des termes $= n - 2$.

Ainſi,

Ainſi, par le probleme IV. le nombre des cas

$$= \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5}.$$

Donc le nombre de tous les cas

$$= \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6},$$

& la probabilité

$$= \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{n\ (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

Corollaire I.

21. Pour mettre tout cela clairement devant les yeux, je ferai uſage des mêmes caracteres pour marquer les différentes eſpeces de ſéquences que j'ai expoſées §. 18, & nous aurons pour chaque eſpece.

Eſpeces	Nombre des cas	Probabilité
I. . . (6)	$\frac{n-5}{1}$	$\frac{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
II. . . (5) + (1)	$\frac{2(n-5)(n-6)}{1.\quad 2}$	$2.\ \frac{3.\ 4.\ 5.\ 6\ (n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
III. (4) + (2)	$\frac{2(n-5)(n-6)}{1.\quad 2}$	$2.\ \frac{3.\ 4.\ 5.\ 6\ (n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
IV. (4) + 2(1) . . .	$3\ \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\quad 2.\quad 3}$	$3.\ \frac{4.\ 5.\ 6\ (n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
V. 2(3)	$\frac{(n-5)(n-6)}{1.\quad 2}$	$\frac{3.\ 4.\ 5.\ 6\ (n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$

Eſpe-

Eſpeces	Nombre des cas	Probabilité
VI. (3)+(2)+(1) . . .	$6\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3}$	$6.\frac{4.\ 5.\ 6\ (n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
VII. (3)+3(1) . .	$4\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$	$4.\frac{5.\ 6\ (n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
VIII. 3 (2)	$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3}$	$\frac{4.\ 5.\ 6\ (n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
IX. 2(2)+2(1) . . .	$6\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$	$6.\frac{5.\ 6\ (n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
X. (2)+4(1) . .	$5\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$	$5.\frac{6\ (n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
XI. 6(1) . .	$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$

Corollaire II.

22. La loi de ces expreſſions pour le nombre des cas de chaque eſpece eſt aſſez évidente, puisque le nombre des facteurs dans les numérateurs eſt le même que celui des différentes lettres dont j'ai caracteriſé auparavant les différentes eſpeces, en commençant par $n - 5$, & les diminuant d'une unité: or le dénominateur contient toujours autant de facteurs en commençant par 1, 2, 3, &c. Mais la loi des coëfficiens numériques n'eſt pas ſi évidente; cependant elle le deviendra aſſez en répréſentant les nombres des cas de la maniere ſuivante.

Eſpeces

Eſpeces	Nombre des cas
$1(6)$	$\frac{n-5}{1}$
$1(5)+1(1)$	$\frac{n-5.\ n-6}{1.\ 1}$
$1(4)+1(2)$	$\frac{n-5.\ n-6}{1.\ 1}$
$1(4)+2(1)$	$\frac{n-5.\ n-6.\ n-7}{1.\ 1.\ 2}$
$2(3)$	$\frac{n-5.\ n-6}{1.\ 2}$
$1(3)+1(2)+1(1)$	$\frac{n-5.\ n-6.\ n-7}{1.\ 1.\ 1}$
$1(3)+3(1)$	$\frac{n-5.\ n-6.\ n-7.\ n-8}{1.\ 1.\ 2.\ 3}$
$3(2)$	$\frac{n-5.\ n-6.\ n-7}{1.\ 2.\ 3}$
$2(2)+2(1)$	$\frac{n-5.\ n-6.\ n-7.\ n-8}{1.\ 2.\ 1.\ 2}$
$1(2)+4(1)$	$\frac{n-5.\ n-6.\ n-7.\ n-8.\ n-9}{1.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4}$
$6(1)$	$\frac{n-5.\ n-6.\ n-7.\ n-8.\ n-9.\ n-10}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$,

où les dénominateurs ſuivent manifeſtement les coëfficiens des ſéquences de chaque ordre, qui caractériſent chaque eſpece.

REMARQUE.

23. Nous voilà donc maintenant en état de rendre ces recherches tout à fait générales: cependant on ne ſauroit commencer par le probleme général, puisque chaque nombre des billets tirés dépend de tous les précédens. Mais, quoique cette derniere méthode que je viens d'employer, ait de ſi grands avantages, il eſt pourtant à préſumer, qu'on en découvrira encore une plus ſimple.

PROBLEME GÉNÉRAL.

24. *Le nombre des billets marqués des nombres naturels* 1, 2, 3, 4, *&c. étant quelconque* $=$ n; *ſi l'on en tire* m *billets au hazard, déterminer toutes les probabilités, qui y peuvent avoir lieu à l'égard des ſéquences.*

SOLUTION.

Pour diſtinguer les différentes ſortes de ſéquences qui peuvent ſe trouver dans chaque tirage de m nombres, je me ſervirai de ces ſignes:

(1) marque un nombre ſolitaire,

(2) marque une ſéquence de deux nombres,

(3) marque une ſéquence de trois nombres,

(4) marque une ſéquence de quatre nombres.

&c.

Cela poſé, chaque tirage ſera caractériſé par une telle formule $\alpha(a) + \mathfrak{G}(b) + \gamma(c) + \delta(d)$ &c. ce qui ſignifie, qu'il y a α ſéquences de a nombres, $\mathfrak{G}$ ſéquences de b nombres, γ ſéquences de c nombres, δ ſéquences de d nombres &c. & puisque la multitude des nombres tirés eſt $=$ m, il faut qu'il ſoit

$$\alpha a + \mathfrak{G} b + \gamma c + \delta d \text{ &c.} = m.$$

Poſons

Poſons maintenant de plus $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ &c. $= k$, & le nombre de tous les cas qui produiſent ledit tirage $\alpha(a) + \beta(b) + \gamma(c) + \delta(d)$ &c. ſera exprimé en ſorte

$$\frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots\ldots\ldots(n-m-k+2)}{1.2\ldots\alpha,\quad 1.2\ldots\beta,\quad 1.2\ldots\gamma,\quad 1.2\ldots\delta\ \&c.},$$

lequel nombre étant diviſé par le nombre de tous les cas poſſibles qui eſt $= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots\ldots m}$, donnera la probabilité que ce même cas exiſte. C'eſt en quoi conſiſte la ſolution complette de notre probleme.

Corollaire I.

25. On aura donc autant d'eſpeces de tirage, qu'il eſt poſſible de trouver de différentes formules $\alpha(a) + \beta(b) + \gamma(c)$ &c. dont la ſomme $\alpha a + \beta b + \gamma c +$ &c. ſoit $= m$, c'eſt à dire, autant qu'il eſt poſſible de partager le nombre m de différentes manieres en parties: ainſi, prenant pour m ſucceſſivement les nombres 1, 2, 3, 4, &c. les nombres des eſpeces formeront la progreſſion ſuivante:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,

1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, &c.

dont j'ai expliqué la nature dans mes recherches ſur la partition des nombres.

Corollaire II.

26. Le nombre des facteurs qui compoſent le nombre des cas pour chaque eſpece $\alpha(a) + \beta(b) + \gamma(c) +$ &c. eſt toujours égal au nombre $k = \alpha + \beta + \gamma + \delta +$ &c. qui marque en combien de parties le nombre m eſt partagé. Et prenant toutes les eſpeces enſemble, où k a la même valeur, leurs nombres de cas font conjointement cette ſomme:

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1.\quad 2\ldots k-1}\cdot\frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots(n-m-k+2)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots k}.$$

Ainſi ſi k eſt | les nombres des cas de toutes les eſpeces, qui appartiennent à cette valeur de k ſont

1 $\quad \frac{n-m+1}{1}$

2 $\quad \frac{m-1}{1} \cdot \frac{(n-m+1)(n-m)}{1.\quad 2}$

3 $\quad \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)}{1.\quad 2.\quad 3}$

4 $\quad \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{3} \cdot \frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)(n-m-2)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$

&c.

& tous ces nombres de cas ajoûtés enſemble doivent produire le nombre de tous les cas poſſibles, qui eſt

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\ldots\ldots\,(n-m+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4\,\ldots\ldots\,m}.$$

Corollaire III.

27. La premiere eſpece étant $1\,(m)$, où tous les m nombres tirés forment une ſuite, on aura $k = 1$, & le nombre des cas eſt $= \frac{n-m+1}{1}$; mais la derniere eſpece étant $m\,(1)$ où il n'y a aucune ſéquence, il devient $k = m$, & le nombre des cas $= \frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots\ldots(n-2m+2)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots m}$.

Donc la probabilité qu'il n'y ait aucune ſéquence parmi les m nombres tirés eſt

$$\frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots\ldots(n-2m+2)}{n\quad (n-1)\quad (n-2)\ldots\ldots(n-m+1)},$$

où

ou bien $\frac{(n-m)}{n}\frac{(n-m-1)}{(n-1)}\frac{(n-m-2)}{(n-2)}\cdots\cdots\frac{(n-2m+2)}{(n-m+2)}$.

Or cette même formule exprime auſſi la probabilité, que de m — 1 nombres donnés il ne ſe trouve aucun parmi les m nombres tirés.

EXEMPLE.

28. Faiſons l'application, où de n billets marqués des nombres 1, 2, 3 . . . . . n, on tire 7 billets: & l'on trouvera le nombre des cas, qui produiſent chacune des 15 eſpeces qui peuvent avoir lieu dans un tirage de 7 nombres.

Eſpeces	nombre des cas
I. (7)	$\frac{n-6}{1}$,
II. (6)+(1)	$\frac{(n-6)(n-7)}{1.\ 1}$,
III. (5)+(2)	$\frac{(n-6)(n-7)}{1.\ 1}$,
IV. (4)+(3)	$\frac{(n-6)(n-7)}{1.\ 1}$,
V. (5)+2(1) . . .	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 1.\ 2}$,
VI. (4)+(2)+(1) . . .	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 1.\ 1}$,
VII. 2(3)+(1) . . .	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 1}$,
VIII. (3)+2(2) . . .	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 1.\ 2}$.

IX. $(4)+3(1)\ldots\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\quad 1.\quad 2.\quad 3}$,

X. $(3)+(2)+2(1)\ldots\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\quad 1.\quad 1.\quad 2}$,

XI. $3(2)+(1)\ldots\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 1}$,

XII. $(3)+4(1)\ldots\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1.\quad 1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$,

XIII. $2(2)+3(1)\ldots\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1.\quad 2.\quad 1.\quad 2.\quad 3}$,

XIV. $(2)+5(1)\ldots\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)}{1.\quad 1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5}$,

XV. $7(1)\ldots\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)(n-12)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6.\quad 7}$.

Chacun de ces nombres divisés par le nombre de tous les cas possibles qui est $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6.\quad 7}$, donne la probabilité que l'espece correspondante existe.

SUR

LES SUITES OU SÉQUENCES

DANS

LA LOTTERIE DE GENES.

PREMIER MÉMOIRE.

PAR M. BEGUELIN.

§. 1.

La doctrine des probabilités apartient à la Métaphyſique autant, & plus peut-être, qu'à la Géométrie. Si celle-ci prête ſes calculs, l'autre fournit le principe qui leur ſert de baſe.

Mais n'eſt-ce pas au fond une diſcuſſion bien minutieuſe, que celle qui roule ſur le département des diverſes ſciences; & qu'importe-t-il à leur progrès de revendiquer à l'une, des matieres que l'autre a déjà traitées avec tant de ſagacité? On peut répondre que le Métaphyſicien employe la langue du vulgaire; qu'il ſe met autant qu'il eſt poſſible à la portée de tous, au lieu que l'Analyſte ſe hâte dès les premieres lignes de parler le langage le plus correct, le plus concis, le plus énergique à la vérité, mais qui n'eſt entendu que de ceux qui ſont initiés dans les profondeurs de l'Algèbre, & cela n'eſt pas l'affaire de tout le monde.

§. 2. Il y a plus: dès que la diſcuſſion exacte d'une matiere exige le ſecours du calcul, le Métaphyſicien & le Géométre la traiteront différemment; & il eſt probable qu'auſſi loin que le premier pourra aller, la clarté, l'évidence, & même la briéveté, ſeront préférablement de ſon coté. Qu'on me pardonne ce paradoxe en faveur de la Métaphyſique. On exalte ſi ſouvent la Géométrie à ſes dépens, qu'il

qu'il doit être permis auſſi de relever les cas, où celle-là a quelque avantage ſur l'autre: d'ailleurs la vanité n'entre ici pour rien, puisque cet avantage du Métaphyſicien n'eſt dû qu'à la ſupériorité même de l'Algébriſte. Ce ſont deux voyageurs jettés ſur une côte inconnue, qu'ils cherchent à reconnoitre. L'un qu'aucun obſtacle n'arrête, s'enfonce tête baiſſée dans l'épaiſſe forêt qui ſe préſente devant lui, marche d'un pas ſeur & ferme au milieu de l'obſcurité du bois, écarte à droite & à gauche les épines qui lui ferment le paſſage, franchit les broſſailles, ſaute les ravins, & à travers mille difficultés qu'il ſait ſurmonter, il arrive enfin par une route ſombre & ténébreuſe au but qu'il s'étoit propoſé ſans l'avoir auparavant ni vû, ni connu.

L'autre, moins vigoureux & plus timide, que l'aſpect d'une forêt inconnue effraye, cherche à ſe placer ſur quelque hauteur d'où il puiſſe à vue d'oiſeau découvrir les routes les moins pénibles de ce bois, & voir d'un même coup d'oeil le point d'où il lui faut partir, & celui où il doit arriver. Il n'eſt pas douteux, que ce dernier parviendra au but, par un chemin plus court, moins raboteux & mieux éclairé, que le premier. Mais on ne trouve pas toujours de ces points de vues élévés; & il y a bien des forêts impénétrables au Métaphyſicien: c'eſt ce dont je conviendrai à mon tour très volontiers.

§. 3. Une *ſéquence* dans la Lotterie de Genes ſeroit une ſuite de nombres ſortis dans un même tirage, dont l'un n'excéderoit l'autre que de l'unité. Deux nombres tels ſeront une *ſéquence binaire;* trois une *ternaire*, &c. Au reſte il n'eſt pas beſoin que ces nombres ſortent préciſément dans l'ordre de ſéquence; il ſuffit que ceux d'un même tirage ſoient ſuſceptibles d'un tel arrangement. Ainſi un tirage qui donnera ſucceſſivement les nombres 7. 13. 17. 8. 24. contiendra la ſéquence binaire 7. 8.

§. 4. On peut conſidérer de deux façons les ſéquences que les numéros d'une Lotterie produiſent: la premiere façon, c'eſt de ne s'attacher qu'a la ſuite naturelle des nombres. C'eſt ainſi que l'a fait M. Euler dans ſon excellent Mémoire ſur ce ſujet. La ſeconde maniere,

niere, c'eſt de concevoir par fiction tous les numeros rangés en cercle, ce qui ajoute une ſéquence de plus, ſavoir celle que forment entr'eux le plus grand numero, & le plus petit, en fermant le cercle. C'eſt la ſuppoſition qu'a adopté Mr. Bernoulli. L'une & l'autre eſtimation a ſon avantage & ſon inconvénient, celle de Mr. Euler a plus de régularité dans le calcul abſtrait, l'autre en a plus rélativement au plan d'une lotterie, où tous les numeros doivent être indifférens au choix. Je me propoſe ici de les réunir; & d'enviſager les ſéquences ſous ce double aſpect.

§. 5. En ſuppoſant que l'on veuille introduire le hazard des ſéquences de l'une ou de l'autre eſpece dans la Lotterie de Genes, la queſtion qui ſe préſente à réſoudre c'eſt de ſavoir quelle probabilité il y a que dans un certain nombre de numeros tirés en un ſeul tirage il y aura ſéquence ou non; & par conſéquent quelle ſeroit la proportion entre la miſe & le gain à bénéfice égal?

§. 6. Puiſqu'il s'agit de déterminer ici le degré de probabilité des événemens, il faut commencer par établir les regles de cette probabilité. Elles ſont fondées ſur le principe du beſoin d'une raiſon ſuffiſante. En effet les événemens qu'on conſidere ici étant tous poſſibles abſolument parlant; le principe de la contradiction n'en ſauroit exclure aucun, ni déciſer leſquels ont plus ou moins de prétenſion à l'exiſtence. C'eſt au principe de la raiſon ſuffiſante ſeul à faire cette déciſion. Ce principe nous dit que lorſqu'une opération unique, un tirage de lotterie, par exemple, peut faire naitre pluſieurs événemens différens, s'il n'y a point de raiſon pourquoi un de ces événemens doive plutôt réſulter de cette opération qu'un des autres, la probabilité eſt égale pour chacun d'eux; mais que ſi, de deux événemens poſſibles, l'un peut exiſter par un plus grand nombre de cas que l'autre, & que tous ces cas ſoyent également poſſibles, la probabilité de ces deux événemens ſera exactement proportionnée aux nombres des cas qui les peuvent produire; d'où réſultent les deux regles pour eſtimer la probabilité d'un événement quelconque. Voici la premiere: *Compa-*

rez le nombre des cas, où cet événement peut exiſter par l'opération, au nombre de tous les cas que cette opération peut produire, & le rapport de ces deux nombres exprimera le dégré de probabilité de l'événement en queſtion: que, par exemple, les numeros d'un tirage puiſſent donner en tout 50 combinaiſons différentes: qu'entre ces combinaiſons il y en puiſſe avoir 5, qui contient des ſéquences, la probabilité pour ces ſéquences ſera exprimée par le rapport de 5 à 50, ou de 1 à 10, & par conſéquent par la fraction $\frac{1}{10}$, rapportée à l'unité. C'eſt la regle qu'employent ordinairement les Géometres dans l'eſtimation de la probabilité d'un cas particulier, parce qu'ils conſidérent ce cas hors de ſon rapport avec les cas oppoſés.

Voici la ſeconde regle, qui, quoiqu'elle revienne pour le fond à la précédente, eſt cependant plus d'uſage dans la vie commune, & principalement dans les jeux de hazard: *Comparez le nombre des cas où un événement peut exiſter par une opération, avec le nombre des cas où cette opération ne ſauroit le produire; & le rapport des deux nombres exprimera la probabilité pour & contre cet événement; ou*, ce qui revient au même, *ce rapport exprimera les ſommes que l'on peut parier de part & d'autre à partie égale.* Ainſi, dans l'exemple précédent, les probabilités pour & contre la ſéquence ſeront, ſelon cette derniere regle, comme 5 à 45; & celui qui parie pour la ſéquence peut par conſéquent mettre 1 écu contre 9. Car, tous les 50 cas étant également poſſibles, il n'y a point de raiſon pourquoi l'un ſeroit plus probable que l'autre: ils ont donc chacun le même degré de probabilité: donc celui qui parie pour la ſéquence a 5 degrés d'eſpérance, tandis que celui qui parie contre lui en a 45. Celui-ci peut par conſéquent riſquer 9 écus quand l'autre en hazarde *un*.

§. 7. Pour réſoudre la queſtion ſur le degré de probabilité des ſéquences, il n'y a donc qu'à compter toutes les combinaiſons qui peuvent réſulter d'un tirage, & voir enſuite lequel eſt plus facile, ou de compter les combinaiſons qui contiennent des ſéquences, ou celles qui n'en contiennent point. Comme l'une de ces ſommes ſoustraite

ſouſtraite de la ſomme des combinaiſons totales, donne toujours l'autre, il eſt clair qu'il n'eſt beſoin d'en chercher qu'une, & qu'il faut chercher celle qui ſe trouve le plus aiſément. J'appellerai *combinaiſons totales*, la ſomme de tous les cas poſſibles qu'un tirage peut produire; *combinaiſons pures*, la ſomme des cas de ce tirage qui ne contiennent point de ſéquence; & *ſéquences*, la ſomme des cas du même tirage qui renferment des *ſuites*. On comprendra par là, ce que j'entends, par *ambes, ternes, quaternes, totaux. Ambes, ternes, quaternes purs. Séquences d'ambe, de terne, de quaterne, &c.*

§. 8. Quoique la Lotterie de Genes eſt aſſez connue, pour qu'on ſoit familiariſé avec la méthode de comprer les combinaiſons totales, je crois cependant qu'on peut répandre plus de clarté ſur ce ſujet en le repréſentant d'une maniere plus ſenſible; les nombres abſtraits fatiguent aiſément l'imagination, qui n'a pas aſſez de priſe ſur eux. Quiconque a vû marcher des ſoldats, ſait ce que c'eſt que *rangs* & *files*. Le nombre des files repréſente fort bien le nombre des numeros, qu'on tire dans un tirage, comme le nombre des rangs, ou des individus qui ſe ſuivent dans une file, repréſente le nombre total des numeros que la roue contient. Concevons donc d'après cette image qu'on ait à ranger pluſieurs ſuites de médailles d'anciens Empereurs Romains, depuis *Auguſte* juſqu'à *Trajan*, & plus loin, s'il le faut: chaque ſuite formera une file, & il y aura autant de ces files rangées ſur même hauteur l'une à coté de l'autre qu'on aura de ſuites de ces Empereurs. Le premier rang contiendra les Auguſtes, le ſecond les Tiberes, & le dernier les Trajans.

§. 9. Si l'on demande à préſent en combien de façons on peut tranſpoſer ces médailles ſans diminuer ni les files, ni les rangs, il eſt clair que chaque médaille de la premiere file peut faire ambe, avec chaque médaille de la ſeconde; & chacun de ces ambes former un terne avec chaque individu de la troiſieme, & chacun de ces ternes donner un quaderne avec chaque piece de la quatrieme file, & ainſi de ſuite auſſi loin qu'on voudra, de ſorte que pour avoir toutes les

tranſpoſitions, il n'y a qu'a multiplier les rangs par eux-mêmes, autant de fois qu'il y a de files, uu, (ce qui revient au même,) autant de fois qu'un rang contient d'individus. Ainſi cinq ſuites de médailles, chacune de 13 Empereurs, formant 13 rangs, ſur 5 individus de front peuvent ſe tranſpoſer, ſans diminuer, ni les rangs, ni les files, de 13 fois 13 fois 13 fois 13 fois 13 manieres, c. a. d. autant de fois que le nombre 13, élévé à la cinquieme puiſſance contient d'unités.

Mais dans ces tranſpoſitions entrent toutes les combinaiſons de ſimple ſituation, où divers rangs ne contiennent que les mêmes individus autrement placés. Or cette diverſité eſt comptée pour rien dans la Lotterie de Genes. *Auguſte* & *Tibére*; *Tibére* & *Auguſte*, n'y feroient qu'un même ambe. *Claude*-*Galba*-*Néron*; *Galba*-*Neron*-*Claude*; *Néron*-*Claude*-*Galba*, & les trois autres tranſpoſitions de ces trois noms n'y ſont comptés que pour un ſeul terne. Ainſi, pour trouver les combinaiſons ſans répétition, il faut éviter d'allier plus d'une fois les mêmes individus.

Suppoſons donc d'abord deux ſeules files: l'*Auguſte* de la premiere file peut ſe combiner avec tous les individus de l'autre file. Le *Tibére* de la premiere, ne peut plus ſe combiner avec l'*Auguſte* de la ſeconde file, ce ſeroit une répétition; mais il ſe combinera avec tous les autres. *Claude*, par la même raiſon, ſe combinera avec tous à l'exception d'*Auguſte* & de *Tibére*; en un mot chaque médaille de la premiere file ſe combine avec celle de la ſeconde qui ſe trouve au même rang qu'elle, & avec celles de tous les rangs qui ſuivent celui-là, à l'excluſion de toutes celles qui ſont dans les rangs ſupérieurs. De ſorte que ſi *Trajan* eſt le dernier de la premiere file, il ne ſe combine qu'avec le *Trajan* de la ſeconde. Le nombre des combinaiſons augmente donc depuis Trajan juſqu'à Auguſte ſelon la progreſſion naturelle des nombres 1. 2. 3 . . . . : 13. Or on ſait que la ſomme de cette progreſſion arithmétique eſt la ſomme des deux nombres extrémes multipliée par la moitié du plus grand, & par conſéquent dans notre exemple elle ſera $14 \times 6\frac{1}{2} = 91$, ou en général

ſi

ſi le nombre indéterminé des rangs s'appelle n, la ſomme des combinaiſons de deux files ſera $(n + 1)\frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Si nous ajoutons une troiſieme file, égale aux précédentes, on trouvera par les mêmes raiſons, que l'*Auguſte* de la premiere file, combiné avec l'*Auguſte* de la ſeconde, forme autant de ternes, que la troiſieme file a d'individus; puis combiné avec le *Tibère* de la ſeconde file, il forme des ternes, avec le *Tibère* & tous les ſuivans de la troiſieme: enſuite combiné avec le *Claude* de la ſeconde file, il forme des ternes avec le *Claude*, & tous les ſuivans de la troiſieme file. On trouve une parfaite analogie dans tous les autres de la premiere file, d'où réſulte pour chacun d'eux un nombre de combinaiſons, égal à la ſomme d'une progreſſion arithmétique naturelle, $1 + 2 + 3$ &c. dont le plus grand terme eſt égal au nombre du rang de cet empereur à compter les rangs de bas en haut. Ainſi le *Trajan* ne forme qu'une combinaiſon de terne: le *Nerva*, en forme trois, *Domitien*, 6; *Tite*, 10; & ainſi de ſuite. Donc la ſomme des combinaiſons des ternes eſt exprimée, par la ſuite des nombres qu'on nomme *triangulaires*, $1 + 3 + 6 + 10 + 15$ &c. dont chaque terme eſt la ſomme de la ſuite oo progreſſion naturelle, qui lui correſpond. Or il y a ici autant de termes, qu'il y a de rangs à combiner, & l'on ſait que la ſomme des nombres triangulaires pour un nombre quelconque de termes, que j'appellerai n, eſt $= \frac{n}{1.}\frac{(n+1)}{2.}\frac{(n+2)}{3}$.

On trouve par la même méthode, que la ſomme des combinaiſons de quatre files, s'exprime par la ſuite des *nombres pyramidaux premiers*, qui réſultent de l'addition des triangulaires, comme ceux-ci réſultoient de l'addition des nombres naturels. Cette ſuite eſt donc $1 + 4 + 10 + 20$ &c. & la ſomme pour un certain nombre de rangs nommé n ſera: $\frac{n}{1.}\frac{(n+1)}{2.}\frac{(n+2)}{3.}\frac{(n+3)}{4}$.

Si l'on ajoûte une cinquieme file, les combinaiſons qui en réſultent, ſeront par conſéquent exprimées par la ſomme des nombres *Pyramidaux ſeconds*, dont chaque terme repréſente la ſomme des nombres pyramidaux premiers juſqu'à ce terme là. Cette ſuite eſt donc 1 + 5 + 15 + 35 &c. & ſa ſomme pour un certain nombre de rangs, nommé n, eſt $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$.

Il n'eſt pas beſoin de pouſſer cette diſcuſſion plus loin, on voit aiſément que la même analogie ſubſiſte juſqu'à l'infini, & je ne m'y ſerois pas même arrêté puisque dans le ſujet que je vais traiter il m'étoit permis de ſuppoſer tout ceci connu, n'étoit que ces combinaiſons vont ſervir de baſe à ce que j'ai à dire ſur les ſéquences; par la même raiſon j'ajouterai encore quelques obſervations qui ne les concernent pas immédiatement.

§. 10. Ce calcul des combinaiſons de nos médailles ſeroit préciſément celui de la Lotterie de Genes, ſi le même numero pouvoit ſortir plus d'une fois dans un même tirage. Mais comme cela n'a pas lieu, il faut faire un petit changement dans la diſpoſition de nos files, que la premiere à gauche reſte immobile, & que la ſeconde s'éleve d'un échellon; alors *Auguſte* range avec *Tibére;* & *Nerva* avec *Trajan.* La troiſieme file excédera de même la ſeconde d'un pas, l'on aura alors au premier rang complet, *Auguſte*, *Tibére*, *Caligula;* & au dernier *Domitien*, *Nerva*, *Trajan.* La quatrieme file avancée pareillement, donnera au premier rang complet, *Auguſte*, *Tibére*, *Caligula*, *Claude*, & au dernier *Tite*, *Domitien*, *Nerva*, *Trajan.* Il en ſera encore de même des autres files qu'on voudra ajoûter.

On voit aiſément que le calcul des combinaiſons reſte toujours le même; la ſeule différence qui s'y trouve c'eſt que le nombre des rangs complets a diminué, il n'eſt plus égal au nombre des individus de la premiere file, comme il l'eſt lorsque toutes les files ſont d'égale longueur. Ici le nombre des rangs complets eſt toujours égal au nom-

nombre des individus de la plus courte file, qui eſt dans notre arrangement celle du flanc droit. Ainſi une ſuite de 13 médailles ne donne que 12 rangs à deux de front, 11 à trois de front, 10 à quatre de front; & les quines ne forment que 9 rangs complets. Si l'on demande donc combien ces 5 files de 13 médailles donneront de quines, on a ici $n = 9$, par conſéquent ce ſera $\frac{9.10.11.12.13.}{1.2.3.4.5} = 1287$.

§. 11. Comme nous avons évité les combinaiſons ideotiques en faiſant monter d'un pas chacune de nos files ſur la voiſine de la gauche; il nous ſera tout auſſi aiſé d'éviter les combinaiſons de ſéquence en faiſant faire à ces files deux pas au lieu d'un. On aura alors au premier rang complet, *Auguſte Caligula*, s'il n'y a que deux files; *Auguſte*, *Caligula*, *Néron*, s'il y en trois; le dernier rang ſera dans le premier cas, *Domitien*, *Trajan*, & dans le ſecond, *Veſpaſien*, *Domitien*, *Trajan*; & ainſi des autres files qu'on voudra ajouter.

Le calcul des combinaiſons *pures* ſera encore ici le même que celui des *totales* §. 10. & des *identiques* §. 9. ſeulement il y aura moins de rangs à combiner; leur nombre ſera toujours égal à la plus courte file; & puiſque chaque file excepté la premiere ſe racourcit de deux nombres, le racourciſſement de la derniere ſera deux fois le nombre des files diminué d'une unité. Ainſi notre ſuite de 13 empereurs donnera 11 rangs d'*ambes purs*, 9 rangs de *ternes purs*, 7 rangs de *quaternes purs*, & 5 rangs de quines ſans ſéquences. Si l'on demande donc combien ces 5 files donneront de quines, ſans qu'aucun Empereur ſoit rangé de front avec ſon ſucceſſeur ou ſes ſucceſſeurs immédiats, on a ici $n = 5$, & par conſéquent la ſomme de ces *quines purs* eſt $= \frac{5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{1. \quad 2. \quad 3. \; 4. \; 5} = 126$.

§. 12. Nous avons trouvé §. 10. les *quines totaux* pour le même nombre de 13 médailles $= 1287$, ôtant de cela les *quines purs*, reſte le nombre des cas de ſéquences $= 1161$. Ainſi la probabilité

bilité de ſéquence ſeroit ici $= \frac{1}{7}\frac{1}{8}\frac{6}{8}\frac{1}{7} = \frac{1}{14}\frac{2}{3}$, & l'on peut parier, 1161 contre 126, ou 129 contre 14.

§. 13. Généraliſant donc ces réſultats, on aura en prenant les ſéquences dans le ſens de Mr. Euler, pour un nombre n de numeros.

Tirage	*Combinaiſons totales.*	*Combinaiſons pures.*	*Séquences.*
de 2 N°..	$\frac{(n-1)n}{1.\ 2}$	$\frac{(n-2)(n-1)}{1.\ 2}$	$\frac{(n-1)n-(n-2)(n-1)}{1.\ 2}$
3 N°. . .	$\frac{(n-2)(n-1)n}{1.\ 2.\ 3}$ . . .	$\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$ . . .	$\frac{(n-2)(n-1)n-(n-4)(n-3)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$
4 N°.	$\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ ..	$\frac{(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ ..	$\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n-(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$
. . . . .	&c.	&c.	&c.
. . . . .	& en général, pour un tirage de t numeros.		
. . . . .			
t N°..	$\frac{(n-t+1)(n-t+2)(n-t+3)(\ldots)n}{1.\ 2.\ 3 \ldots . t}$;	$\frac{(n-2t+2)(n-2t+3)(\ldots)(n-t+1)}{1.\ 2 \ldots . t}$;	$\frac{(n-t+1)(\ldots)n-(n-2t+2)(\ldots)(n-t+1)}{1 \ldots . t}$

§. 14. Dans la ſuppoſition de M. Bernoulli, que le plus grand nombre fait auſſi ſéquence avec le plus petit, ce ſera encore le même calcul, accompagné ſeulement d'une façon de plus; que je vai expliquer. Nous avons évité les ſéquences en plaçant nos files en échelons de deux. Mais par là nous n'évitons pas la nouvelle ſéquence de *Trajan* avec *Auguſte*. Il faut donc, pour l'éviter, retrancher pour

pour l'*Auguſte* de la premiere file, le dernier rang où ſe trouve *Trajan*, & rétablir ce dernier rang pour tous les ſucceſſeurs d'*Auguſte* contenus dans la premiere file. De là il ſuit que le *Tibére*, & tous ſes ſucceſſeurs, ſe combineront avec autant de rangs que lorsqu'on compte les ſéquences à la maniere de M. Euler, mais qu'*Auguſte*, qui à cette maniere-là ſe combinoit avec un rang de plus, que ſon ſuivant *Tibére*, ne ſe combine ici qu'avec le même nombre de rangs que celui-ci. D'où il réſulte encore, qu'*Auguſte* & *Tibére* auront tous deux le même nombre de combinaiſons. De ſorte que les progreſſions de nombres naturels pour les ambes, de nombres triangulaires pour les ternes, de nombres pyramidaux premiers pour les quadernes, de nombres pyramidaux ſeconds pour les quines, &c. que toutes ces progreſſions, dis-je, commençant toujours par l'unité à *Trajan*, n'iront plus que juſqu'à la hauteur du rang de *Tibére* incluſivement, & qu'à leur ſomme il faudra ajouter la répétition du dernier terme, pour les combinaiſons d'*Auguſte;* ce qui donnera la ſomme des combinaiſons pures, & par conſéquent auſſi les ſéquences dans le ſens de M. Bernoulli.

Que par exemple le nombre des médailles de la premiere file ſoit toujours 13, la ſeconde file n'en aura que 11 à cette hauteur, & ne formera par conſéquent que 11 rangs d'ambes. Mais *Auguſte* ne pouvant pas ſe combiner avec *Trajan*, c'eſt comme s'il n'y avoit pour lui que 10 rangs. Or *Tibére* peut auſſi ſe combiner avec 10 rangs; *Caligula* avec 9; *Claude* avec 8; &c. C'eſt donc comme ſi la progreſſion naturelle n'avoit que 10 termes, & que le dixieme fut répété. Mais la ſomme d'une progreſſion naturelle de 10 termes, eſt $(10 + 1) \times \frac{1}{2}^{0} = 55$; ajoutez-y encore une fois le dernier terme 10, pour les combinaiſons pures de l'*Auguſte*, & vous aurez la ſomme de toutes les combinaiſons pures $= 65$. Selon Mr. Euler on l'auroit trouvée $= 66$. Les combinaiſons totales ſont ici 91; donc il y a ſelon Mr. Euler 25 cas de ſéquences, & ſelon Mr. Bernoulli, 26.

C'eſt le même procédé pour les ternes purs: la troiſieme file dans notre exemple ne range plus qu'à 9 de profondeur. On auroit donc 9 rangs complets, & par conſéquent une progreſſion de nombres triangulaires de 9 termes; mais pour éviter la ſéquence circulaire, cette progreſſion n'a plus que 8 termes avec redoublement du dernier: c'eſt donc $n = 8$, qui donne $\frac{8.\ 9.\ 10.}{1.\ 2.\ 3} = 120$.

Pour trouver le dernier ou huitieme terme de cette progreſſion à ajouter, il n'y a qu'à conſidérer que l'*Auguſte* de la premiere file, dont on cherche les combinaiſons, forme avec ces 8 rangs de deux files, préciſément autant de ternes que ces 8 huit rangs donnent d'ambes; or, ſi n eſt $= 8$, on a $\frac{8 \times 9}{2} = 36$; pour la ſomme des ambes, & par conſéquent pour la ſomme des combinaiſons de l'*Auguſte*, ou, ce qui eſt encore la même choſe, pour le huitieme terme de la progreſſion triangulaire qu'on cherchoit, & qu'on auroit pû trouver auſſi en ſe rappellant ſeulement que chaque terme des nombres triangulaires eſt la ſomme de la ſuite naturelle des nombres juſqu'à lui: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$. Ajoutant donc 36 à 120, on à la ſomme des ternes purs, dans notre cas, ſelon M. Bernoulli $= 156$. Selon M. Euler, on auroit eu une progreſſion triangulaire de 9 termes dont la ſomme eût été $= \frac{9 \times 10.11}{1.\ 2.\ 3} = 165$ ternes purs, les ternes totaux ſont ici $= \frac{11.\ 12.\ 13}{1.\ 2.\ 3} = 286$: donc il y a dans ce cas ſelon M. Euler 121 cas de ſéquences; & 130 dans le ſens de M. Bernoulli.

§. 15. Il ſeroit ſuperflu, ſans doute, de donner après cela des exemples de quadernes & de quines, dans cette ſeconde maniere d'eſtimer les ſéquences. Nous en avons aſſez dit, pour qu'à l'aide du principe de la raiſon ſuffiſante, & de l'analogie dont ce principe eſt la baſe, nous puiſſions généraliſer les vérités contenues dans ces exemples

ples particuliers; & en retranchant ſucceſſivement les déterminations individuelles, appercevoir dans un cas ſingulier les propriétés univerſelles des eſpeces & des genres ſous leſquels ce cas étoit renfermé. Ici, par exemple, pour un nombre 13 de médailles, nous avons 13 — 3 rangs d'ambes; 13 — 5 rangs de ternes; 13 — 7 rangs de quadernes; &c. par la même raiſon, nous aurons pour un nombre n, de numeros; n — 3 ambes; n — 5 ternes; n — 7 quadernes &c. Mais ces nombres à retrancher ſucceſſivement 3. 5. 7. répondent aux nombres des files 2. 3. 4. que nous avons ſucceſſivement conſidérées. C'eſt la même raiſon ſuffiſante qui fonde le rapport de diminution de 3 ſur deux files; & de 5 ſur trois files, par conſéquent auſſi de $2f$ — 1 ſur f files.

Ainſi, dans le ſens des ſéquences circulaires, ſi le nombre des numeros de la lotterie ſe nomme n, on aura

Tirage *Combinaiſons pures.*

de 2 N^os. . . . . $\frac{(n-3)(n-2)}{1.\ 2} + n - 3 = \frac{(n-3)n}{1.\ 2}$,

3 N^os. . . $\frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{1.\ 2.\ 3} + \frac{(n-5)(n-4)}{1.\ 2} = \frac{(n-5)(n-4)n}{1.\ 2.\ 3}$;

4 N^os. $\frac{(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + \frac{(n-7)(n-6)(n-5)}{1.\ 2.\ 3} = \frac{(n-7)(n-6)(n-5)n}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$;

5 N^os. $\frac{(n-9)(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} + \frac{(n-9)(n-8)(n-7)(n-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = \frac{(n-9)(n-8)(n-7)(n-6)n}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ 5}$;

Tirage *Séquences.*

de 2 N^os. . . . . $\frac{(n-1)n-(n-3)n}{1.\ 2}$,

3 N^os. . . . . $\frac{(n-2)(n-1)n-(n-5)(n-4)n}{1.\ 2.\ 3}$,

4 N^os. . . . $\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n-(n-7)(n-6)(n-5)n}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$,

5 N^os. . . $\frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n-(n-9)(\ldots)(n-6)n}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$.

& plus généralement encore pour un tirage de t numeros, la ſomme des combinaiſons pures ſera

$$= \frac{(n-2t+1)(n-2t+2)(\ldots)(n-t-1)n}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ t},$$

& celle des ſéquences ſera

$$= \frac{(n-t+1)(n-t+2)(\ldots)(n-t+t)-(n-2t+1)(n-2t+2)(\ldots)(n-t+1)n}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ t}.$$

§. 16. La formule générale des combinaiſons totales, & des combinaiſons pures, pour un nombre quelconque de numeros n, dont on ſuppoſe qu'on tire à chaque tirage un nombre quelconque de numeros t, étant trouvée §. 13. & 15. on a auſſi la formule générale pour la probabilité qu'il n'y aura point de ſéquences, en diviſant les combinaiſons *pures* par les *totales*; cette probabilité ſera ſelon Mr. Euler:

$$= \frac{(n-2t+2)(n-2t+3)(\ldots)(n-t+1)}{(n-t+1)\ (n-t+2)\ (\ldots)\ n}.$$

& ſelon Mr. Bernoulli

$$= \frac{(n-2t+1)(n-2t+2)(\ldots)(n-t-1)}{(n-t+1)\ (n-t+2)\ (\ldots)\ (n-1)},$$

Or

Or, dès que je ſai combien il y a de probabilité pour la non-ſéquence, je ſai en même tems la probabilité qu'il y a pour la ſéquence; puiſque je n'ai qu'à ſouſtraire de l'unité la fraction qui exprime l'une de ces probabilités, pour avoir l'autre.

Ainſi la formule générale pour la probabilité des ſéquences dans le ſens de M. Euler eſt

$$= 1 - \frac{(n-2t+2)\,(n-2t+3)\,(\ldots)\,(n-t+1)}{(n-t+1)\quad(n-t+2)\quad(\ldots)\quad(n)},$$

& dans le ſens de M. Bernoulli, cette probabilité eſt

$$= 1 - \frac{(n-2t+1)\,(n-2t+2)\,(\ldots)\,(n-t-1)}{(n-t+1)\quad(n-t+2)\quad(\ldots)\quad(n-1)}.$$

§. 17. Nommant, pour abréger, le produit des facteurs $(n-2t+2)\,(n-2t+3)\,(\ldots)\,(n-t-1) = a$, & celui des facteurs $(n-t+1)(n-t+2)(\ldots)(n-1) = b$, la probabilité des ſéquences ſera ſelon M. Euler

$$= \frac{bn - a(n-t)\,(n-t+1)}{bn},$$

& ſelon M. Bernoulli

$$= \frac{b - a\,(n-2t+1)}{b}.$$

Ainſi la premiere eſt à la ſeconde :: $bn - a(c+tt-t).bn - ac$, en poſant pour abréger $nn - 2nt + n = c$.

Voilà tout ce qu'il y avoit à examiner à l'égard des ſéquences en général; je ſupprime nombre de conſéquences & d'obſervations qu'on peut tirer de cette Théorie, pour paſſer à l'examen d'une ſeconde queſtion.

§. 18. Si au lieu d'introduire ſimplement le jeu des ſéquences dans la Lotterie de Genes, on vouloit y mettre des prix différens

aux diverſes eſpeces de ſéquences de 2, de 3, ou de pluſieurs nombres, il s'agiroit alors de trouver le nombre de chaque eſpece de ſéquence particuliere binaire, ternaire, quaternaire &c. qui compoſent la ſomme des ſéquences *totales*, que nous venons de trouver. Car, quoique M. Bernoulli nomme *ſuites binaires*, les ſéquences que je viens de déterminer, elles ne peuvent s'appeller ainſi qu'entant que toutes les ſéquences de plus de deux nombres ſont néceſſairement ſéquences de deux nombres en même tems; & c'eſt par cette conſidération que je les ai plutôt appellé *totales*, puisqu'elles renferment toutes les eſpeces particulieres à la fois: par la même raiſon j'appellerai *binaires*, celles qui n'ont que deux nombres qui ſe ſuivent; *ternaires*, celles qui n'en ont que trois tels &c.

Si l'on veut donc déterminer le nombre des cas de chacune de ces eſpeces particulieres, on pourra également le faire, en partant toujours du principe que j'ai ſuivi juſqu'ici; rien n'empêche même de débuter dans cette recherche par le Probleme général qui n'a point de difficultés. Cependant, pour répandre plus de clarté ſur la méthode que j'y employe, je commencerai par les Problemes particuliers.

I. D'abord, ſi l'on ne tire que 2 numeros, c. à d. qu'on n'ait à combiner que 2 files, il eſt évident qu'on n'aura que des ſéquences *binaires;* & ainſi le cas eſt déjà réſolu, puisqu'ici les ſéquences *totales* que nous avons trouvées pour un tirage de 2 numeros, ne renferment que des *binaires.* Mais, pour montrer l'uſage de notre méthode, cherchons encore une fois le nombre de ces binaires.

Pour le trouver, il n'y a qu'à faire redeſcendre la ſeconde file d'un cran afin que chaque Empereur ſe trouve à côté de ſon ſucceſſeur immédiat. Alors on aura au premier rang complet *Auguſte - Tibére;* & au dernier *Nerva - Trajan.* Il eſt évident que cette poſition repréſente tous les cas des ſéquences binaires; & que le nombre de ces cas eſt préciſément égal à celui des rangs. Or la premiere file contient n médailles, la ſeconde miſe en poſition de ſéquence en contient une de moins; il y a donc $n - 1$ rangs, & par conſéquent $n - 1$ ſéquen-

quences binaires ſelon M. Euler. Joignons y la ſéquence circulaire *Trajan-Auguſte*, & nous aurons les binaires, ſelon M. Bernoulli $= n$.

§. 19. II. Si l'on tire 3 numeros, le cas eſt auſſi actuellement réſolu. Car nous ſavons le nombre des ſéquences rotales. Or il ne peut y en avoir ici que des binaires, & des ternaires. Mais les ternaires ſont connues, puiſque c'eſt la plus grande ſéquence que le tirage de 3 numeros peut fournir. Cette ſéquence eſt conſtante pour tous les tirages dans le ſens de Mr. Bernoulli, & toujours égale au nombre total des numeros $= n$. Car, ſi je conçois 20 arbres plantés en cercle, & que j'en choiſiſſe un à volonté pour le commencement de la premiere ſéquence, ſoit binaire, ou ternaire &c. le ſecond ſera le commencement de la ſeconde ſéquence; le troiſieme de la troiſieme; & par conſéquent le vingtieme & dernier, de la vingtieme & derniere. Dans le ſens de M. Euler, cette ſéquence eſt toujours égale au nombre total des numeros n, moins le nombre des files, ou des numeros qu'on tire, diminué de l'unité. Car la plus grande ſéquence ſuppoſe toutes les files rangées en ſéquences, ou en échelons d'un nombre; il y aura donc préciſément autant de rangs complets, que la premiere file contient d'individus, moins le nombre des files ſuivantes.

Voyons cependant l'uſage de notre méthode auſſi pour ce cas ci. Les trois files miſes en ſéquences donnent au premier rang complet *Auguſte Tibere Caligula*, au dernier *Domitien Nerva Trajan*. Cette poſition repréſente d'un coup d'oeil tous les ternaires poſſibles; car, dès qu'on dérangeroit l'une des trois files, il n'y pourroit plus avoir de ſéquences ternaires: le nombre de ces ſéquences eſt donc égal à celui des rangs complets, & celui-ci à la longueur de la plus courte file; elle eſt dans ce cas $= n - 2$. Donc, ſelon l'eſtimation de M. Euler, il y aura $n - 2$ ternaires.

Mais, ſelon M. Bernoulli, les deux rangs incomplets doivent être completés à l'aide de la révolution circulaire: on a donc encore les deux rangs *Nerva Trajan Auguſte*, & *Trajan Auguſte Tibere*, à ajouter à la ſomme $n - 2$, qui par là devient $= n$.

Pour

Pour trouver maintenant les binaires, il n'y a qu'à hauſſer la troiſieme file encore d'un échelon. Alors chaque ſéquence binaire que forment les deux premieres files ſe combine avec tous les individus de la troiſieme qui n'eſt plus que de $n - 3$ nombres. Le premier rang ſera *Auguſte Tibere Claude*, le dernier *Tite Domitien Trajan.* Comme les deux premiers files doivent reſter immobiles pour former ſéquence, elle ne font qu'un ſeul faiſceau, & on doit les conſidérer ici comme une ſeule file qui ſe combine avec la troiſieme. Cela revient donc au calcul des ambes, que nous avons expliqué ci-deſſus, & la ſomme de ces binaires, pour $n - 3$ rangs, ſera

$$= \frac{(n-3)\,(n-2)}{1.\quad 2}.$$

Dans la ſuppoſition de M. Bernoulli, la premiere ſéquence *Auguſte Tibére*, ne ſauroit ſe combiner avec le *Trajan*, dernier de la troiſieme file, parce que cela donneroit un ternaire: ainſi, par les principes expliqués ci-deſſus, la ſomme des combinaiſons binaires ſera

$$\frac{(n-4)\,(n-3)}{1.\quad 2} + (n-4) = \frac{(n-1)\,(n-4)}{2}.$$

Nous avons ſuppoſé les deux premieres files immobiles dans leur poſition de ſéquence, en faiſant gliſſer la troiſieme. Mais rien n'empêche qu'on ne doive pareillement faire mouvoir la premiere, en poſant les deux dernieres immobiles en état de ſéquence: il ſuffit pour cet effet de hauſſer d'un échelon la ſeconde file: le premier rang ſera *Auguſte Caligula Claude*, & le dernier, *Tite Nerva Trajan*, & comme d'ailleurs le même nombre de rangs & de faiſceaux ſubſiſte, il n'y a point de raiſon pourquoi le réſultat devroit différer dans les ſéquences rectilignes. Cette combinaiſon, faite en ſens contraire, donnera donc encore $\frac{(n-3)\,(n-2)}{1.\quad 2}$ binaires.

Mais

Mais dans les ſéquences circulaires il y a pour cette poſition une ſéquence de plus à ajouter, ſavoir celle de *Trajan Auguſte*, qui ſe combine auſſi par $n - 4$ nombres, c. à d. depuis ſon correſpondant *Domitien*, en remontant juſqu'à *Caligula* incluſivement, ce qui joint au nombre des cas binaires trouvé dans la premiere combinaiſon donne $\frac{(n-1)(n-4)}{2} + (n-4) = \frac{n(n-4)}{2}$.

Ainſi, ſi de n numeros on en tire 3 au hazard, il y aura dans le ſens de Mr. Euler

$n - 2$ cas de ternaires,

& $(n-3)(n-2)$ cas de binaires.

Dans le ſens de Mr. Bernoulli, on aura

n cas de ſéquences ternaires,

& $n(n-4)$ cas de binaires.

§. 20. III. Que l'on tire maintenant 4 numeros, c'eſt le cas de 4 files, qui placées d'abord toutes en échelons de ſéquence, donnent $n - 3$ rangs complets. C'eſt donc là le nombre des ſéquences quadernaires ſuivant la méthode de M. Euler.

Complettant les rangs imparfaits en faveur des ſéquences circulaires, on aura dans cette ſuppoſition n quaternaires.

Pour trouver les ternaires, il faut concevoir les trois premieres files fixées dans leur état de ſéquence, & hauſſer la quatrieme d'un nombre, le premier rang ſera *Auguſte Tibére Caligula*, *Néron*.

On aura en tout $n - 4$ rangs complets, & deux faiſceaux à combiner: la ſomme de la progreſſion naturelle qui exprime cette combinaiſon eſt par conſéquent $\frac{(n-4)(n-3)}{2}$.

Selon M. Bernoulli, par les raiſons qu'il ſeroit tédieux de répéter, elle doit être $= \frac{(n-5)(n-4)}{2} + n - 5 = \frac{(n-2)(n-5)}{2}$.

Renverſant enſuite le procédé, en mettant les 3 dernieres files en ſéquence, pour les combiner collectivement avec la premiere; les données étant d'ailleurs les mêmes, le réſultat le ſera auſſi: donc la ſomme des ternaires ſera ſelon M. Euler $= (n - 4)(n - 3)$, ſelon M. Bernoulli, elle ſeroit par conſéquent $= (n - 2)(n - 5)$. Mais, à cauſe des ſéquences circulaires, après le dernier rang qui eſt ici *Veſpaſien Domitien Nerva Trajan*, on doit encore ajouter les rangs des deux ternaires *Nerva Trajan Auguſte*, & *Trajan Auguſte Tibére*, qui ſe combinent chacun $n - 5$ fois; donc la ſomme des cas ternaires devient $= n(n - 5)$. Reſte à trouver les binaires, dans les deux ſuppoſitions. On peut à la vérité les avoir tout d'un coup, en ſouſtraiſant les ſéquences trouvées, de la ſomme des ſéquences totales. Mais cela n'éclairciroit pas la méthode d'y procéder. Concevons donc d'abord les 4 files poſées deux à deux en ſéquences ſéparées: le premier rang ſera donc *Auguſte Tibére*, *Claude Néron*, & le dernier *Veſpaſien Tite*, *Nerva Trajan*, la plus courte file ſera élevée par conſéquent de 4 échelons au deſſus de la premiere, ce qui donne $n - 4$ rangs complets. Puisque chaque paire de files eſt cenſée immobile, & ne compoſer qu'un ſeul tout, ce ſont deux faiſceaux à combiner. La ſomme des combinaiſons ſera donc $= \frac{(n-4)(n-3)}{2}$, & comme ici la raiſon ſuffiſante du renverſement ceſſe, puisqu'après le renverſement nous n'aurions que les mêmes individus dans chaque rang, qui y ſont actuellement; voilà déjà toutes les ſéquences doubles binaires poſſibles dans l'eſtimation de M. Euler.

Dans celle de M. Bernoulli, on aura pour $n - 5$ rangs, avec la répétition $\frac{(n-5)(n-4)}{2}$: puis ajoutons aux dernie-

res

res files la ſéquence *Trajan Auguſte*, qui ſe combine auſſi $n - 5$ fois, le total ſera $= \frac{n\,(n-5)}{2}$.

Laiſſant maintenant les deux premieres files en ſéquence, la troiſieme doit reſter dans ſa poſition actuelle, car en la deſcendant d'un échelon elle formeroit les ternaires que nous avons déjà. C'eſt donc la quatrieme file qui doit hauſſer d'un cran, pour rompre la ſéquence qu'elle formoit avec la troiſieme. Nous n'avons donc plus que $n - 5$ rangs complets, & 3 faiſceaux ou files à combiner. C'eſt le cas des ternes. La progreſſion des nombres triangulaires qui a lieu ici, donne la ſomme de ces combinaiſons $= \frac{(n-5)\,(n-4)\,(n-3)}{1.\quad 2.\quad 3}$.

Mais cette opération peut ſe répéter 3 fois, car le faiſceau des files en ſéquence, peut occuper la droite, la gauche & le milieu des deux files iſolées. On aura, ou *Auguſte-Tibère*, *Claude Galba*, ou *Auguſte Caligula-Claude Galba*, ou *Auguſte Caligula Néron-Galba*; & il n'y a point de raiſon d'exclure l'un ou l'autre de ces trois cas: il faut donc tripler le réſultat qui donne la ſomme des ſimples binaires ſelon M. Euler $= \frac{(n-5)\,(n-4)\,(n-3)}{1.\quad 2}$.

Dans le ſens de M. Bernoulli on aura donc auſſi 3 fois

$$\frac{(n-6)\,(n-5)\,(n-4)}{1.\quad 2.\quad 3} + \frac{(n-6)\,(n-5)}{1.\quad 2}.$$

Mais ce n'eſt pas tout; dans la troiſieme opération où le faiſceau des ſéquences eſt à la droite, compoſé des deux plus courtes files, il faut encore ajouter la ſéquence circulaire *Trajan-Auguſte*; qui ſe combine auſſi avec $n - 6$ rangs, ce qui donne $\frac{(n-6)\,(n-5)}{1.\quad 2}$, à ajouter à ce que deſſus; la ſomme totale des binaires ſimples ſera donc en

ce ſens $= \frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{1.} + \frac{4(n-6)(n-5)}{2}$

$= \frac{n(n-6)(n-5)}{1.\ \ 2}$.

Réſumons ces réſultats.

Si de n numeros on en tire 4 au hazard, le nombre des cas poſſibles de ſéquences dans le ſens ou M. Euler les prend ſera

$n-3$ ſéquences quaternaires,

$\frac{(n-3)(n-4)}{1}$ ſéquences ternaires,

$\frac{(n-3)(n-4)(n-4)}{1.\ \ 2}$ ſéquences binaires.

Dans le ſens des ſéquences circulaires on a

n ſéquences quaternaires,

$n(n-5)$ ſéquences ternaires,

$n(n-5)(n-5)$ ſéquences binaires.

§. 21. Expédions encore le cas d'un tirage de 5 numeros; & pour éviter la confuſion, reſervons les ſéquences circulaires, pour la méthode inverſe de celle que j'ai ſuivie juſqu'ici.

I. Toutes les files en ſéquence donnent $n-4$ rangs complets, donc $n-4$ cas de ſéquences quinaires.

II. Les 4 premieres files en ſéquence de quaderne, & la derniere élevée d'un cran plus haut qu'elle n'étoit, donnent $n-5$ rangs complets, il n'y a ici que deux faiſceaux; ainſi l'on a $\frac{(n-5)(n-4)}{2}$ combinaiſons, cette opération renverſée en donne encore autant: donc en tout $(n-5)(n-4)$ cas de ſéquences quaternaires.

III.

III. A. Les trois premieres files en ſéquence, & la quatrieme élévée d'un échelon pour faire avec la cinquieme une ſéquence binaire ſéparée, il y aura encore $(n - 5)$ rangs complets: ce ſont deux faiſceaux à combiner, & l'opération peut ſe renverſer en mettant le faiſceau des binaires à gauche, & les ternaires à droite; on a donc deux fois $\frac{(n-5)(n-4)}{2}$ combinaiſons: donc $(n-5)(n-4)$ cas de ternaires binaires.

B. Les trois premieres files reſtant en ſéquence, & les deux autres hors de ſéquence en élévant la derniere d'un échelon de plus, donnent $n - 6$ rangs à combiner, on a ici 3 faiſceaux: c'eſt le cas des combinaiſons de ternes; l'opération peut varier en trois manieres, en faiſant la ſéquence ternaire, à gauche, à droite, & au milieu des deux files iſolées: on a donc en tout $\frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{1.\quad 2}$ cas de ternaires ſimples.

IV. A. Les binaires ternaires ſont déjà compris ſous les ternaires.

B. Les doubles binaires peuvent exiſter en 3 façons. Car la file iſolée peut-être à gauche, à droite, ou au milieu des deux ſéquences: dans les trois cas il y a $n - 6$ rangs, & 3 faiſceaux à combiner; cela donne pour la triple combinaiſon $\frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{1.\quad 2}$ cas de doubles binaires.

C. Enfin les ſimples binaires ſuppoſent 3 files élevées hors de ſéquence, & par conſéquent $n - 7$ rangs; dont le premier ſera *Auguſte Tibére*, *Claude*, *Galba*, *Vitellius*. Mais la ſéquence qui eſt ici à la gauche, peut auſſi occuper la droite, ou les deux places intermédiaires, ce qui fait 4 diſpoſitions différentes; & comme on a

4 faiſceaux à combiner, cela donne en tout $\frac{(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)}{1.\quad 2.\quad 3}$ pour tous les cas de binaires ſimples.

§. 22. Cherchons encore ces mêmes réſultats pour les ſéquences circulaires, toujours dans le cas de 5 files; & commençons par les ſéquences binaires.

I. A. Les binaires ſimples ſuppoſent $n - 7$ rangs, 4 faiſceaux à combiner, & 4 diſpoſitions différentes; on a donc dans ce calcul-ci, 4 fois $\frac{(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$ $+ \frac{(n-8)(n-7)(n-6)}{1.\quad 2.\quad 3} = \frac{(n-1)(n-8)(n-7)(n-6)}{1.\quad 2.\quad 3}$, & lorsque la ſéquence eſt formée par les deux plus courtes files, il s'y joint encore celle de *Trajan Auguſte*, qui combinée par $n - 8$ rangs de 3 files donne $\frac{(n-8)(n-7)(n-6)}{1.\quad 2.\quad 3}$: donc la ſomme des cas de ſimples binaires eſt $= \frac{n(n-8)(n-7)(n-6)}{1.\quad 2.\quad 3}$.

B. Les doubles binaires ſuppoſent $n - 6$ rangs complets, & 3 tranſpoſitions des trois faiſceaux, ce qui donne trois fois $\frac{(n-7)(n-6)(n-5)}{1.\quad 2.\quad 3} + \frac{(n-7)(n-6)}{1.\quad 2} = \frac{(n-2)(n-7)(n-6)}{1.\quad 2}$. Mais il y a deux diſpoſitions où les deux dernieres files ſont en ſéquence, ſavoir lorsque la file iſolée eſt à gauche, & lorsqu'elle ſe trouve au milieu eds deux faiſceaux; dans chacun de ces cas on a la ſéquence *Trajan Auguſte* à ajouter, & à combiner avec $n - 7$ rangs de deux files, ce qui donne $\frac{2(n-7)(n-6)}{1.\quad 2}$: donc le total des cas de doubles binaires eſt $= \frac{n(n-7)(n-6)}{1.\quad 2}$.

II. A. Les ternaires ſimples ſont repréſentés par le rang, *Auguſte-Tibére-Caligula*, *Néron*, *Othan*, trois faiſceaux, trois tranſpoſitions, & n — 6 rangs; à quoi s'ajoute, lorsque le ternaire eſt aux dernieres files, les deux ternaires, *Nerva-Trajan-Auguſte*, *Trajan-Auguſte-Tibére*, à combiner par deux files de $n-7$ rangs: la ſomme des ternaires ſimples doit donc être ici $\frac{(n-7)(n-6)(n-5)}{1.\quad 2}$

$$+\frac{3(n-7)(n-6)}{1.\quad 2}+\frac{2(n-7)(n-6)}{1.\quad 2}=\frac{n(n-7)(n-6)}{1.\quad 2}.$$

B. Les ternaires binaires n'ont que deux poſitions, *Auguſte-Tibére-Caligula*, *Néron Galba*, & *Auguſte-Tibére*, *Claude Néron Galba*. Chacune à n — 5 rangs, & par conſéquent ici n — 6 avec la répétition, il y a 2 faiſceaux à combiner; dans la premiere poſition on doit ajouter la ſéquence binaire *Trajan Auguſte*, & dans la ſeconde poſition les deux ternaires, *Nerva Trajan Auguſte*, & *Trajan Auguſte Tibére:* on a donc en tout,

$$(n-6)(n-5)+2(n-6)+(n-6)+2(n-6)=n(n-6).$$

III. Reſtent les quaternaires à trouver: C'eſt deux faiſceaux à combiner par n — 5 rangs complets, il n'y a non plus que deux poſitions différentes: quand le quaternaire eſt à la droire de la file iſolée, il s'allonge des trois quaternaires, *Domitien-Nerva-Trajan-Auguſte*, *Nerva-Trajan-Auguſte-Tibére*, & *Trajan-Auguſte-Tibére-Caligula*, qui ſe combinent avec n — 6 rangs: le total des ces quaternaires eſt donc

$$(n-6)(n-5)+2(n-6)+3(n-6)=n(n-6).$$

V. Le nombre des quinaires eſt $=n$, c'eſt ce qu'on ſait déjà.

Réſu-

Réſumant encore ces réſultats; il conſte que ſi de n numeros, on en tire 5 au hazard, le nombre des cas poſſibles de ſéquences ſera dans la ſuppoſition de M. Euler:

$n - 4$ . . . . . ſéquences quinaires,

$\frac{(n-4)(n-5)}{1}$ . . . . . ſéquences quaternaires.

$\frac{(n-4)(n-4)(n-5)}{1.\quad 2}$ . . . ſéquences ternaires,

$\frac{(n-4)(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\quad 2.\quad 3}$ . . ſéquences binaires.

Et dans le ſens de M. Bernoulli.

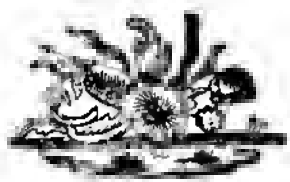
n . . . . . ſéquences quinaires

$\frac{n(n-6)}{1}$ . . . . . ſéquences quaternaires.

$\frac{n(n-5)(n-6)}{1.\quad 2}$ . . . . ſéquences ternaires,

$\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\quad 2.\quad 3}$ . . ſéquences binaires.

Ce Mémoire étant déjà trop étendu, je reſerve pour le ſuivant les formules du Probleme général, & les obſervations curieuſes qui en réſultent.



SUR

SUR

LES SUITES OU SÉQUENCES

DANS

LA LOTTERIE DE GENES.

SECOND MÉMOIRE.

§. 1.

J'ai dit dans mon premier Mémoire ſur ce ſujet, qu'il étoit indifférent en ſuivant ma méthode de débuter par la Solution du Probleme général, ou par celle des cas particuliers. C'eſt-ce que je me propoſe de prouver aujourd'hui par la recherche des deux formules générales pour toutes les eſpeces de ſéquences quelconques, priſes dans les deux ſens différens ſous lesquels Mrs. Euler & Bernoulli les ont enviſagées. Mais ce que je me propoſe principalement ici, & ce que je crois plus important que la découverte de ces formules, c'eſt de montrer l'utilité des principes métaphyſiques dans l'emploi des calculs de l'algébre, & de donner un échantillon de la Philoſophie ſpéculative appliquée à l'analyſe.

§. 2. Qu'eſt-ce que l'on cherche lorsqu'on veut parvenir en algébre à une formule générale? C'eſt de trouver une regle qui puiſſe ſervir à décider tous les cas particuliers qu'elle doit renfermer; de même qu'en Juriſprudence une loi générale ſur la maniere de ſuccéder, par exemple, doit s'appliquer à tous les cas de ſucceſſion qui ſe préſentent tous les jours à décider dans un Etat.

Les loix ſe forment, ou de l'induction des cas particuliers, c'eſt ce qu'on nomme en droit civil la Juriſprudence des arrêts, ou bien le légiſlateur tire ces loix de la nature même de l'objet général qu'elles concernent; on trouve dans le droit romain des exemples fré-

quens de l'une & de l'autre eſpece de ces loix. Toutes les diverſes branches des ſciences nous en offrent également des deux ſortes; mais presque dans toutes, la premiere eſpece eſt celle qu'on rencontre le plus ſouvent. La Médecine, l'Aſtronomie, la Phyſique, la Chymie, la Botanique, ne ſont devenues des ſciences qu'à force de comparer des obſervations individuelles, & d'en former des regles plus ou moins générales, à proportion du nombre plus ou moins grand de cas particuliers auxquels ces loix ſont applicables. La Philoſophie ſpéculative, & la Géométrie ont en commun le double avantage de remonter des cas individuels aux loix générales, & de voir dans les notions générales, les loix qui conviennent à chaque individu renfermé ſous ces notions.

§. 3. Soit que l'on remonte du particulier au général, ou que l'on deſcende du général au particulier; le paſſage de l'un à l'autre eſt fondé ſur le principe de la raiſon ſuffiſante, & de l'analogie qui n'eſt qu'une application répétée de ce principe. Pourquoi concluons-nous du particulier au général? ſi notre concluſion eſt légitime, ce n'eſt que parce que la même raiſon qui décide l'état d'un cas individuel, décide également de l'état de tous les autres. Ce n'eſt qu'autant que les divers cas particuliers ſont déterminés par un même principe, que nous les pouvons ranger ſous une même regle générale.

Pourquoi concluons-nous du général au particulier? C'eſt parce que nous voyons que la raiſon de la détermination générale doit être commune à tous les individus. Ce n'eſt qu'autant que les ſujets individuels ont, nonobſtant leur diverſité, quelque qualité commune à tous, qu'ils peuvent être ſoumis à une même & ſeule loi.

§. 4. Appliquons cette théorie aux ſéquences. Qu'ont-elles de commun? C'eſt d'être des ſuites de 2 ou de pluſieurs nombres conſécutifs. En quoi peuvent elles différer? C'eſt d'être d'une ſeule ou de pluſieurs eſpèces à la fois, par exemple, ou compoſées de *quinaires* ſeuls, ou compoſées à la fois de *quinaires*, & de *ternaires*, & de telle autre eſpece qu'on voudra. La premiere eſpece renferme donc

toutes

toutes les *ſéquences homogénes*, & la ſeconde toutes les *ſéquences mixtes.* Chacune de ces deux eſpeces peut encore être ou *ſimple*, ou *multiple;* c. à d. repétée pluſieurs fois: une *ſéquence ſimple*, ſera par exemple un *quinaire*, ou un *quinaire binaire;* une ſéquence multiple, ſera par exemple un *triple quinaire*, ou un *double quinaire* accompagné d'un *triple binaire.*

§. 5. Toutes les ſéquences poſſibles ſont évidemment compriſes ſous l'une de ces quatre claſſes. Mais, pour leur préſcrire une regle unique, il faut réduire ces quatre claſſes á une ſeule qui les renferme toutes; ſans cela il faudra autant de regles différentes, qu'il y aura de claſſes irréductibles.

Or nous ne ſaurions ranger les ſéquences multiples, dans la claſſe des ſéquences ſimples, car le ſimple ne ſauroit contenir ce qui ne l'eſt pas. Mais nous pouvons très bien ranger les ſéquences ſimples ſous la claſſe des multiples. Car la multiplicité n'eſt qu'une ſimplicité ou unité priſe un certain nombre de fois; & puisque ce nombre n'eſt point déterminé, il peut être auſſi bien 1, ce qui eſt le cas des ſéquences ſimples, que 2, 3, 4, &c. ce qui eſt le cas des ſéquences multiples. Voilà donc nos quatre claſſes réduites à deux; ſavoir aux ſéquences *multiples homogénes*, & aux ſéquences *multiples mixtes.* Or les *mixtes* ne ſauroient être contenues ſous les *homogénes*, car ce qui eſt homogéne ne ſauroit être *mixte.* Mais le mixte peut très bien repréſenter l'homogéne, car la *mixture* peut auſſi bien être le mélange de ſéquences homogénes, que celui de ſéquences hétérogènes. Si donc nous trouvons la formule des ſéquences multiples mixtes, nous aurons la loi générale de toutes les eſpeces de ſéquences.

§. 6. Or le nombre des cas d'une ſéquence quelconque dépend du nombre des combinaiſons des files par les rangs complets, & des tranſpoſitions différentes dont chaque combinaiſon eſt ſuſceptible; & il ne ſauroit dépendre que de ces deux éléments. Ainſi, ſi nous nommons le nombre des combinaiſons C, & le nombre des tranſpoſitions

diverſes que chaque combinaiſon peut avoir T, la formule générale des cas de ſéquences ſera $=$ T $\times$ C.

§. 7. Mais quels ſont les éléments qui déterminent le nombre des combinaiſons? Ce ſont la quantité des rangs, & celle des files à combiner. Nommant donc le nombre des rangs R, & celui des faiſceaux à combiner F; $\frac{(R)\ (R+1)\ \ldots\ (R+F-1)}{1.\quad 2\ \ldots\ F}$, exprimera plus préciſément, ce que C exprimoit d'une maniere plus vague; & ſubſtituant l'expreſſion plus préciſe à l'autre, notre formule devient $=$ T $\times$ $\frac{(R)\ (R+1)\ (\ldots)\ (R+F-1)}{1.\quad 2\ \ldots\ F}$.

§. 8. Chacun de ces deux éléments, R, F, a de nouveau ſes parties intégrantes qui conſtituent ſon tout; & c'eſt ici où la formule qui juſqu'à préſent concerne également les ſéquences de M Euler, & celles de M. Bernoulli, doit ſe ſéparer en deux formes différentes, parce que le nombre des rangs différe dans ces deux manieres d'évaluer les cas des mêmes ſéquences. Je déterminerai d'abord la formule dans le ſens de M. Euler.

Le nombre des rangs R, eſt ici égal à la longueur de la derniere file, comme on l'a vû dans mon premier Mémoire. Or cette derniere file eſt égale à la longueur de la premiere n, moins le raccourciſſement qui réſulte de l'arrangement des files ſuivantes miſes en ſéquence, ou hors de ſéquence, c. à d. du nombre d'échelons E, dont chaque file ſurpaſſe ſa précédente: on peut donc ſubſtituer à R, qui marquoit les rangs complets, l'expreſſion n — E, & la formule devient $=$ T $\frac{(n-E)\ (n-E+1)\ (\ldots)\ (n-E+F-1)}{1.\quad 2.\quad 3\ \ldots\ F}$.

§. 9. Nous voici arrivés à un élément n, qui n'eſt plus ſuſceptible de décompoſition; car puiſqu'il marque le nombre total des numeros de la lotterie, ou la longueur totale de chaque file, on

ne

ne ſauroit le déterminer plus préciſément ſans le rendre un nombre individuel, & ſans reſtraindre par conſéquent la formule à ne ſervir de regle que pour une lotterie d'un nombre déterminé de numeros.

§. 10. L'autre élément E, qui déſigne le nombre des échelons dont chaque file ſurpaſſe ſa précédente, eſt déterminé par le nombre des ſéquences joint à celui des files iſolées; les files en ſéquences ne peuvent s'élever l'une ſur l'autre, que d'un ſeul échelon; les files iſolées doivent s'élever de deux, pour être hors de ſéquence; & pareillement les faiſceaux des diverſes ſéquences s'élevent de deux échelons, ſans quoi ils ne formeroient qu'une ſeule ſéquence plus nombreuſe. Donc, nommant t le nombre des files, il eſt clair que ſi elles étoient toutes iſolées hors de ſéquence, E ſeroit le double de $t - 1$. Car la premiere file n'a point d'élévation. Mais, puiſqu'il y a des ſéquences, il faut retrancher pour chaque ſéquence autant d'échelons que la ſéquence contient de files, moins la premiere, qui excéde de deux crans le faiſceau précédent. Or les ſéquences mixtes dont nous cherchons ici la formule, peuvent contenir toutes les eſpeces de ſéquences, depuis la plus nombreuſe que j'appellerai S, juſqu'à la moins nombreuſe qui eſt le binaire 2. Ainſi la ſéquence mixte eſt repréſentée par la progreſſion arithmétique deſcendante

$$S + S - 1 + S - 2 + \ldots + 2.$$

Ce n'eſt pas tout, notre formule doit contenir les multiples de chacune de ces ſéquences, car chacune d'elle peut être répétée plus ou moins de fois, nous nommerons donc M, le nombre qui exprime la répétition d'une ſéquence, en nous ſouvenant que ce nombre peut être le même pour chaque ſéquence, & qu'il peut auſſi varier d'une ſéquence à l'autre en plus & en moins, au moyen de quoi l'expreſſion des ſéquences mixtes multiples ſera

$$SM + (S - 1)M + (S - 2)M + \ldots + 2M,$$

& par conſéquent l'expreſſion plus déterminée, à ſubſtituer à E, ſera

$$= 2t - 2 - (S - 1)M - (S - 2)M \ldots - M,$$

par cette ſubſtitution l'expreſſion des rangs complets devient

$$R = n - 2t + 2 + (S-1)M + (S-2)M + \ldots + M,$$

Et comme elle eſt réduite à quatre élémens n, t, S, M, qui ne peuvent plus recevoir de décompoſition ultérieure, ſans y ſubſtituer les nombres individuels qu'ils repréſentent, elle a toute la préciſion dont elle eſt ſuſceptible. Mais, pour l'abréger, poſant $n - 2t + 2 = N$, & la progreſſion arithmétique $S - 1 + S-2 + S-3 + \ldots 1 = P$, on aura $R = N + PM$, & par conſéquent la formule cherchée devient $\frac{T(N+PM)(N+PM+1)(\ldots)(N+PM+F-1)}{1. \quad 2 \ldots\ldots (F-1)}$.

§. 11. Cherchons maintenant, pour achever l'article des combinaiſons, à nous faire une idée plus préciſe de l'expreſſion F, qui déſigne le nombre des faiſceaux à combiner. Or ce nombre eſt compoſé de celui des ſéquences multiples mixtes, & de celui des files iſolées qui ne forment point de ſéquence. Mais nous venons de voir que le nombre des ſéquences multiples s'exprime par M, & ſi nous nommons celui des files iſolées I, nous aurons pour F, l'expreſſion moins vague $M + I$.

§. 12. Le terme I eſt ſuſceptible encore d'une plus grande préciſion, car il y aura toujours autant de files iſolées, qu'il y a de files en tout, moins les files employées à former des ſéquences, le nombre de ces dernieres eſt exprimé par la progreſſion $SM + (S-1)M + \ldots + 2M$, ou comme nous venons de l'abréger par $(P+1)M$, & le nombre total des files étant t, on peut ſubſtituer à l'expreſſion I celle-ci $t - (P+1)M$, & alors on a $F = t - PM$, dont tous les élémens ſont auſſi ſimples & auſſi déterminés qu'ils peuvent l'être. Ainſi notre formule qui d'abord étoit $T \times C$, eſt préſentement

$$T\,\frac{(N+PM)(N+PM+1)(\ldots)(N+t-1)}{1. \quad 2 \ldots\ldots (t-PM)},$$

dans

dans laquelle il ne reſte plus, qu'à apprécier plus clairement les tranſpoſitions T.

§. 13. Les regles des tranſpoſitions ſont connues & faciles à trouver; *une* choſe n'a qu'une poſition, *deux* choſes peuvent être tranſpoſées de *deux* façons; *trois* choſes de 2 fois *trois* façons, *quatre* choſes de 2 fois 3 fois *quatre* façons, & ainſi de ſuite. Si parmi les choſes à tranſpoſer il y en a deux de ſemblables, leur tranſpoſition ne donneroit aucun réſultat différent; il faut donc diviſer le produit par 2; s'il y en a 3 ſemblables, le produit ſe diviſera par 2 fois *trois* &c.

Cela ſuppoſé connu, quelle ſera la tranſpoſition de chaque rang compoſé de ſéquences mixtes multiples, & de files iſolées? Ce ſera le produit des nombres naturels juſqu'à celui qui exprime la ſomme des choſes à tranſpoſer contenue dans ce rang diviſé par le produit de ces mêmes nombres naturels pour chaque choſe qui ne ſera pas ſuſceptible de tranſpoſition. Ainſi T doit être exprimé par une fraction, dont nous nommerons le dénominateur D, & le numérateur eſt 1. 2. 3 (. . .) F, & ſubſtituant pour F ſon expreſſion préciſe que nous venons de déterminer, on aura

$$T = \frac{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ (t - PM)}{1.\ 2\ \ldots\ D}.$$

§. 14. Le dénominateur D repréſente les choſes qui ne ſont pas ſuſceptibles de tranſpoſitions; or ces choſes ce ſont 1°. les multiples de chaque eſpece particuliere de ſéquences, qui entr'eux ne ſe peuvent pas tranſpoſer, quoiqu'ils ſe tranſpoſent fort bien avec les ſéquences d'une autre eſpece, & avec les files iſolées. 2°. Ces mêmes files iſolées, qui entr'elles ne ſe tranſpoſent point, quoiqu'elles ſe tranſpoſent très bien avec les ſéquences. On peut donc ſubſtituer à D, ſon expreſſion préciſe M, pour les multiples des ſéquences, &

$t - (P + 1)M$: pour les files iſolées, & alors nous aurons la formule que nous cherchions dans toute ſa préciſion,

$$\frac{1.2.3(\ldots)(t-PM)}{(1.2..(t-(P+1)M)(1.2.(\ldots)M)} \quad \frac{(N+PM)(N+PM+1)(\ldots)(n-t+1)}{1. \quad 2 \quad . \quad (\ldots)(t-PM)}$$

§. 15. Si l'on veut confondre les tranſpoſitions avec les combinaiſons, on pourra effacer de la formule le numérateur entier des tranſpoſitions, & le dénominateur entier des combinaiſons, & la regle générale deviendra

$$= \frac{(N+PM)\,(N+PM+1)\,(\ldots)\,(n-t+1)}{(1.\,2\,\ldots(t-(P+1)\,M)\,(1.\,2\,\ldots\,M)}.$$

§. 16. Mais, en conſervant pour la régularité du dévelopement chaque élément en ſa nature, on peut retrancher des tranſpoſitions tous les facteurs qui ſe détruiſent mutuellement, & alors la formule générale pour les ſéquences quelconques dans le ſens de M. Euler eſt

$$\frac{(t-(P+1)\,M+1)\,(t-(P+1)\,M+2)\,(\ldots)\,(t-PM)}{(1.\,2\,\ldots\,M)} \times \frac{(N+PM)\,(N+PM+1)\,(\ldots)\,(n-t+1)}{1. \quad 2\,\ldots\,(t-PM)}.$$

§. 17. Il ne ſera pas mal aiſé de transformer cette formule en celle qui donnera tous les cas de ſéquence quelconque dans le ſens de M. Bernoulli.

Les combinaiſons ne différent, comme je l'ai montré dans mon premier Mémoire, qu'en deux articles. 1°. qu'à égal nombre de files il y a toujours un rang de moins, avec la répétition du plus grand terme, de ſorte que, quand la formule pour les ſéquences de M. Euler eſt (§. 7) $T\,\frac{(R)\,(R+1)\,(\ldots)\,(R+F-1)}{1. \quad 2\,\ldots\,F}$, celle de M. Bernoulli ſera à cet égard,

$$T\frac{(R-1)(R)(R+1)(\ldots)(R+F-2)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad (\ldots) \quad (F)} + T.\frac{(R-1)(R)(\ldots)(R+F-3)}{1. \quad 2. \,(\ldots) \quad (F-1)},$$

qui

qui réduite à un même dénominateur eſt,

$$T\,\frac{(R+2F-2)\,(R-1)(R)(R+1)\,(\ldots)\,(R+F-3)}{1.\qquad 2\ldots\ldots\ldots F},$$

& comme les tranſpoſitions ſont ici les mêmes, il n'y a rien à changer à l'expreſſion trouvée pour T.

§ 18. 2°. Le ſecond article en quoi les deux méthodes différent, c'eſt que dans celle de M. Bernoulli, toutes les fois que les ſéquences occupent les plus courtes files, où par conſéquent ſe trouvent les derniers numeros, le nombre de ces ſéquences eſt augmenté d'*un* pour les *binaires*, de 2 pour les *ternaires*, & en général de S — 1, pour la ſéquence quelconque S, & par conſéquent auſſi de P, pour toutes les ſéquences mixtes quelconques, ce qui donne autant de combinaiſons à ajouter, de R — 1 rangs, par F — 1 faiſceaux: cette addition à la formule ſera donc

$$+\,T'\times P\,\frac{(R-1)\,(R)\,(R+1)\,(\ldots)\,(R+F-3)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots(F-1)}.$$

§. 19. Reſte à déterminer la valeur de la tranſpoſition T'. On voit bien qu'elle n'eſt pas la même que nous avons déjà appréciée; mais il eſt aiſé d'appercevoir en quoi elle differe. La ſéquence que nous combinons ici eſt fixée à cette derniere place, par conſéquent elle ne ſe tranſpoſe pas; il y a donc une choſe de moins à tranſpoſer, ce qui retranche le plus grand facteur du numérateur de T: par la même raiſon il faut retrancher du dénominateur, le facteur M qui eſt le multiple de cette ſéquence; ainſi la tranſpoſition, en laiſſant ſubſiſter l'ancienne valeur de T, doit être $\frac{TM}{F}$, & l'addition à faire ſera

$$\frac{T\times PM}{F}\cdot\frac{(R-1)\,(R)\,(R+1)\ldots\ldots(R+F-3)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots(F-1)},$$

ce qui joint réellement, & mis ſous un même dénominateur, donne la formule générale,

$$(T \times \frac{(R+PM+2F-2)(R-1)(R)(R+1)(\ldots)(R+F-3)}{1. \quad 2. \quad 3 \ldots\ldots F},$$

& ſubſtituant à T, R, & F, leurs expreſſions plus préciſes que nous avons déterminées (§. 10. 12. 16) cette formule devient

$$\frac{(t-(P+1)M+1)(t-(P+1)M+2)(\ldots)(t-PM)}{(1. \quad 2 \ldots M)} \times$$
$$\frac{(n)(N+PM-1)(N+PM)(\ldots)(n-t-1)}{1. \quad 2. \quad 3 \ldots\ldots (t-PM)}.$$

Ou, ſi nous voulons confondre les tranſpoſitions avec les combinaiſons, elle ſera dans cette forme plus conciſe,

$$\frac{n\,(N+PM-1)\,(N+PM)\,(\ldots)\,(n-t-1)}{(1. \ldots (t-(P+1)M)\,(1. \ldots M)}.$$

§. 20. Reſte à montrer l'application de ces formules à des cas particuliers.

Que le nombre total des numeros de la lotterie ſoit toujours n, & qu'à chaque tirage on en tire 7, on demande combien il y aura de cas poſſibles pour chaque eſpece de ſéquences, priſes dans le ſens de Mr. Euler.

La formule générale pour ces ſéquences (§. 16) devient, en ſubſtituant 7 à t, & $n-12$ à N,

$$\frac{(8-(P+1)M)\,(9-(P+1)M)\,(\ldots)\,(7-PM)}{(1. \quad 2 \ldots M)} \times$$
$$\frac{(n-12+PM)\,(n-11+PM)\,(\ldots)\,(n-6)}{1. \quad 2. \quad \ldots \quad (7-PM)}.$$

I. Pour

I. Pour les ſéquences homogènes *ſimples* on a $M = 1$.

a, pour les VII^{naires} $P = S - 1 = 6$, ce qui donne $\frac{1}{1} \times \frac{n-6}{1}$,

b, pour les VI^{naires} $P = 5$, ce qui donne $\frac{2}{1} \times \frac{(n-7)(n-6)}{1.\ 2}$,

c, pour les V^{naires} $P = 4$, ce qui donne $\frac{3}{1} \times \frac{(n-8)(n-7)(n-6)}{1.\ 2.\ 3}$,

d, pour les IV^{naires} $P = 3$, ce qui donne $\frac{4}{1} \times \frac{(n-9)(n-8)(n-7)(n-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$,

e, pour les III^{naires} $P = 2$, ce qui donne

$$\frac{5}{1} \times \frac{(n-10)\ (n-9)\ (n-8)\ (n-7)\ (n-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5},$$

f, pour les II^{naires} $P = 1$, ce qui donne

$$\frac{6}{1} \times \frac{(n-11)\ (n-10)\ (n-9)\ (n-8)\ (n-7)\ (n-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}.$$

II. Pour les *ſéquences homogènes multiples*

a, pour les *doubles*, on a $M = 2$,

Les ternaires doubles; $P = 2$, ce qui donne

$$\frac{2.\ 3}{1.\ 2} \times \frac{(n-8)\ (n-7)\ (n-6)}{1.\ 2.\ 3}.$$

Les II^{naires} doubles; $P = 1$, ce qui donne

$$\frac{4.5}{1.2} \times \frac{(n-10)(n-9)\ (n-8)(n-7)(n-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}.$$

b. pour les *triples*, on a $M = 3$.

Les II^{naires} triples, $P = 1$, ce qui donne

$$\frac{2.3.4}{1.2.3} \times \frac{(n-9)\ (n-8)\ (n-7)\ (n-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4},$$

III. Pour les *ſéquences mixtes ſimples*, on a M = 1.

a, pour les $V^n + II^n$, on a $\left.\begin{matrix} P = 4 + 1 = 5 \\ (P+1) = 5 + 2 = 7 \end{matrix}\right\}$ ce qui donne, $\frac{1.2}{1} \quad \frac{(n-7)(n-6)}{1.\quad 2}$.

b, pour les $IV^n + III^n$, on a $\left.\begin{matrix} P = 3 + 2 = 5 \\ (P+1) = 4 + 3 = 7 \end{matrix}\right\}$ ce qui donne, $\frac{1.2}{1.} \quad \frac{(n-7)(n-6)}{1.\quad 2}$,

c, pour les $IV^n + II$, on a $\left.\begin{matrix} P = 3 + 1 = 4 \\ (P+1) = 4 + 2 = 6 \end{matrix}\right\}$ ce qui donne $\frac{2.3}{1} \quad \frac{(n-8)(n-7)(n-6)}{1.\quad 2.\quad 3}$.

d, pour les ſéquences de III + II, on a $\left.\begin{matrix} P = 2 + 1 = 3 \\ (P+1) = 3 + 2 = 5 \end{matrix}\right\}$

ce qui donne $\frac{3.4}{1} \quad \frac{(n-9)(n-8)(n-7)(n-6)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$.

IV. Pour les *ſéquences mixtes multiples*.

a, les doubles, on aura M = 2; M = 1.

pour les ſéquences III + II + II, on a P = 2, P = 1,

$PM = 2\times1 + 1\times2 = 4$
$(P+1)M = 3\times1 + 2\times2 = 7$, ce qui donne $\frac{1.2.3}{1.1.2} \times \frac{(n-8)(n-7)(n-6)}{1.\quad 2.\quad 3}$.

§. 21. Puisque le développement de la formule pour les ſéquences circulaires ſeroit parfaitement ſemblable, il ſeroit bien ſuperflu d'en montrer ici l'application. Mais ce qui mérite d'être obſervé, &

& qui fournit un paradoxe aſſez ſingulier c'eſt que le développement de ces formules montre qu'on peut entierement s'en paſſer & qu'en obſervant un certain ordre on peut écrire tout de ſuite les nombres des tranſpoſitions, & des combinaiſons de chaque eſpece de ſéquence, graces à l'harmonie exacte qui régne entr'elles.

C'eſt-ce que je vai montrer en cherchant les ſéquences dans le ſens de M. Bernoulli pour un tirage de 7 numeros.

I. *Les ſéquences ſimples.*

a, ſéquences de VII . . . . $\frac{1}{1} \times \frac{n}{1}$,

b, ſéquences de VI . . . . $\frac{2}{1} \times \frac{n(n-8)}{1.\ 2}$,

c, donc ſéquences de V . . . $\frac{3}{1} \times \frac{n(n-9)(n-8)}{1.\ 2.\ 3}$,

d, donc ſéquences de IV . . . $\frac{4}{1} \times \frac{n(n-10)(n-9)(n-8)}{1.\ 2.\ 3\ 4}$,

e, donc ſéquences de III . . . $\frac{5}{1} \times \frac{n(n-11)(n-10)(n-9)(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$,

f, donc ſéquences de II . . . $\frac{6}{1} \times \frac{n(n-12)(n-11)(n-10)(n-9)(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$.

Or toutes les combinaiſons des ſéquences mixtes ſont contenues dans les limites des combinaiſons des ſéquences ſimples, & n'iront ni juſqu'à la plus grande ni juſqu'au binaire; elles ſeront préciſément égales à la combinaiſon de la ſéquence ſimple qui a le même nombre de faiſceaux à combiner.

Ainſi la ſéquence ſimple de 5 nombres, & les ſéquences mixtes, ou multiples de $4 + 2$, de $3 + 3$, de $3 + 2 + 2$, auront préciſément la même combinaiſon. Les combinaiſons des ſéquen-

ces $5 + 2$; $4 + 3$, ſont les mêmes que celle de la ſéquence ſimple 6, &c.

Les tranſpoſitions des ſéquences mixtes multiples ſont celle de la ſéquence ſimple correſpondante multipliée par celles des ſupérieures autant qu'il y a de ſéquences mixtes, ou multiples, & divilée par le produit des nombres de cette multiplicité.

Donc

II On a les *ſéquences homogènes multiples.*

a, ſéquences de III + III . . . $\frac{2.3}{1.2} \cdot \frac{(n)(n-9)(n-8)}{1.\ 2.\ 3}$,

b, ſéquences de II + II . . . . $\frac{4.5}{1.2} \cdot \frac{n(n-11)(n-10)(n-9)(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$,

c, ſéquences de II + II + II . . . $\frac{2.3.4}{1.2.3} \cdot \frac{n(n-10)(n-9)(n-8)}{1.\ 2.\ 2.\ 3}$.

Donc encore on a

III. Les *ſéquences mixtes ſimples.*

a, les ſéquences V + II . . . . . $\frac{1.2}{1} \cdot \frac{(n)(n-8)}{1.\ 2}$,

b, les ſéquences de IV + III . . . $\frac{1.2}{1} \cdot \frac{n(n-8)}{1.\ 2}$,

c, les ſéquences de IV + II . . . $\frac{2.3}{1} \cdot \frac{n(n-9)(n-8)}{1.\ 2.\ 3}$,

d, les ſéquences de III + II . . . $\frac{3.4}{1} \cdot \frac{n(n-10)(n-9)(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$,

Donc

Donc enfin on a

IV. les *ſéquences mixtes multiples.*

$$\text{de III} + \text{II} + \text{II} \ldots \frac{1.2.3}{1.2} \quad \frac{n\,(n-9)\,(n-8)}{1.\quad 2.\quad 3}.$$

§. 22. Cette affinité des ſéquences entr'elles, & la maniere de les déduire les unes des autres ſeroit encore plus ſenſible, ſi nous avions conſervé la fraction qui exprime les tranſpoſitions dans ſa forme originale (§. 14), où le numérateur exprime tous les facteurs depuis 1 juſqu'au nombre total des faiſceaux ou des choſes à combiner, & où le dénominateur contient tous les facteurs depuis 1 juſqu'au nombre des files iſolées, & juſqu'à celui de chaque multiple des ſéquences.

Cherchons, par exemple, de cette maniere toutes les eſpeces de ſéquences dans le ſens de M. Bernoulli, pour un tirage de 5 numeros.

I. Les ſéquences ſimples

$$\text{de V. feront} \quad \frac{1}{1} \times \frac{n}{1},$$

$$\text{de IV} \ldots \frac{1.2}{1.1} \times \frac{n\,(n-6)}{1.\quad 2},$$

$$\text{de III} \ldots \frac{1.2.3}{1.2.1} \times \frac{n\,(n-7)\,(n-6)}{1.\quad 2.\quad 3},$$

$$\text{de II} \ldots \frac{1.2.3.4}{1.2.3.1} \times \frac{n\,(n-8)\,(n-7)\,(n-6)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}.$$

II. Les ſéquences homogènes multiples

$$\text{de II} + \text{II} \ldots \frac{1.2.3}{1.1.2} \quad \frac{n\,(n-7)\,(n-6)}{1.\quad 2.\quad 3}.$$

III.

III. Les ſéquences mixtes

de III + II . . . $\frac{1.\ 2}{1.\ 1}$ $\frac{n\ (n - 6)}{1.\ 2}$,

§. 23. Enfin cette même affinité ſubſiſte encore dans les ſéquences dévéloppées ſur les formules abrégées, (§. 15. 19.) qui ne conſervent que le numérateur des combinaiſons, & le dénominateur des tranſpoſitions. C'eſt-ce que je vai montrer en deduiſant les cas de toutes les ſéquences pour la Lotterie de Genes; dans le ſens de Mr. Bernoulli.

I. *a*, Les plus hautes *ſéquences ſimples* ſont les quinaires donc

il y en a . . . . . $\frac{90}{1}$,

b, Des quaternaires . . . . . $\frac{90.\ 84}{1.\ 1}$,

c, les ternaires . . . . . $\frac{90.\ 83.\ 84}{1.\ 2.\ 1}$,

d, les binaires . . . . . $\frac{90.\ 82.\ 83.\ 84}{1.\ 2.\ 3.\ 1}$.

II. les doubles binaires . . . . . $\frac{90.\ 83.\ 84}{1.\ 2.\ 1}$.

III. Les terno-binaires . . . . . $\frac{90.\ 84}{1.\ 1}$.

Comme le nombre total des combinaiſons d'un tirage de 5 numeros eſt $\frac{90.\ 89.\ 88.\ 87.\ 86}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$,

La

La probabilité des ſéquences quinaires eſt $= \frac{2.\ 3.\ 4.\ 5}{89.\ 88.\ 87.\ 86}$,

des quaternaires $= \frac{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 84}{89.\ 88.\ 87.\ 86}$,

des ternaires ſimples $= \frac{3.\ 4.\ 5.\ 83.\ 84}{89.\ 88.\ 87.\ 86}$,

des binaires ſimples $= \frac{4.\ 5.\ 82.\ 83.\ 84}{89.\ 88.\ 87.\ 86}$,

des doubles binaires $= \frac{3.\ 4.\ 5.\ 83.\ 84}{89.\ 88.\ 87.\ 86}$,

des terno-binaires $= \frac{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 84}{89.\ 88.\ 87.\ 86}$,

Or c'eſt la ſomme des probabilités de ces 6 eſpeces différentes de ſéquences, que M. Bernoulli a calculée ſous le nom de ſéquences binaires. Mais, ſi l'on veut tenir compte, & admettre des miſes ſur toutes les ſéquences inférieures qui réſultent des ſupérieures, comme chaque ſéquence ſupérieure renferme autant d'inférieures, qu'il y a de différence dans leur nombre, & une au delà, que, par exemple, le quinaire contient 2 quaternaires, 3 ternaires, 4 binaires, on aura

Probabilité de ſéquence quinaire $\frac{1.\ 120}{89.\ 88.\ 87.\ 86}$,

de ſéquence quaternaire $\frac{2.120 + 1.120.84}{89.\ 88.\ 87.\ 86}$,

de ſéquence ternaire $\frac{3.120 + 3.120.84 + 1.60.83.84}{89.\ 88.\ 87.\ 86}$,

de ſéquence binaire $\frac{4.120+6.120.84+4.60.83.84+1.20.82.83.84}{89.\ 88.\ 87.\ 86}$.

D'où l'on voit que la ſomme des ſeules ſéquences binaires eſt beaucoup plus grande que la ſomme des ſix eſpeces des ſéquences ſéparées.

§. 24. Pour montrer encore par un ſeul exemple l'ordre frappant qui régne dans les cas de diverſes ſéquences, & la facilité de les déduire toutes d'un même principe, je vai développer le cas d'un tirage de 6 numeros dans le ſens de M. Euler

I. *La ſéquence ſimple*

de 6 n'a qu'une choſe à combiner . . $\frac{n-5}{1}$,

1 ſéquence

de 5, a 2 faiſceaux . . $\frac{(n-6)\ (n-5)}{1.\qquad 1}$,

1 ſéquence, 1 file iſolée.

de 4, a 3 faiſceaux . . $\frac{(n-7)\ (n-6)\ (n-5)}{1.\qquad 1.\qquad 2}$,

une ſéquence, 2 files iſolées.

de 3, a 4 faiſceaux . . $\frac{(n-8)\ (n-7)\ (n-6)\ (n-5)}{1.\qquad 1.\qquad 2.\qquad 3}$,

1 ſéquence, 3 files iſolées.

de 2, a 5 faiſceaux . . $\frac{(n-9)(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)}{1.\qquad 1.\qquad 2.\qquad 3.\qquad 4}$.

1 ſéquence, 4 files iſolées.

II.

II. *Les ſéquences homogènes multiples*

de 2 + 2, a 4 faiſceaux . . . . $\frac{(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)}{1.\quad 2.\quad 1.\quad 2}$,

2 ſéquences, 2 files iſolées.

de 2 + 2 + 2, a 3 faiſceaux . . . $\frac{(n-7)(n-6)(n-5)}{1.\quad 2.\quad 3}$,

3 ſéquences homogènes.

de 3 + 3, a 2 faiſceaux . . . . $\frac{(n-6)(n-5)}{1.\quad 2}$.

2 ſéquences homogènes.

III. *Les ſéquences mixtes*

celle de 3 + 2, a 3 faiſceaux . . . $\frac{(n-7)(n-6)(n-5)}{1.\quad 1.\quad 1}$,

1 ſéquence de 3, 1 ſéquence de 2, 1 file iſolée.

celle de 4 + 2, a 2 faiſceaux . . . $\frac{(n-6)(n-5)}{1.\quad 1}$,

1 ſéquence de 4, 1 ſéquence de 2,

§. 25. Ce ſeroit s'appéſantir ſur ce ſujet, que de montrer tous les rapports qu'on y peut obſerver. J'ai eu beaucoup moins en vue la ſolution du probleme, que d'indiquer une méthode lumineuſe d'y procéder qui conſervât l'ordre dans les réſultats, & qui montrât l'application des principes de la Philoſophie ſpéculative aux queſtions de calcul.

C'eſt par cette conſidération qu'après avoir fait voir comment dans les notions générales on doit démêler les régles qui conviennent aux notions moins générales, & aux individuelles, je vai montrer par la route oppoſée de quelle maniere il faut s'élever de la connoiſſance des déterminations individuelles d'un cas ſingulier, à la connoiſſance des loix générales de toutes les diverſes eſpeces, & de tous les genres ſous leſquels ce cas ſingulier eſt contenu.

Choiſiſſons pour cet effet l'arrangement unique *Auguſte Tibère Caligula, Neron Galba, Vitellius Veſpaſien; Domitien.* Il contient un ternaire, un double binaire, & une file iſolée: cet exemple doit renfermer les loix de toutes les ſéquences ſimples, multiples & mixtes; un plus compliqué ne feroit que rendre la recherche plus difficile ſans néceſſité, puisqu'il ajouteroit des déterminations ſuperflues; un exemple moins chargé limiteroit la recherche à des cas moins généraux, qui ne contiendroient que les ſéquences mixtes, ſans leurs multiples, ou les homogènes ſans les mixtes, ou les ſimples ſans multiples, ni mixtes.

Voyons donc combien de ſéquences ternaires & de doubles binaires ce cas unique peut fournir dans le ſens de M. Euler, & pour éviter la prolixité ſubſtituons les nombres aux médailles, tous les cas poſſibles ſe trouveront ſucceſſivement être les ſuivans.

(1, 2, 3), (5, 6), (8, 9), 11.
(1, 2), (4, 5, 6), (8, 9), 11.
(1, 2), (4, 5), (7, 8, 9), 11.
1, (3, 4, 5), (7, 8); (10, 11).
1; (3, 4), (6, 7, 8); (10, 11).
1; (3, 4); (6, 7); (9, 10, 11).
(1, 2, 3), 5, (7, 8); (10, 11).
(1, 2, 3), (5, 6), 8; (10, 11).
(1, 2), 4, (6, 7, 8), (10, 11).
(1, 2), 4, (6, 7), (9, 10, 11).
(1, 2), (4, 5, 6), 8, (10, 11).
(1, 2), (4, 5), 7, (9, 10, 11).

Le nombre total des numeros eſt ici 11, le nombre des files eſt 8, la derniere file eſt racourcie de 10, ſa longueur eſt réduite à 1, & elle ne

ne fournit auſſi qu'un ſeul rang complet: ſi elle étoit plus longue, il y auroit évidemment plus de rangs dans la même proportion de cette longueur. Ainſi la derniere file étant *l*, au lieu de 1, le nombre des rangs ſeroit *l*, au lieu d'être 1, ſa diminution réſulte de l'élevation des files l'une ſur l'autre; & celle-ci des faiſceaux & des ſéquences; il y a 4 faiſceaux, chacun s'éleve ſur l'autre de 2 numeros ſur ſon précédent, le premier faiſceau n'a point de précédent, ainſi il n'en faut compter que 3, ce qui fait un racourciſſement de 6: s'il y avoit 4 faiſceaux, le racourciſſement ſeroit par conſéquent de 8, & en général, s'il y avoit F faiſceaux, ils produiroient un racourciſſement de 2 (F — 1). Ici les deux binaires, & le ternaire ſont un racourciſſement de 3; la raiſon eſt en eſt que les files dans les ſéquences ne s'élevent que d'un numero, chacune ſur ſa précédente, la premiere file d'une ſéquence n'a point de précédente, ainſi il y a pour chaque ſéquence autant de nombres à racourcir que la ſéquence contient de files moins une. Si donc il y avoit *m binaires*, cela feroit un racourciſſement de *m* nombres; s'il y avoit *m* ternaires, ils produiroient un racourciſſement de 2*m* nombres; enfin ſi la ſéquence étoit S, le racourciſſement qu'elle produiroit ſeroit S — 1; & s'il y avoit *m* pareilles ſéquences elles racourciroient par conſéquent la derniere file de *m* fois S — 1 nombres: or on peut concevoir des ſéquences depuis la plus grande S, juſqu'au binaire 2, & chacune d'elle peut être multiple; ainſi le racourciſſement de la derniere file peut être = 2 (F — 1) + *m* (S — 1) + *m* (S — 2) + . . . *m*, & nommant pour abréger la progreſſion deſcendante (S — 1) + (S — 2) + . . . + 1 = P, & le nombre total des numeros *n*, au lieu de 11, on aura *l* = *n* — 2 (F — 1) — *m*P.

Il y dans notre cas 8 files, & cependant elles ne forment que 4 choſes, ou faiſceaux à combiner. C'eſt que chaque ſéquence n'eſt qu'un ſeul tout, & qu'elle abſorbe deux ou pluſieurs files. Chaque binaire en prend 2, & ne fait qu'un faiſceau; le ternaire en prend 3, & n'eſt compté que pour *un*: par la même raiſon une ſéquence quelconque de S nombres, occupera S files, & ne donnera qu'un

faiſceau; & m S ſéquences abſorberont mS files, pour fournir m faiſceaux. Donc, puisqu'il peut y avoir toute la progreſſion deſcendante de ſéquences, depuis la plus nombreuſe S, juſqu'à la binaire 2, & que chacune peut être répétée m fois, le nombre des faiſceaux ſera égal au nombre total des files, moins m fois cette progreſſion, plus m: ainſi ſi le nombre des files eſt t, celui des faiſceaux F, ſera

$$= t - (P + 1)\, m + m = t - P m,$$

donc le nombre des rangs à combiner l ſera

$$= n - 2t + 2 + P m,$$

Les quatre faiſceaux de notre cas donnent 12 tranſpoſitions, la file iſolée occupe 3 fois la gauche, 3 ſois la droite, 3 ſois elle ſépare la premiere ſéquence des deux dernieres, & 3 ſois elle ſépare la derniere des deux premieres. Quatre choſes ſe tranſpoſent regulierement en 24 façons, la file iſolée devroit occuper 6 ſois chaque poſition; pourquoi ne l'occupe-t-elle que 3 fois? C'eſt qu'il y a deux choſes ſemblables, deux binaires dont les tranſpoſitions avec les deux autres diſſemblables donnent toujours par conſéquent deux fois le même réſultat; s'il y avoit 3 choſes ſemblables, on pourroit les tranſpoſer entr'elles de 1. 2. 3 façons, & par conſéquent elles donneroient 6 fois le même réſultat. Donc, puisque le nombre des tranſpoſitions eſt ici, $\frac{1.2.3.4}{1 \times 2}$, s'il y avoit F faiſceaux, tous différens entr'eux à l'exception de deux, le nombre des tranſpoſitions ſeroit $\frac{1.2.3 \ldots F}{1 \times 2}$, & s'il y a m faiſceaux ſemblables au lieu de 2, les tranſpoſitions ſeront $\frac{1.2.3 \ldots F}{1.2 \ldots m}$, ou mettant au lieu de F, ſa valeur trouvée, les tranſpoſitions ſeront $\frac{1.2.3 \ldots (t - P m)}{1.2 \ldots m}$.

Je

Je puis m'arrêter ici. Parvenus à l'expreſſion générale des tranſpoſitions, des rangs & des faiſceaux à combiner, il ne reſte plus rien à chercher: nous ſommes arrivés du cas ſingulier à la connoiſſance de la loi générale de toutes les ſéquences poſſibles; qui ſera

$$\frac{1.2.3\ldots(t-\mathrm{P}m)}{1.2\ldots m}\ \frac{(n-2t+2+\mathrm{P}m)(n-2t+2+\mathrm{P}m+1)(\ldots)(n-t+1)}{1.\qquad 2\ldots\ldots(t-\mathrm{P}m)},$$

ſi les ſéquences finiſſent au plus grand nombre, &

$$\frac{1.2.3\ldots(t-\mathrm{P}m)}{1.2\ldots m}\ \frac{(n)(n-2t+1+\mathrm{P}m)(n-2t+1+\mathrm{P}m+1)(\ldots)(n-t-1)}{1.\quad 2.\qquad 3\ldots\ldots(t-\mathrm{P}m)},$$

ſi le plus grand nombre eſt cenſé faire ſéquence avec le plus petit.

Cependant on peut encore aller plus loin. Le cas individuel que j'ai pris pour exemple, ayant quatre faiſceaux à combiner & un ſeul rang, cette combinaiſon s'exprimeroit comme on fait par la fraction $\frac{1\times2\times3\times4}{1\times2\times3\times4}$, ſes tranſpoſitions ſont comme nous venons de le voir $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{1.\ 2.\ 1.}$, ainſi le nombre de ſéquences de III + II + II ſera $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{1.\ 2.\ 1}\times\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$, où je remarque que le numérateur des tranſpoſitions eſt préciſément égal au dénominateur des combinaiſons, & qu'ils s'entredétruiſent. Mais, quelle eſt la raiſon ſuffiſante de cette égalité? Il faut la chercher dans l'origine même de ce numérateur & de ce dénominateur. Lorſque dans la combinaiſon on regarde non ſeulement au nombre des choſes combinables, mais auſſi à leur ſituation, la combinaiſon ſera toujours un nombre entier; elle ne devient fraction que dans les cas où l'on ne veut pas avoir les diverſes ſituations des choſes à combiner. Or les tranſpoſitions expriment préciſément ces diverſes ſituations des choſes combinables: ainſi pour les exclure l'on diviſe le nombre total des combinaiſons par le nombre total des tranſpoſitions; nombre qui devient

par

par conſéquent le dénominateur de la fraction. Il n'eſt donc pas étonnant que le numérateur des tranſpoſitions ſoit égal ici au dénominateur des combinaiſons, & puiſque la même raiſon aura lieu toutes les fois qu'on cherchera le nombre total des cas d'une eſpece de ſéquence quelconque, il eſt évident que ce nombre peut toujours être exprimé par celui des combinaiſons totales, diviſé ſimplement s'il en eſt beſoin par le nombre des cas identiques, c. à d. de ceux qui réſultent de la combinaiſon des faiſceaux ou des choſes ſemblables.

Ainſi le nombre des choſes à combiner étant $t - Pm$, & celui des rangs, $n - 2t + 2 + Pm$, on aura les cas de chaque ſéquence quelconque dans le ſens de M. Euler

$$\frac{(n-2t+Pm+2)(n-2t+Pm+3)(\ldots)(n-t+1)}{(1.\ 2\ldots m)\ (\ldots)\ (1.\ 2\ldots m)},$$

& dans le ſens de M. Bernoulli, où cette même ſéquence quelconque eſt toujours répétée autant de fois qu'il y a de numeros en tout, le nombre des cas ſera

$$\frac{n(n-2t+Pm+1)(n-2t+Pm+2)(\ldots)(n-t-1)}{(1.\ 2\ldots m)\ (\ldots)\ (1.\ 2\ldots m)}.$$

En ſorte que dans l'une & l'autre formule le nombre des facteurs du numérateur ſoit égal au nombre des choſes à combiner, & le nombre des facteurs du dénominateur, à celui des multiples des faiſceaux ſemblables.

Ce qu'il y a de ſingulier dans notre exemple, c'eſt que dans le ſens de M. Bernoulli, il ne contient aucun cas de la ſéquence mixte que nous avons choiſie; puiſque nous n'avons ſuppoſé qu'un ſeul rang; & qu'ainſi le nombre des cas ſeroit

$$\frac{11\times(11-11)(11-10)(11-9)}{1.\quad 2.\quad 1.\quad 2} = 0.$$

Ce qui n'empêche pas que cet exemple ne fourniſſe auſſi la loi générale pour les ſéquences circulaires.

MÉMOI-

MÉMOIRE,
SUR LES VIBRATIONS DES CORDES D'UNE ÉPAISSEUR INÉGALE.

PAR M. DANIEL BERNOULLI.

§. 1.

Après tous les Mémoires que M. M. Euler, de la Grange, d'Alembert & moi avons publiés ſur les vibrations des cordes, on ſera porté à croire cette matiere entierement épuiſée, & peut être ſurpris de voir paroitre encore ce nouveau Mémoire ſur lesdites vibrations. En effet, s'il n'étoit queſtion que des cordes uniformément épaiſſes, il ſeroit bien difficile d'ajouter rien de nouveau à ce qu'on en a déjà dit; mais il s'agit dans ce Mémoire de cordes inégalement épaiſſes, & ce ſujet, bien loin d'être épuiſé, eſt entierement neuf, du moins dans le tems où j'écris ce Mémoire *), quoique ſuivant toutes les apparences médité par tous ceux qui ont épluché la théorie des cordes uniformes, puisqu'il n'eſt pas poſſible de penſer aux unes ſans penſer auſſitôt aux autres. La grande queſtion eſt de déterminer les vibrations d'une corde tendue, dont les différentes épaiſſeurs ſont données par une loi quelconque; queſtion que je ne ſache

*) J'ignorois lorsque j'écrivois ceci que Mrs. Euler & de la Grange euſſent traité cette matiere, le premier dans le Tome IX des nouveaux Commentaires de Pétersbourg, & le ſecond dans le Tome II des Mélanges de la Société Royale de Turin.

Je ferai remarquer auſſi au ſujet du ſecond Mémoire de Mr. Euler inſéré dans le Tome III des Mélanges de Turin, qu'il doit avoir fait ce Mémoire dans le même tems que je travaillois au mien, à ſavoir, au commencement de 1765. C'eſt ce que confirment les dates des lettres qui accompagnoient nos Mémoires.

ſache pas avoir été généralement réſolue, & dont la ſolution n'eût pas manqué de répandre de nouvelles lumieres ſur ce que cette matiere renferme encore de caché ou d'équivoque ; c'eſt principalement dans cette vue, que je me ſuis appliqué à trouver du moins la ſolution pour une infinité de cas particuliers.

§. 2. Le parallele que je me propoſe de faire entre les vibrations des cordes uniformes & celles d'une épaiſſeur inégale, m'engage à indiquer ici les propriétés principales qu'on a démontrées ſur les premieres.

Soit la longueur de la corde uniforme $= l$, ſon poids $= p$; le poids ou la force qui tend la corde $= P$; qu'on entende par α, ϵ, γ, δ &c. des quantités conſtantes quelconques, par f un nombre entier quelconque, par π la demi-circonférence du cercle, qui a l'unité pour rayon. Si là deſſus on cherche, conformément aux loix de méchanique, la courbe ſous laquelle la corde fait ſes vibrations ſimples & régulieres, de maniere que tous les points obſervent un ſynchronisme parfait, on trouve en appellant x l'abſciſſe depuis le commencement de la corde vers l'autre bout, & y ſon appliquée, cette équation à la courbe $y = \alpha \text{ ſin. } \frac{fx}{l} \pi$.

Si après cela on appelle n la longueur du pendule ſimple iſochrone avec les vibrations de la corde, on trouve

$$n = \frac{p}{ff\pi\pi P} l$$

Si on prend ſucceſſivement pour f les nombres naturels 1, 2, 3 &c. les valeurs répondantes de y ſont α ſin. $\frac{x}{l} \pi$; ϵ ſin. $\frac{2x}{l} \pi$; γ ſin. $\frac{3x}{l} \pi$ &c. & celles de n diminuent en raiſon quarrée réciproque

proque des nombres f; par conſéquent la durée de chaque vibration diminue en raiſon réciproque ſimple du nombre f.

On appelle vibration du premier, du ſecond, du troiſieme ordre, lorſqu'on fait $f = 1$; ou $f = 2$; ou $f = 3$ &c. & alors la courbe forme une ſeule branche, ou deux ou trois branches &c. Les branches, quel qu'en ſoit le nombre, ſont parfaitement égales entre elles; les noeuds ou les points d'interſection de la courbe avec ſon axe ſont à diſtances égales; de là les ſons harmoniques qu'on tire des cordes, & qui vont en progreſſion des nombres naturels.

J'ai démontré de plus dans les Mémoires de Berlin, que les vibrations de différens ordres, quels qu'on les prenne, peuvent coéxiſter dans une ſeule & même corde, ſans ſe troubler en aucune façon, ces différentes eſpeces de vibration coéxiſtentes étant abſolument indépendantes les unes des autres. De là cette pluralité de ſons harmoniques qu'on entend à la fois d'une ſeule & même corde. Si toutes eſpeces de vibration commencent au même inſtant; il arrivera que la premiere vibration du premier ordre, la ſeconde vibration du ſecond ordre, la troiſieme vibration du troiſieme ordre &c. finiront au même inſtant. C'eſt là un ſynchronisme apparent dans un certain ſens, & qui n'eſt rien moins que général, puiſqu'il y a une infinité d'autres vibrations qui ne finiſſent pas au même inſtant.

Lorſque la corde fait à la fois pluſieurs eſpeces de vibration, quel qu'en ſoit le nombre, & de quelque ordre qu'elles ſoyent, la courbure abſolue ſera toujours exprimée par cette équation générale,

$$y = \alpha \text{ ſin. } \frac{x}{l}\pi + \beta \text{ ſin. } \frac{2x}{l}\pi + \gamma \text{ ſin. } \frac{3x}{l}\pi + \text{ &c.}$$

& comme le nombre des coëfficiens arbitraires eſt infini, on peut faire paſſer la courbe par tant de points donnés de poſition qu'on voudra, ce qui marque que toutes les courbes ſe trouvent dans le cas, pourvu qu'on ne faſſe pas violence aux hypotheſes; & ce ſeroit

leur faire violence, ſi on ne faiſoit pas les quantités y, dy & ddy comme infiniment plus petites dans tous les points de la courbe, que les quantités x, dx & $\frac{dx^2}{l}$.

Si la courbe initielle eſt exprimée par la ſusdite équation, on aura au moment que la vibration fondamentale finit pour équation de la courbe.

$$y = -\alpha \text{ ſin. } \frac{x}{l}\pi + \epsilon \text{ ſin. } \frac{2x}{l}\pi - \gamma \text{ ſin. } \frac{3x}{l}\pi + \text{&c.}$$

& cette courbe eſt entierement la même que la courbe primitive dans une ſituation renverſée.

§. 3. Voilà les propriétés principales ſur la vibration des cordes uniformément épaiſſes. Examinons à préſent les cordes inégalement épaiſſes, & conſidérons d'abord la queſtion dans toute ſon étendue; ſoit donc A B C une corde tendue quelconque; ſon épaiſſeur en A $= e$; en B $= \sigma$; A B $= x$; B $d = y$; en ſuppoſant A D C la courbure de la corde: exprimons le poids de la corde par ſon volume, ſuppoſons que le poids qui tend la corde ſoit égal au poids d'une corde dont l'épaiſſeur uniforme eſt égale à e & dont la longueur $=$ L, c'eſt à dire que le poids qui tend la corde ſoit e L; qu'on conſidére trois élémens de ſuite en ſuppoſant dx conſtant, on ſait par la méchanique, que la force qui agit ſur l'élément en D dans la direction D B eſt $= -\frac{ddy}{dx} . e$L, & qu'on aura la force accélératrice en diviſant cette quantité élémentaire par le petit poids de l'élément, c'eſt à dire par σdx; ainſi la force accélératrice pour chaque élément ſera exprimée par $-\frac{ddx}{\sigma dx^2} . e$ L, ſi on fait cette force accélératrice proportionelle à la diſtance du petit poids depuis l'axe, où ſe trouve le centre de force: on ſait qu'on ſatis-

Planche IV. Fig. 3.

ſatisfait par là également à l'iſochronisme pour les excurſions plus ou moins grandes & au ſynchronisme pour tous les points de la corde ; donc les conditions du Problême demandent que $-\frac{ddy}{\sigma dx^2} eL = \frac{y}{n}$ ou $-ddy = \frac{\sigma y dx^2}{enL}$ en entendant par n une petite ligne conſtante qui marquera préciſément la longueur d'un pendule ſimple iſochrone avec les vibrations de la corde.

Jusqu'ici cette ſolution ne différe pas de celle qui eſt connue pour les cordes uniformément épaiſſes, qui font $\sigma = e$ & $-ddy = \frac{ydx^2}{nL}$; c'eſt pourquoi je me ſuis contenté de l'indiquer ſans entrer dans le détail ; ce n'eſt donc pas la méchanique qui nous laiſſe en défaut pour la ſolution générale ; c'eſt l'analyſe qui nous arrête ; il s'agit d'intégrer ladite équation différentielle du ſecond ordre, quelle que ſoit la rélation entre σ & x : & c'eſt ce qu'on n'a pas ſçû encore faire. Je me ſuis donc appliqué à trouver une méthode pour déterminer une infinité de ces rélations qui permettent d'intégrer notre équation primitive différentielle du ſecond ordre, & de nous mettre par là en état de répondre poſitivement à toutes les queſtions qu'on peut faire ſur cette matiere.

§. 4. Voici un nouveau *Lemme* qui nous ſervira de guide : Soit q une quantité variable quelconque exprimée par la variable x & des conſtantes, ou une fonction de x ; qu'on entende par a une certaine quantité conſtante, je dis qu'on peut intégrer généralement cette équation différentielle du ſecond ordre

$$-ddy = y\left(\frac{dx^2}{aaq^2} - \frac{ddq}{q}\right)$$

& que ſa double intégration donne $y = aq \text{ ſin. } \int \frac{dx}{aqq}$.

Car la double différentiation de cette derniere équation donne $-ddy = \left(\frac{dx^2}{aaq^3} - ddq\right) \alpha \text{ fin } . \int \frac{dx}{aqq}$: or $\alpha \text{ fin } . \int \frac{dx}{aqq} = \frac{y}{q}$ & ſubſtituant cette valeur, on tombe ſur l'équation propoſée $-ddy = y\left(\frac{dx^2}{aaq^4} - \frac{ddq}{q}\right)$.

§. 5. Le Lemme que nous venons d'expoſer nous conduit d'abord à la ſolution de notre probleme principal : il n'y a pour cet effet qu'à identifier l'équation intégrale du Lemme avec l'équation du §. 3. Ces deux équations étant

$$-ddy = y\left(\frac{dx^2}{aaq^4} - \frac{ddq}{q}\right) \text{ & } -ddy = \frac{\sigma y dx^2}{en\,L},$$

nous en tirerons $\frac{dx^2}{aaq^4} - \frac{ddq}{q} = \frac{\sigma dx^2}{en\,L}$, ou bien $\frac{\sigma}{e} = \frac{n\,L}{aaq^4} - \frac{n\,L\,ddq}{qdx^2}$. Voilà donc une équation infiniment féconde, dont chaque cas particulier fournit une nouvelle ſolution, puiſqu'on peut prendre pour q une fonction arbitraire de x, & que chaque nouvelle valeur de q donne une nouvelle loi pour les épaiſſeurs de la corde, telle que nous la demandons. Quant à la courbure qu'une telle corde doit prendre pour faire des vibrations ſimples & régulieres, elle ſera toujours exprimée par l'équation intégrée du dit Lemme, puiſque l'équation différentielle dont elle eſt l'intégrale a été identifiée avec l'équation générale $-ddy = \frac{\sigma y dx^2}{en\,L}$ du §. 3. Cette courbure ſera déterminée par l'équation

$$y = \alpha q \text{ fin } . \int \frac{dx}{aqq} .$$

§. 6.

§. 6. Quant à la conſtante a qui ſe trouve dans les équations du précédent article, il faut s'en ſervir pour ſatisfaire à la condition du probleme, qui demande qu'au point C l'appliquée ſoit nulle, c'eſt à dire, que $y = 0$ lorsque $x = l$. Cette conſidération demande que dans l'équation à la courbe $y = \alpha q \sin . \int \frac{dx}{aqq}$ le facteur $\sin . \int \frac{dx}{aqq}$ ſoit nul, lorsque $x = l$; mais les ſinus deviennent nuls toutes les fois que leurs arcs ſont égaux ou au demi-cercle ou à un multiple quelconque du demi-cercle. Soit donc π le demi-cercle qui a l'unité pour rayon, & qu'on entende par f un nombre entier quelconque; il faudra faire $\int \frac{dx}{aqq} = f\pi$ après avoir ſubſtitué l à la place de x; on aura de cette maniere la conſtante $a = S\frac{dx}{qq} : f\pi$, en entendant par le ſigne S la valeur de l'intégrale totale pour le cas $x = l$. Nous aurons donc pour équation finale à la courbe $y = \alpha q \sin . \frac{\int \frac{dx}{qq} f\pi}{S\frac{dx}{qq}}$, & on obſervera encore que la quantité $\int \frac{dx}{qq}$ demande une telle conſtante que y devienne $= 0$ lorsque $x = 0$, & par conſéquent $\int \frac{dx}{qq} = 0$ pour $x = 0$. Cette même valeur de a doit pareillement être ſubſtituée dans l'équation du précédent article, qui détermine la loi des épaiſſeurs de la corde, ce qui donne

$$\frac{\sigma}{e} = \frac{n L \int f \pi \pi}{\left(S\frac{dx}{qq}\right)^2 q^4} - \frac{n L d d q}{q d x^2}.$$

§. 7.

§. 7. Il nous reſte à déterminer la longueur du pendule ſimple iſochrone avec les vibrations des cordes pour leſquelles nous venons d'indiquer la loi des épaiſſeurs. Pour cet effet il n'y a qu'a appliquer notre derniere équation, vraye pour tous les points de la corde, à un point donné de poſition, & examiner ce que deviennent toutes les quantités variables pour ce point. Choiſiſſons le point A auquel la courbe commence, & nous aurons pour ce point $x = o$ & $\frac{\sigma}{e} = 1$: mais il faudra ſe donner la peine de calculer les valeurs de $S\frac{dx}{qq}$ expliquées au §. 6. de q^4, & de $\frac{ddq}{qdx^2}$, en rapportant ces dernieres quantités au point A. Dans ce ſens je nommerai A la quantité $\frac{1}{\left(S\frac{dx}{qq}\right)^2 q^4}$ & B la quantité $\frac{ddq}{qdx^2}$: toutes ces ſubſtitutions nous donneront $1 = nLffff\pi\pi A - nLB$ & de là on tire la valeur cherchée $n = \frac{1}{Lffff\pi\pi A - LB}$.

Quant à la lettre f qui ſignifie un nombre entier quelconque, on remarquera que ce nombre marque en même tems l'ordre auquel les vibrations appartiennent; ſi donc, par exemple, on ſuppoſe $f = 3$, on aura les vibrations du troiſieme ordre, qui partagent la corde en trois parties, & forment deux noeuds ou points d'interſection avec l'axe; chaque partie formera ſes vibrations, toutes ſynchrones & iſochrones entre elles. Voilà tout ce que je m'étois propoſé d'examiner & de déterminer: l'application que j'en ferai, ſervira à répandre quelques nouvelles lumieres ſur les vibrations des cordes tendues.

§. 8. Nous voyons d'abord par la valeur de n, que nous venons de déterminer, que le pendule ſimple iſochrone, tout le reſte égal, eſt réciproquement proportionel à la longueur L, c'eſt à dire, au poids qui tend la corde; il eſt auſſi directement proportionel

au

au poids de la corde, parce que ce poids devenant plus grand ou plus petit, tandis que le poids, qui rend la corde reſte le même, la longueur L ſuit la proportion réciproque du poids de la corde, en vertu de la ſignification de la lettre L donnée au §. 3. Il étoit facile de prévoir cette propriété : il nous eſt plus important d'examiner l'uſage, qu'on peut faire du nombre entier arbitraire f, tant pour l'équation à la courbe que pour la détermination de l'épaiſſeur variable de la corde & le pendule ſimple iſochrone avec ſes vibrations.

§. 9. Remarquons que, quelle que ſoit la loi des épaiſſeurs d'une corde AC, il eſt naturel de dire, que cette même corde peut être ébranlée & former des vibrations de tous les ordres, toujours ſimples & régulieres. Les quatre premieres figures nous repréſentent les quatre ordres les plus ſimples ; mais notre méthode ne s'étend pas à développer cette vérité dans toute ſon étendue. Voici ce que cette méthode nous enſeigne : c'eſt de trouver entre deux points donnés de poſition A & C, une infinité de cordes non-uniformément épaiſſes, qui faſſent des vibrations régulieres & déterminables en tout : l'équation finale du §. 6. nous donne la loi pour toute cette infinité de cordes. Si dans cette équation nous ſubſtituons pour f ſucceſſivement 1, 2, 3, 4 &c. elle nous fournira la loi pour les cordes deſtinées à faire des vibrations du premier, du ſecond, du troiſieme, du quatrieme, &c. ordre, mais, généralement parlant, les cordes ne ſont pas les mêmes pour les différens ordres de vibration, quoique leur expreſſion ne differe que dans le coëfficient de l'un de ſes termes. C'eſt-ce qui nous empêche de déterminer les vibrations de différens ordres dans une ſeule & même corde. Il faudroit pour identifier les cordes, à chaque nouvel ordre trouver une nouvelle fonction pour q propre à cette identité, ſi cela étoit toujours poſſible ou faiſable. Cependant, comme il nous eſt permis de choiſir un ordre quelconque, notre théorie nous met déjà en état de déterminer la poſition des noeuds tels que M, N & O, dans la quatrieme figure, de même que les plus grandes excurſions aux points m, n, o & p, & la poſition de ces points; & tout cela pour une infinité de cordes, ſuivant la fonction

qu'on aura ſubſtituée pour q. Ces déterminations rélatives aux loix des épaiſſeurs de la corde ſerviront à mettre dans un nouveau jour les vibrations régulieres qui ſe forment ſur un certain nombre de ſes parties. Mais ce n'eſt pas là préciſément ce que je me ſuis propoſé dans ces recherches, puiſque nous ne voyons encore pour chaque corde qu'une ſeule eſpece de vibration réguliere & iſochrone. J'examinerai donc ce qu'on peut faire pour trouver des cordes non-uniformément épaiſſes, dans leſquelles on puiſſe déterminer toutes les eſpeces de vibration poſſibles.

§. 10. Comme q eſt une fonction arbitraire de x & de conſtantes, nous ſuppoſerons d'abord $q = 1$: Ce cas nous donne $\int \frac{dx}{qq} = x$: enſuite $S\frac{dx}{qq} = l$; $ddq = 0$; de là on tire (§. 6.) $y = \alpha \text{ ſin } \frac{x}{l} f\pi$, & puis $\frac{\sigma}{e} = \frac{nL ff\pi\pi}{ll}$; de là encore (§. 7) $A = \frac{1}{ll}$, & $B = 0$, ce qui donne $n = \frac{ll}{ff\pi\pi L}$. Ces déterminations nous donnent toute la théorie des cordes uniformément épaiſſes, telle que nous l'avons indiquée au §. 2. où $\frac{p}{P}$ eſt la même choſe que $\frac{l}{L}$. Je n'ai expoſé ce cas que pour faire voir qu'il eſt contenu dans notre théorie. Voici à préſent une nouvelle claſſe de cordes infiniment plus générale, & qui a toutes les mêmes prérogatives.

§. 11. Qu'on ſuppoſe $q = \frac{b + x}{b}$, où b marque une quantité conſtante quelconque. Cette fonction fait $\int \frac{dx}{qq} = \int \frac{bbdx}{(b+x)^2} = b - \frac{bb}{b+x} = \frac{bx}{b+x}$, & par conſéquent

quent $S\frac{dx}{qq} = \frac{bl}{b+l}$; enſuite nous aurons encore $ddq = 0$,

& $A = \frac{(b+l)^2}{bbll} \times \frac{b^4}{(b+x)^4} = \frac{(b+l)^2}{ll} \times \frac{bb}{(b+x)^4}$;

& enfin $B = 0$ ſubſtituant ces valeurs aux §§. 6 & 7. nous aurons

$$y = \alpha . \frac{b+x}{b} \text{ ſin } \frac{x}{l} . \frac{b+l}{b+x} . f\pi$$

$$\frac{\sigma}{e} = \frac{nL}{ll} . \frac{(bb+bl)^2}{(b+x)^2} . ff\pi\pi$$

$$n = \frac{bbll}{ff\pi\pi L(b+l)^2}.$$

Si on ſubſtitue cette valeur de n dans la ſeconde équation, on aura ſimplement $\frac{\sigma}{e} = \left(\frac{b}{b+x}\right)^4$. On voit donc que c'eſt la même corde, quelque nombre qu'on prenne pour f; il n'y a que l'équation à la courbe & le pendule ſimple iſochrone avec les vibrations de la corde, auxquelles le nombre f ſoit affecté. La loi des épaiſſeurs de la corde eſt auſſi indépendante de la longueur de la corde, de ſorte que nos formules ſubſiſtent quelle que ſoit cette longueur. On voit au reſte qu'en faiſant la longueur b infinie, ce cas eſt encore celui des cordes d'une épaiſſeur égale, & toutes les formules deviennent les mêmes que celles du ſecond paragraphe. Mais, quelque valeur qu'on donne à la longueur b, cette claſſe de cordes a abſolument les mêmes prérogatives que l'on a démontrées convenir aux cordes également épaiſſes, & je ſuis bien ſûr qu'il n'y en a point d'autre pareille. Examinons donc de plus près toutes les propriétés de ces nouvelles vibrations.

§. 12. Je commence cet examen par les différens ordres de vibration, qu'on détermine dans ces cordes, tout comme dans les

cordes également épaiſſes. Lors donc que toutes les circonſtances ſont les mêmes, & qu'on prend pour f ſucceſſivement les nombres naturels, l'expreſſion de n marque que la longueur du pendule ſimple iſochrone diminue en raiſon de 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, &c. tout comme dans les cordes également épaiſſes; par conſéquent la durée de chaque vibration diminue en raiſon de 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. & celle de chaque vibration fondamentale ſera toujours exactement multiple de toutes les autres. Or j'ai démontré que toutes les vibrations de différens ordres peuvent coëxiſter, ſans ſe troubler, dans une ſeule & même corde. Si donc toutes ces eſpeces de vibration commencent au même inſtant, on voit que la premiere vibration du premier ordre, la ſeconde du ſecond, la troiſieme du troiſieme &c. finiront au même inſtant, & que par conſéquent chaque point de la corde ſe trouve à l'égard de toutes les eſpeces de vibrations dans un repos momentané parfait, qu'il quittera auſſitôt pour reprendre par un mouvement réciproque ſon état primitif. Voilà donc des mouvemens réciproques périodiques, qui ont toute l'apparence de vibrations ſimples réciproques, mais qui en effet ne ſont qu'un mêlange de vibrations ſimples, dont chaque eſpece forme un autre ton. Ceux qui ont l'oreille fine ſavent fort bien diſtinguer & même apprécier les principaux de ces tons; iis ſeront d'autant plus forts & prédomineront, qu'on ſuppoſe dans l'équation pour y le coëfficient α plus grand: tous ces tons vont en progreſſion des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. Cette pluralité de tons coëxiſtans à la fois dans une ſeule & même corde ne fait-elle pas une preuve évidente, que ce retour périodique dont je viens de parler, ne ſauroit être enviſagé comme une vibration ſimple: la corde en ce cas ne feroit jamais entendre que le ton fondamental, pendant qu'on peut faire évanouir entierement ce ton fondamental, ou le rendre auſſi foible qu'on veut, & donner beaucoup de force à ſon octave ou à ſa douzieme, ou à ſa double octave &c.

§. 13. Nous voyons donc que ces nouvelles cordes ont toutes les propriétés à cet égard que j'ai indiquées au §. 2. par rapport aux cordes ordinaires & uniformement épaiſſes. J'oſe dire plus. Je dis que

que notre loi pour ces cordes eſt unique, & qu'elle comprend tous les cas poſſibles, puiſque les cordes uniformes y ſont compriſes. Là deſſus, en combinant tous les ordres de vibration poſſibles, l'équation généraliſſime à la courbure de la corde ſera, en entendant par α, β, γ, λ, &c. des conſtantes quelconques

$$y = \frac{b+x}{b}\left(\alpha \sin \frac{x}{l}\cdot\frac{b+l}{b+x}\cdot\pi + \beta \sin \frac{x}{l}\cdot\frac{b+l}{b+x}\cdot 2\pi + \gamma \sin \frac{x}{l}\cdot\frac{b+l}{b+x}\cdot 3\pi + \delta \sin \frac{x}{l}\cdot\frac{b+l}{b+x}\cdot 4\pi + \&c.\right)$$

& cette équation comprend toutes les courbes poſſibles propres à produire les périodes dont je viens de parler, & que je ne ſaurois m'accoutumer à nommer des vibrations ſimples.

Je remarquerai ici qu'au bout de la premiere période la configuration de la corde n'eſt pas la même que la primitive renverſée de droite à gauche, comme dans les cordes également épaiſſes; mais la configuration primitive ſe reproduit en tout ſens au bout de deux périodes. Cependant, ſi on prend pour f ſimplement la ſuite des nombres impairs en excluant tous les nombres pairs, alors non ſeulement la courbe primitive ſe reproduit à chaque période, tant pour la poſition que pour la configuration, mais la corde aura encore cette autre propriété, qu'au milieu de chaque période tous les points paſſeront par l'axe à la fois: dans cet inſtant la corde ſera parfaitement droite. Comme cette derniere propriété exclut néceſſairement tous les nombres pairs à prendre pour f, on ne dira plus que toute courbe arbitraire y eſt bonne; m'en nommera-t-on une ſeule qui ne ſoit par renfermée dans ma formule, ſi tant eſt que quelque autre méthode indique cette formule? On ne doutera donc plus que les retours périodiques ne ſoyent uniquement fondés ſur ce que la durée d'une vibration fondamentale eſt exactement multiple de la durée de chaque autre vibration, de quelque ordre qu'elle ſoit: nulle autre eſpece de corde n'a cette propriété, comme nulle autre n'a celle desdits retours pé-

riodiques. Conſidérons à préſent les vibrations pures ſans aucun mêlange.

§. 14. Si l'on prend ſur l'axe prolongé, $AE = b$, on aura en faiſant ſimplement varier cette longueur AE, & en retenant tout le reſte, la longueur du pendule ſimple iſochrone proportionelle au quarré de AE ſur CE, & la durée de chaque vibration ſera comme AE eſt à CE; mais, ſi on retient la même quantité AE & qu'on change la longueur de la corde AC, je dis que la longueur du pendule ſimple iſochrone ſera comme le quarré de AC diviſé par le quarré de EC, & la durée de chaque vibration comme AC diviſé par EC; d'où il ſuit, que la longueur de la corde pourroit être infinie, ſans que le ton en devint infiniment grave; on n'auroit que la ſous-octave du ton que donneroit la corde, qui n'auroit que la longueur AE. Si on fait d'abord $AC = AE$, & qu'enſuite on en prenne le tiers, on aura l'octave en deſſus; ſi on prenoit la moitié de la corde, on auroit la quinte; d'où l'on voit que ces diviſions de la corde font un effet bien différent de celui des cordes ordinaires. Je paſſe un grand nombre d'autres corollaires pour dire encore quelques mots ſur la poſition des points eſſentiels dans les différentes configurations de la corde ébranlée.

§. 15. Lorsque les vibrations ſimples ſont d'un ordre quelconque f, la corde formera un certain nombre de nœuds; & ce nombre ſera exprimé par $f - 1$; dans les cordes uniformément épaiſſes tous ces noeuds ſont placés à diſtances égales; mais ici ces diſtances ſont fort inégales, & elles augmentent à meſure que la groſſeur de la corde diminue. C'eſt l'équation à la courbe expoſée au §. 11. qui nous met en état de déterminer toujours la poſition de chaque noeud: il faut pour cet effet trouver toujours toutes les valeurs de x qui font $y = 0$, outre les deux cas de $x = 0$ & $x = l$ qui répondent aux points A & C. Cette condition demande donc qu'on faſſe $\frac{x}{l} \cdot \frac{b+l}{b+x} \cdot f\pi = m\pi$, en mettant pour m ſucceſſivement

1,

1, 2, 3, 4, &c. jusqu'a $f - 1$ & en cherchant ſucceſſivement la valeur de x, & cette valeur donnera ſucceſſivement la diſtance des noeuds depuis le point A: de cette façon l'équation générale pour la poſition de tel noeud qu'on demande, ſera

$$x = \frac{m\,b\,l}{f\,b + f\,l - m\,l}.$$

Si, au lieu de la diſtance de chaque noeud depuis le point A, on demande ſa diſtance depuis le point E, il faut à la dite valeur ajouter b, & cette diſtance ſera $\frac{f\,b\,b + f\,b\,l}{f\,b + f\,l - m\,l}$; cette derniere formule donne en même tems la poſition du point A en faiſant $m = 0$, & la poſition du point C en faiſant $m = f$, & en effet ces deux points peuvent être regardés comme des noeuds. Donc, pour avoir tous les points A, M, N &c. jusqu'au point C, il faudra faire ſucceſſivement $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, juſqu'à $m = f$, & les réſultats donneront ſucceſſivement les diſtances EA, EM, EN, &c. juſqu'à la diſtance EC. De cette maniere on obtient

$$\text{EA} = \frac{f\,b\,b + f\,b\,l}{f\,b + f\,l}, \text{ ou } = b,$$

$$\text{EM} = \frac{f\,b\,b + f\,b\,l}{f\,b + f\,l - l},$$

$$\text{EN} = \frac{f\,b\,b + f\,b\,l}{f\,b + f\,l - 2\,l},$$

$$\text{EO} = \frac{f\,b\,b + f\,b\,l}{f\,b + f\,l - 3\,l} \text{ &c.}$$

$$\text{\& enfin EC} = \frac{f\,b\,b + f\,b\,l}{f\,b + f\,l - f\,l}, \text{ ou } = b + l.$$

De là on voit que toutes ces diſtances vont généralement en progreſſion harmonique, quel que ſoit le nombre f, & quel que ſoit le rapport

port entre b & l; soit, par exemple, $l = 2b$, on aura pour la quatrieme figure, qui suppose $f = 4$; $EA = b$; $EM = \frac{4}{5}b$; $EN = \frac{3}{4}b$; $EO = 2b$; & $EC = 3b$, & par conséquent $AM = \frac{1}{5}b$, ou $\frac{1}{10}l$; $MN = \frac{3}{10}b$, ou $\frac{3}{20}l$; $NO = \frac{1}{2}b$, ou $\frac{1}{4}l$, & $OC = b$, ou $\frac{1}{2}l$: D'où l'on voit que les longueurs de ces branches sont en raison des nombres 2, 3, 5 & 10, ainsi la derniere branche OC a cinq fois la longueur de la premiere branche AM.

§. 16. On voit aussi, qu'il y a dans chaque ventre ou branche un point, qui fait de plus grandes excursions que tout autre point de la même branche. Dans les cordes uniformément épaisses tous ces points sont exactement au milieu de chaque branche; mais c'est tout autre chose dans les cordes inégalement épaisses, & il est essentiel de déterminer ces points afin d'avoir une connoissance exacte de pareilles vibrations intéressantes dans la Physique & dans la Méchanique. On prendra donc la différentielle de l'équation à la courbe (§. 11.) & on fera $dy = 0$. De cette façon on trouve

$$\text{sin}\,\frac{x}{b+x} \times \frac{b+l}{l} \times f\pi = \frac{b}{b+x} \times \frac{b+l}{l} \times f\pi \,\text{cos}\,\frac{x}{b+x} \times \frac{b+l}{l} \times f\pi,$$

ou bien

$$\text{tang.}\,\frac{x}{b+x} \times \frac{b+l}{l} \times f\pi = \frac{-b}{b+x} \times \frac{b+l}{l} \times f\pi.$$

Cette équation donnera la valeur de x par plusieurs méthodes d'approximation qu'on connoit, & on remarquera qu'il doit y avoir entre les deux extrémités de la corde autant de racines qu'il y a de ventres ou qu'il y a d'unités en f; Supposons d'abord b beaucoup plus grand que l, il faudra que $\text{tang.}\,\frac{x}{b+x} \times \frac{b+l}{l} \times f\pi$, soit une quantité fort grande, & par conséquent l'arc $\frac{x}{b+x} \times \frac{b+l}{l} \times f\pi$,

à

à peu près égal $\frac{2m - 1}{2}\pi$, en entendant par m un nombre entier quelconque, qui ne ſoit pas plus grand que f; faiſons donc $\frac{x}{b+x} \times \frac{b+l}{l} \times f\pi = \frac{2m-1}{2}\pi$, & nous aurons $x = \frac{(2m-1)\,bl}{2fb + 2fl - 2ml + l}$: mais comme la tangente en queſtion doit prendre une valeur négative, c'eſt une marque que les arcs $\frac{x}{b+x} \cdot \frac{b+l}{l} \cdot f\pi$ doivent être pris un peu plus grands que $\frac{2m-1}{2}\pi$, d'où nous devons conclure que la valeur de x eſt un peu trop petite. Une autre conſidération m'a fait voir, qu'il faut augmenter cette valeur de la quantité $\frac{8fll(bb + bl}{(2fb + 2fl - 2ml + l)^3 \pi\pi}$, pour avoir à peu près la véritable valeur, quelle que ſoit la proportion entre b & l. De cette maniere nous aurons à peu près

$$x = \frac{(2m-1)\,bl}{2fb + 2fl - 2ml + l} + \frac{8fll(bb + bl)}{(2fb + 2fl - 2ml + l)^3 \pi\pi}.$$

En examinant ces formules, on verra facilement que les points des plus grandes excurſions, ſont toujours en deçà du milieu des branches, & qu'ils approchent d'autant plus du noeud qui les précede, que la valeur de b rélativement à la longueur de la corde eſt plus petite. J'éclaircirai tout cela par un ſeul exemple. Conſidérons les vibrations du quatrieme ordre (Fig. 4.) en faiſant $f = 4$, & ſuppoſons la longueur EA ou b égale à la longueur de la corde AC ou l. Cette valeur de b eſt bien éloignée d'être infinie, mais nos formules ne laiſſeront pas d'indiquer aſſez juſte les points des plus grandes excurſions m, n, o & p: nous aurons pour cet exemple

$x = \frac{(2m - 1)\,l}{17 - 2m} + \frac{64\,l}{(17 - 2m)^3\,\pi\pi}$; & pour avoir les quatre points m, n, o & p, il faudra pour m mettre ſucceſſivement 1, 2, 3 & 4, & nous pourrons à cauſe de la petiteſſe du ſecond terme nous contenter de faire $\pi\pi = 10$. De cette maniere nous aurons, en exprimant la longueur de la corde l par 10000,

$$A\,m = 666 + 19 = 685$$
$$A\,n = 2307 + 29 = 2336$$
$$A\,o = 4545 + 48 = 4593$$
$$A\,p = 7777 + 88 = 7865$$

Pour vérifier ces valeurs, j'ai examiné celle que donne l'équation immédiate, expoſée au commencement de cet article, pour $A\,p$, & je l'ai trouvée $= 7868$ au lieu de 7865, d'où l'on voit la juſteſſe de nos formules algébriques ſubſtituées à la vraie équation tranſcendente. Ces déterminations jointes à celle des noeuds, que j'ai donnée dans le précédent article, ſerviront à déterminer toutes les diſtances qu'on pourra exiger.

§. 17. Après avoir déterminé la poſition des points m, n, o &c. ce n'eſt plus qu'un ſimple corollaire de déterminer le rapport mutuel entre les plus grandes excurſions des branches différentes, c'eſt à dire, entre mm, nn, oo, &c. On ne pouvoit prévoir ſi ces rapports iroient en augmentant ou en diminuant; nos formules marquent que c'eſt en augmentant: car l'équation à la courbe (§ 10.) demande ici, qu'on ſubſtitue pour x ſa valeur déterminée; & ſi dans cette valeur on neglige le ſecond terme, beaucoup plus petit que le premier, l'arc $\frac{x}{l} \cdot \frac{b + l}{b + x} \cdot f\,\pi$ deviendra égal à $(2m - 1)\frac{1}{2}\,\pi$, dont le ſinus eſt ± 1: par conſéquent les petites appliquées mm, nn, oo, &c. ſuivront à peu près le rapport des diſtances Em, En, Eo &c. Dans l'exemple du précédent article, les plus grandes excurſions ſeront donc à peu près comme 10685, 12336, 14593, & 17865.

§. 18.

§. 18. Voilà donc une théorie complette ſur les vibrations de cette nouvelle Claſſe de cordes, dont les épaiſſeurs varient en raiſon biquarrée réciproque des diſtances depuis le point ϵ. C'eſt une propriété ſinguliere, rélativement à notre methode, que ces cordes admettent, tout comme les cordes uniformes, une ſolution complette, qui renferme tous les ordres de vibration, tandis que cette même méthode ne fournit, généralement parlant, pour chaque corde qu'un ſeul ordre de vibration, ſuſceptible de calcul, de ſorte qu'on ne ſauroit trouver aucune rélation entre les différens ordres de vibration d'une ſeule & même corde: de plus ces mêmes cordes, comme pour ne céder en rien aux cordes ordinaires, ſont douées de cette autre remarquable propriété, qu'étant ébranlées ſuivant les différens ordres, la durée de chaque vibration ſoit réciproquement proportionelle à l'expoſant de l'ordre ou au nombre f, de ſorte que dans le tems d'une vibration fondamentale il ſe fait preciſément 2, 3, 4 &c. vibrations pour les ordres qui ſuivent; c'eſt là l'unique ſource, je le répete, des nouvelles propriétés qu'on a démontrées ſur les vibrations des cordes uniformément épaiſſes, qui ne ſont qu'un ſimple cas des nouvelles cordes que je viens d'expoſer. Je ferai encore mieux ſentir cette verité (inconteſtable mais trop abſtraite pour être épluchée de tous les Géometres avec toute l'attention requiſe,) quand j'aurai examiné encore une autre eſpece de cordes digne de notre attention.

§. 19. Après que j'eus remarqué cette propriété ſur la durée des vibrations de tous les différens ordres, commune aux cordes uniformes & aux nouvelles cordes que je viens de commenter, j'érois fort curieux de ſavoir ſi cette même propriété ne ſeroit pas généralement vraie pour toutes les cordes, quelle que fut la loi de leur épaiſſeur variable; c'eſt ſur quoi je ne pouvois encore porter aucun jugement, faute de ſolution complette pour d'autres cordes: car j'ai déjà fait remarquer, que notre methode, hors de quelques cas particuliers, n'eſt propre qu'à réſoudre le probleme pour un ſeul ordre de vibration, ſans indiquer la nature des autres ordres pour la même corde. J'étois donc réduit à rechercher ces cas où le change-

ment de l'ordre de vibration ne fait pas changer la corde ; j'ai vu auſſitôt que je ſatisferois à cette condition en faiſant dans l'équation finale du §. 6. évanouir le dernier terme, c'eſt à dire, en ſuppoſant $ddq = 0$ ou bien $q = \frac{b+x}{b}$, ce qui nous a donné la théorie pour les ordres dont les épaiſſeurs ſont réciproquement proportionelles aux biquarrés des diſtances $b+x$. Mais, outre cette fonction de q, il y en a heureuſement encore une autre, qui ſatisfait à la même condition, & qui nous fera bientôt voir, que la propriété en queſtion ſur la durée des vibrations de différens ordres n'eſt pas générale.

§. 20. Si nous partons encore de l'équation finale du §. 6. il eſt facile de prévoir, qu'au lieu de faire évanouir le dernier terme en faiſant $ddq = 0$ ou $q = \frac{b+x}{b}$, on pourra, pour arriver au même but, identifier ce que les deux termes qui expriment la valeur de $\frac{\sigma}{c}$ ont de variable ; c'eſt dans cette vue que je ſuppoſerai la fonction arbitraire $q = V\left(1 + \frac{xx}{bb}\right)$. Si là deſſus nous procédons comme au §. 11. nous trouverons $\frac{ddq}{qdx^2} = \frac{bb}{(bb+xx)^2}$ & $\frac{1}{q^4} = \frac{b^4}{(bb+xx)^2}$, & puis $\int \frac{dx}{qq} = b$ Arc. tang $\frac{x}{b}$: par conſéquent (§. 6.) $S\frac{dx}{qq} = b$ Arc. tang $\frac{l}{b}$: mettons, pour ſimplifier nos formules, $g\pi$ à la place de Arc. tang $\frac{l}{b}$ & nous aurons

rons $S\frac{dx}{qq} = g\pi b$. Subſtituons toutes ces valeurs dans l'équation finale du §. 6. & nous aurons

$$\frac{\sigma}{e} = \frac{ff - gg}{gg} \times \frac{n\,L\,b\,b}{(bb + xx)^2}.$$

Si dans cette équation nous faiſons $x = o$, & par conſéquent $\sigma = e$, elle donne $1 = \frac{ff + gg}{gg} \times \frac{n\,L}{b\,b}$ & de là nous tirons $n = \frac{ff + gg}{gg} \times \frac{b\,b}{L}$; c'eſt ici la valeur du pendule ſimple iſochrone avec les vibrations de la corde, quel que ſoit l'ordre de ces vibrations: & ſi nous la ſubſtituons dans la précédente équation, nous aurons ſimplement $\frac{\sigma}{e} = \frac{b^4}{(bb + xx)^2}$: on voit donc que les épaiſſeurs de la corde ſont ici réciproquement proportionelles aux quarrés de la quantité $bb + xx$, & que par conſéquent elles ſont indépendantes, ſoit des longueurs de la corde, ſoit de l'ordre de ſes vibrations. C'étoit là ſurtout ce que je m'étois propoſé, & ce qui nous met en état de déterminer pour ces cordes toutes les queſtions qu'on peut faire. Nous les examinerons après que nous aurons expoſé la courbure que ces cordes prennent pendant qu'elles font leurs vibrations. L'équation générale pour ces courbures ſe trouve à la fin du §. 6; dans cette derniere il n'y a plus qu'à ſubſtituer pour q pour $\int\frac{dx}{qq}$, & pour $S\frac{dx}{qq}$ les valeurs que nous venons d'indiquer, après quoi on aura $y = \frac{a\sqrt{(bb + xx)}}{b}$ ſin $\frac{\text{arc. tang }\frac{x}{b}}{\text{arc. tang }\frac{l}{b}}\,f\pi$.

Remarquons d'abord ici qu'en donnant à la ligne arbitraire b une valeur infinie, on peut ſuppoſer arc. tang $\frac{x}{b}$, & Arc. tang $\frac{l}{b} = \frac{x}{b}$, & $\frac{l}{b}$; par conſéquent $g\pi = \frac{l}{b}$, & $gb = \frac{l}{\pi}$; après quoi on trouve pour ce cas particulier $\frac{\sigma}{e} = 1$; $n = \frac{11}{ff\pi\pi L}$, & $y = \alpha$ ſin $\frac{x}{l} f\pi$. De là encore toute la théorie des cordes uniformément épaiſſes. Examinons encore les vibrations de cette nouvelle eſpece des cordes.

§. 21. Mon deſſein principal étoit de trouver une autre eſpece de cordes, qui admit une théorie complete pour tous les ordres de vibration, afin de pouvoir comparer enſemble les longueurs du pendule ſimple iſochrone pour chaque ordre, & de voir ſi ces longueurs ſont toujours réciproquement proportionelles aux quarrés du nombre f. Cette queſtion étoit fort eſſentielle. Si ladite proportion ſubſiſtoit toujours, la théorie ſur les vibrations des cordes par la combinaiſon de leurs différens ordres ſeroit tout à fait générale; mais je ne m'attendois pas à une telle propriété parce que je connoiſſois déjà un grand nombre d'autres corps ſonores, que je ſavois bien s'écarter de cette loi ſur les tons harmoniques pour les différens ordres de vibration; l'événement m'a fait voir que je ne me ſuis pas trompé, puiſque les longueurs du pendule iſochrone ſont réciproquement proportionelles aux nombres $ff - gg$, & non aux nombres ff. Soit, par exemple, $g = \frac{1}{4}$, & qu'on prenne pour f ſucceſſivement les nombres naturels, les pendules iſochrones iront comme $\frac{1}{1\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{6\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{14\frac{1}{3}}$ &c. & les durées des vibrations comme $\frac{1}{\sqrt{15}}$, $\frac{1}{\sqrt{63}}$, $\frac{1}{\sqrt{143}}$ &c. De là on peut conclure, qu'en combinant enſemble deux ou pluſieurs ordres, on n'obtient, généralement parlant, aucun retour périodique de

de l'état primitif ſemblable à celui que j'ai démontré, non ſeulement pour les cordes uniformément épaiſſes, mais encore pour celles dont les épaiſſeurs diminuent en raiſon biquarrée réciproque des diſtances $b + x$, retours périodiques, qu'on a aſſez mal à propos confondus avec les vibrations fondamentales, quoique les uns & les autres reviennent, comme par hazard, au même. Mais je ne diſputerai pas ſur les mots, & je ne veux rien déroger à la beauté du nouveau théoreme que nous devons à M. d'Alembert. Je ſouhaiterois ſeulement qu'on l'enviſageât ſous ſon vrai point de vue.

§. 22. Le peu que j'ai dit au §. 20. nous met en état de répondre à toutes les queſtions ſemblables à celles que nous avons traitées depuis le commencement du §. 11. juſqu'à la fin du §. 18. ſur les cordes qui ſont exprimées par l'équation $\frac{\sigma}{e} = \frac{b^4}{(b+x)^4}$. Je n'entrerai pas dans ce nouveau détail, & je me contenterai d'ajouter ici un ſeul exemple afin de faire voir l'application de nos formules.

Si AE repréſente encore l'arbitraire conſtante b, & AC la longueur de la corde l, nous ſuppoſerons AC = AE, ou $l = b$. Dans cet exemple nous aurons arc. tang $\frac{l}{b}$ égal à la quatrieme partie de la demi-circonférence π, & par conſéquent $g = \frac{1}{4}$. De là nous tirons $n = \frac{1}{16ff - 1} \times \frac{II}{L}$, ce qui donne ſucceſſivement pour les différens ordres $n = 1^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{II}{L}$; $n = 2^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{II}{L}$; $n = 1^{\frac{1}{4}\frac{1}{3}} \cdot \frac{II}{L}$ &c. on aura auſſi pour équation à la courbe

$$y = \frac{a\sqrt{(bb + xx)}}{b} \text{ ſin } 4f \text{ arc. tang. } \frac{x}{b}.$$

Si

Si on ſuppoſe $l = a$, on aura arc. tang $\frac{l}{b} = \frac{1}{2}\pi$, donc $g = \frac{1}{2}$, & $n = \frac{1}{4ff - 1} \times \frac{bb}{L}$, & par conſéquent d'une valeur finie; le ton du ſecond ordre ſera le même que celui du premier ordre lorsqu'on fait $l = b$. Si nous reprenons ce cas de $l = b$, & que nous nous propoſions, par exemple, pour le quatrieme ordre les noeuds M, N, & O, il faut dans l'équation à la courbe faire ſucceſſivement ſin $\frac{\text{arc. tang } \frac{x}{b}}{\text{arc. tang } \frac{l}{b}} \cdot f\pi$, ou bien en ce cas, ſin $4f$ arc. tang $\frac{x}{b}$, ou enfin ſin 16 arc. tang $\frac{x}{b} = 0$, & par conſéquent 16. arc. tang $\frac{x}{b} = \pi$, ou 2π, ou 3π. Ces trois équations donneront $x = b$ tang. arc. $\frac{\pi}{16}$; $x = b$ tang. arc. $\frac{2\pi}{16}$, & $x = b$ tang. arc. $\frac{3\pi}{16}$, Si à ces trois équations on ajoutoit la quatrieme $x = b$ tang. arc. $\frac{4\pi}{16}$, on auroit ſimplement $x = b$, qui répond au point C. De cette maniere on trouve AM = 0, 19891 b; AN = 0, 41321 b, & AO = 0,66817 b. Donc AM = 0,19891 b; MN = 0,21430 b; NO = 0, 25496 b, & OC = 0, 33183 b. Je ne pouſſerai pas plus loin l'examen des vibrations de cette derniere claſſe de cordes; mais je ne ſaurois m'empêcher de faire encore une réflexion ſur la combinaiſon ou compoſition de différens ordres de vibrations mêlées enſemble.

§. 23.

§. 23. Servons nous encore de notre dernier exemple, où $l = b$; nous aurons pour équation à la courbe

$$y = \alpha \frac{\sqrt{(bb + xx)}}{b} \text{ ſin } 4f \text{ arc. tang } \frac{x}{b}.$$

Si nous prenons pour f la ſuite des nombres naturels, pour avoir tous les ordres poſſibles, & que nous ſuppoſions tous les ordres de vibration coëxiſter enſemble, nous aurons cette équation générale,

$$y = \frac{\sqrt{(bb+xx)}}{b}\left(\alpha \text{ ſin } 4 \text{ arc.tang } \frac{x}{b} + \mathfrak{C} \text{ ſin } 8 \text{ arc.tang } \frac{x}{b} + \gamma \text{ ſin } 12 \text{ arc. tang } \frac{x}{b} + \&c.\right)$$

où α, $\mathfrak{C}$, γ &c. marquent de petites lignes conſtantes, d'autant plus grandes que les excurſions de chaque ordre ſont plus grandes. On peut retenir de ces coëfficiens tels qu'on veut, & faire tous les autres $= 0$. Pour nous exprimer avec plus de préciſion, ſuppoſons ſimplement un mêlange des deux premiers ordres. Je dis, lorsque tous les points de la corde courbée ſuivant la loi

$$y = \frac{\sqrt{(bb + xx)}}{b}\left(\alpha \text{ ſin } 4 \text{ arc. tang } \frac{x}{b} + \mathfrak{C} \text{ ſin } 8 \text{ arc. tang } \frac{x}{b}\right),$$

partent au même inſtant, quand les vibrations dureroient un tems quelconque, jamais il n'arriveroit que la corde reprit ſon état primitif. il n'y auroit aucun période ou retour pour la même configuration à attendre. Les trois grands Géometres qui ont traité cette matiere pour les cordes uniformément épaiſſes, enviſageroient donc ces vibrations abſolues comme irrégulieres; elles ſont cependant bien régulieres, puisqu'elles ne ſont qu'un mêlange de deux eſpeces de vibrations ſimples & régulieres. Cette réflexion conſerve toute ſa force lorsqu'on ſuppoſe le premier ordre mêlé avec le quatrieme, ou le cinquieme &c. il faudroit toujours taxer d'irrégularité les vibrations réſultantes, quoique compoſées de vibrations régulieres. Cependant il y a des cas particuliers & iſolés qu'il faudroit par une conſidération non moins forcée réhabiliter; qu'on faſſe coëxiſter les vibrations du

premier & du ſoixante-unieme ordre, je dis que la corde ſe remettra dans l'état primitif après chaque vibration fondamentale; car dans le tems d'une vibration du premier ordre, il ſe fera préciſément 63 vibrations du ſoixante-unieme ordre; alors on ſeroit réduit à conſidérer les vibrations réſultantes, comme des vibrations régulieres ſimples, quoiqu'elles ſoyent manifeſtement compoſées, puiſqu'elles le ſont dans les autres cas. On peut dire la même choſe, lorſqu'on fait $f = 3781$, la corde faiſant pour cet ordre préciſément 3905 vibrations dans le tems d'une vibration fondamentale. Pour éviter donc de pareilles incongruités & défauts d'analogie, ne vaut-il pas mieux d'adopter le ſeul & vrai principe de la compoſition de vibration. Ce principe eſt général, ſans contredit, pour les cordes uniformément épaiſſes; & nous venons de voir que ſon application s'étend juſqu'aux cordes inégalement épaiſſes, qu'on n'avoit pas encore examinées.

Ceux qui voudront après moi embraſſer ce dernier ſujet, trouveront un champ bien fertile à cultiver. Je ſuis ſûr qu'ils ſauront en tirer de nouveaux fruits, puiſque le ſeul lemme du §. 4. nous en a tant fourni.

SUR

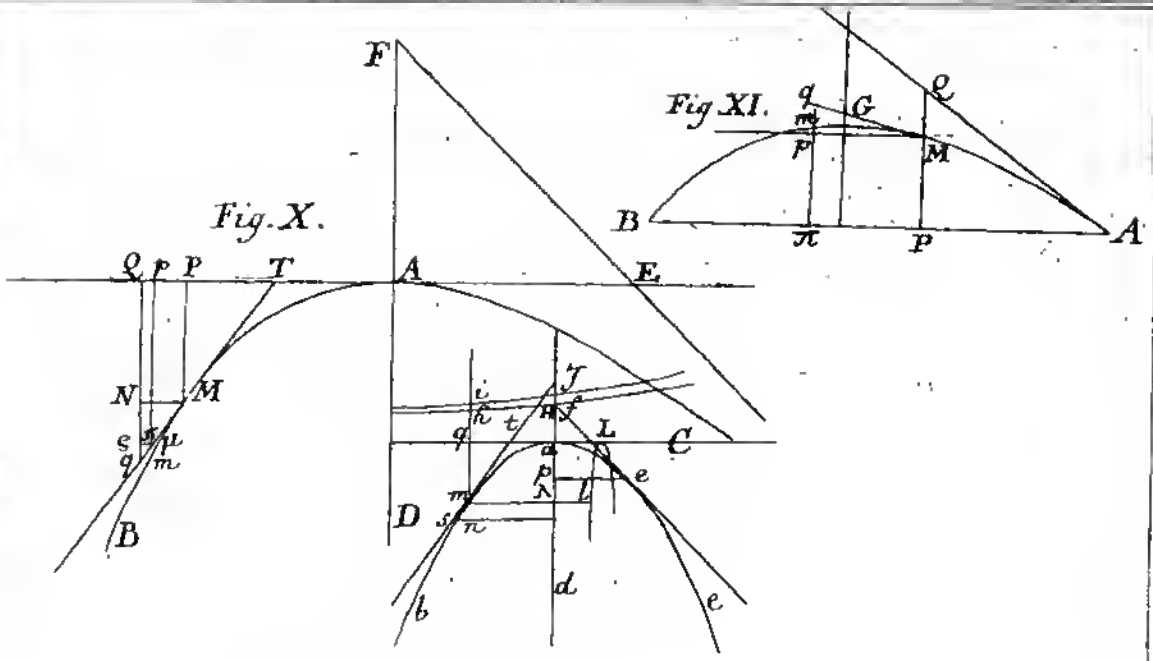


Fig. 1.

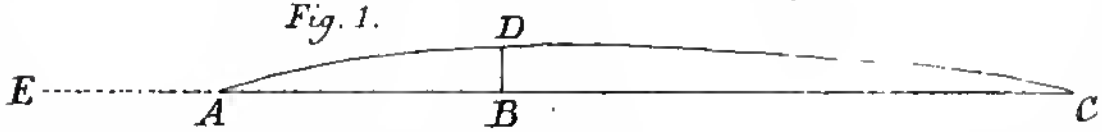


Fig. 2

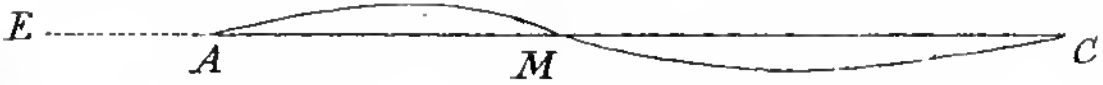


Fig. 3

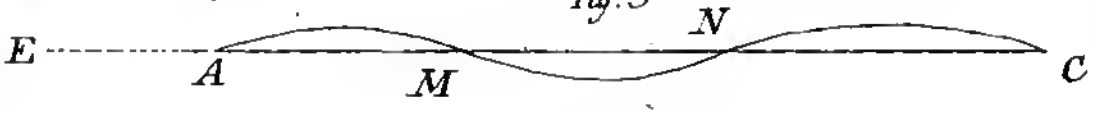
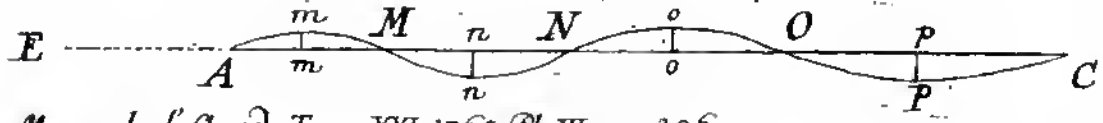


Fig. 4.



Mem. de l'Acad. Tome XXI. 1765 Pl. IV pag. 306.

SUR

LE MOUVEMENT D'UNE CORDE QUI AU COMMENCEMENT N'A ÉTÉ ÉBRANLÉE QUE DANS UNE PARTIE,

PAR M. EULER.

1.

Je crois que l'évolution de ce cas, où la corde n'a été dabord ébranlée que dans une de ſes parties, ſera très propre à diſſiper tous les doutes, que Mrs. Bernoulli & d'Alembert ont ſuſcités contre ma Théorie des cordes vibrantes, & ceux que M. de la Grange a le premier propoſés dans les Actes de la nouvelle Académie de Turin. Car l'un & l'autre de ces illuſtres Adverſaires eſt obligé de reconnoitre que ce cas n'eſt pas renfermé dans leurs ſolutions du probleme des cordes vibrantes: & partant, ſi ma méthode en fournit une ſolution, & même une telle, qui eſt confirmée par l'expérience, il n'y aura plus aucun doute que cette méthode ne ſoit fondée dans la vérité, & beaucoup plus générale que celle d'où les Adverſaires ont tiré leur ſolution du probleme des cordes vibrantes.

2. Or, pour écarter tous les doutes ſur la généralité de ma méthode, il faut remarquer qu'on convient de part & d'autre, que ce probleme ne ſauroit être réſolu, que dans les cas où les éloignemens de la corde de ſa ſituation naturelle ſont quaſi infiniment petits, & outre cela encore l'inclinaiſon de chacun de ſes élémens infiniment petite. Cette condition eſt abſolument néceſſaire, puiſqu'on eſt obligé de ſuppoſer dans la ſolution, que chaque point M de la corde AMB ſe meut toujours ſur l'applicquée MP perpendiculaire à la ſituation naturelle APB; ce qui ne ſauroit arriver, à moins que toutes Planche V. Fig. 1.

ces appliquées P M ne ſoient infiniment petites, & que les tangentes aux points M ne ſoient infiniment peu inclinées à la droite A P B, afin que l'élément de la courbe M*m* puiſſe partout être regardé comme égal à l'élément correſpondant de l'abſciſſe P*p*.

Fig 2. 3. Pour ſe former une juſte idée de telles courbes, propres à repréſenter la figure d'une corde pendant ſon mouvement de vibration, on n'a qu'à conſtruire ſur la ligne A B une courbe quelconque A 𝔐 B, qui n'ait nulle part une tangente perpendiculaire à l'axe A B; alors, une telle courbe étant décrite, qu'on diminue toutes ſes appliquées P 𝔐 en raiſon d'un nombre infini *i* à l'unité, de ſorte que P 𝔐 : P M = *i* : 1, & par ce moyen on obtiendra la courbe A M B, que la corde A B pourra recevoir dans ſon mouvement: puisque non ſeulement chaque appliquée de la courbe A M B mais auſſi l'inclinaiſon de chaque élément M*m* à l'axe A B, devient infiniment petite. Au reſte, on comprend aiſément que le mot d'infini ne doit pas ici être pris à la rigueur, & qu'il ſuffit que le nombre *i* ſoit très grand. De cette maniere, toute courbe decrite ſur l'axe A B, pourvu qu'elle n'ait nulle part une tangente perpendiculaire à l'axe, fournit une courbe propre à repréſenter la figure de la corde A B pendant ſon mouvement de vibration.

4. Ici ſe préſente d'abord cette queſtion: ſi toutes ces courbes ſont également propres à repréſenter la figure d'une corde pendant ſon mouvement? ou s'il y a encore quelque autre condition qu'il eſt néceſſaire d'y ajouter? M. d'Alembert ſoutient qu'aucune autre figure ne ſauroit convenir aux cordes vibrantes, que celles qui ſont contenues dans cette équation:

$$y = A \sin \frac{\pi x}{a} + B \sin \frac{2\pi x}{a} + C \sin \frac{3\pi x}{a} + D \sin \frac{4\pi x}{a} + \&c.$$

où *a* marque la longueur de la corde A B, *x* une abſciſſe quelconque A P, *y* l'appliquée P M, π : 1 le rapport de la périphérie ou diametre, & les lettres A, B, C, D &c. des coëfficiens infiniment

pe-

petits. Donc, s'il arrivoit qu'on eût imprimé à la corde au commencement une figure qui ne ſeroit pas contenue dans cette équation, il ſeroit auſſi impoſſible d'en déterminer le mouvement par le calcul.

5. M. d'Alembert convient donc, qu'on pourroit donner aux cordes une infinité de figures initiales, qui ne ſeroient pas compriſes dans cette équation; mais, dans ces cas, il nie que la Théorie ſoit ſuffiſante pour déterminer le mouvement dont les cordes ſeront agitées après avoir été relâchées. La raiſon qu'Il en donne eſt, que dans ces cas il ſe trouveroit quelque élément où l'équation différentielle du ſecond degré, tirée de la Théorie, ne ſauroit plus avoir lieu, vu qu'il y auroit quelque particule qui n'évanouiroit plus par rapport aux autres quantités, comme on le ſuppoſe dans la Théorie; de ſorte que dans cet élément on commettroit une erreur. Mais je réponds qu'une telle erreur commiſe dans un ou quelques élémens eſt toujours infiniment petite, & ne ſauroit troubler le réſultat total du calcul. En effet, quand on calcule le mouvement de quelque corps, on ſuppoſe partout l'accélération infiniment petite par rapport à la viteſſe actuelle du corps: & quoique cette ſuppoſition ſoit fauſſe dans les premiers élémens où le mouvement eſt engendré, le calcul ne laiſſe point d'être très juſte.

6. Le même inconvénient ſe rencontre presque dans toutes les applications du calcul intégral: quand il s'agit de trouver l'aire APM par la formule $\int y\,dx$, on y ſuppoſe que le vrai élément de cette aire étant le trapeze PMmp, le triangle Mmn eſt infiniment petit par rapport au rectangle PM$np = y\,dx$: ce qui cependant n'eſt pas vrai dans le premier élément en A, à moins que la tangente en A ne convienne avec l'axe. Voudroit-on pour cela ſoutenir, que la formule intégrale $\int y\,dx$ ne ſauroit être appliquée à des courbes, dont la tangente au commencemeot A ne convient point avec l'axe même? Or il me ſemble qu'il en eſt de même des ſcrupules que M. d'Alembert éleve contre ma ſolution du probleme des cordes vibrantes: vu que toutes ſes difficultés ne tombent que ſur les deux derniers Fig. 1,

élémens de la corde: je ne nie pas, qu'en y appliquant le calcul, on ne commette quelque erreur; mais je ſoutiens que dans la totalité cette erreur devient infiniment petite & tout à fait nulle.

7. La ſolution de M. Bernoulli revient auſſi entierement à l'équation rapportée ci deſſus (§. 4.), & il ſoutient que quelque compliqué que ſoit le mouvement d'une corde, on le peut toujours enviſager comme un aſſemblage de pluſieurs oſcillations régulieres, qui ſe trouvent tant dans la corde entiere que dans ſes parties aliquotes, indépendamment les unes des autres. C'eſt de ce grand principe, qu'il a expliqué fort heureuſement le phénomene bien ſingulier, que la même corde peut rendre à la fois pluſieurs ſons différens, qui ſont entr'eux comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5 &c. De ce principe il s'enſuit, que quel que ſoit le mouvement d'une corde, à chaque inſtant ſa figure doit être exprimée par ladite équation

$$y = A \sin \frac{\pi x}{a} + B \sin \frac{2\pi x}{a} + C \sin \frac{3\pi x}{a} + D \sin \frac{4\pi x}{a} \text{ &c.}$$

& partant, puiſqu'au commencement on peut avoir donné à la corde une figure quelconque, & que les figures qu'elle prend dans la ſuite à chaque inſtant, en dépendent néceſſairement; il ſoutient que toutes les figures poſſibles ſont compriſes dans cette même équation, & qu'il eſt même ſuperflu de vouloir recourir à d'autres principes pour déterminer le mouvement d'une corde, en regardant comme donnée la figure qui lui a été imprimée au commencement.

8. En effet, puiſque cette équation contient une infinité de coëfficiens A, B, C, D &c. dont chacun peut être déterminé à volonté, on les peut toujours déterminer en ſorte que la courbe paſſe par une infinité de points donnés: d'où il ſemble qu'on ne ſauroit decrire une ligne courbe, à laquelle cette équation ne puiſſe être appliquée. Mais, quand même j'accorderois à M. Bernoulli cette poſſibilité, il eſt bien clair que l'exécution ſeroit encore aſſujettie à des difficultés inſurmontables. Car, ayant donné dabord à la corde une certaine

taine figure, il faudroit commencer par déterminer tous les ſcits coëfficiens en ſorte que l'équation réponde à une infinité de points de la figure donnée; ce qui ſeroit ſans contredit un ouvrage dont le plus habile calculateur ne viendroit jamais à bout. Cependant, avant que d'avoir achevé cet ouvrage, il ſera impoſſible de déterminer le mouvement de la corde: qui demeurera par conſéquent toujours inconnu même au plus grand Géometre.

9. Je ne crois donc faire aucun tort au mérite de la ſolution de M. Bernoulli, quand je dis, qu'elle n'eſt pas ſuffiſante pour déterminer le mouvement des cordes vibrantes en général, c'eſt à dire, après qu'on leur a imprimé une figure quelconque, & à cet égard il me ſemble qu'on doit accorder une grande préférence à ma methode & à celle de M. de la Grange. Puisque, quelle que ſoit la figure qu'on aura imprimée à la corde au commencement, quand même auſſi elle ne ſeroit expreſſible par aucune équation, je ſuis toujours en état de déterminer ſon mouvement par une conſtruction très ſimple & applicable à tous les cas poſſibles, ſans qu'aucune circonſtance en puiſſe arrêter le ſuccès. Or cette même conſtruction fournit auſſi, pour les cas qui ſont compris dans l'équation de M. Bernoulli, préciſément les mêmes ſolutions que ce grand Géometre a données, & partant je ne vois aucune raiſon, pourquoi cette conſtruction lui puiſſe paroitre ſuperflue, ou même ſuſpecte.

10. Mais il me ſera encore permis de douter, que toutes les figures poſſibles dont les cordes ſont ſuſceptibles, ſoient contenues dans l'équation rapportée, quoique le nombre de ſes termes puiſſe être augmenté à l'infini. Entre pluſieurs raiſons que je pourrois alléguer pour juſtifier mes doutes, le cas que j'ai ici en vue, me ſemble fournir une preuve très convaincante. Car, ſuppoſant qu'on n'ait détourné au commencement qu'une partie de la corde AC de ſon état naturel, & qu'on lui ait donné la figure AMC, pendant que le reſte CB eſt demeuré dans ſon état naturel & rectiligne, de ſorte que la figure initiale ait été compoſée de la ligne Fig. 3.

courbe

courbe AMC & de la droite CB, ce qui eſt facile d'exécuter: alors il ſera ſans doute très difficile, pour ne pas encore dire impoſſible, de déterminer les coëfficiens de l'équation de M. Bernoulli, en ſorte qu'elle exprime cette figure mixte d'une ligne courbe quelconque AMC & d'une droite CB. Il ſemble auſſi par la derniere lettre de M. Bernoulli lui-même, qu'il regarde ce cas, comme non compris dans ſa ſolution, ſans parler des difficultés que la détermination des coëfficiens renfermeroit.

11. Mais il y a plus: le mouvement de cette corde ne ſauroit en aucune maniere être enviſagé comme un aſſemblage ou mêlange de pluſieurs oſcillations ſimples & régulieres, en quoi conſiſte l'eſſence de la ſolution de M. Bernoulli. Car, au premier inſtant après le relâchement de la corde, la ſeule partie AMC ſera miſe en mouvement, tandis que le reſte CB demeure encore abſolument immobile, & ſans aucune mouvement d'oſcillation, pour lequel on puiſſe aſſigner la longueur du pendule iſochrone. Il eſt vrai que, bientôt après, le mouvement ſera auſſi ſucceſſivement communiqué à la partie CB, mais alors d'autres parties ſeront réduites en repos, & il n'y ſauroit plus être queſtion des pendules ſimples iſochrones aux mouvemens de toutes les parties de la corde. Le mouvement de la corde ſera d'une nature tout à fait différente, qui ne ſauroit être repréſentée comme un mêlange de pluſieurs oſcillations ſimples & régulieres, conformément au principe de M. Bernoulli.

12. Voilà donc un cas bien inconteſtable, auquel la ſolution de M. Bernoulli eſt abſolument inapplicable; & puiſque ce cas a lieu toutes les fois que la corde n'a pas été ébranlée par toute ſa longueur, il y faut reconnoître une infinité de cas non compris dans la ſolution de M. Bernoulli. Delà on ſera auſſi obligé de m'accorder que, quand même la corde aura été ébranlée par toute ſon étendue, il y aura encore une infinité de cas qu'il faut également exclure de cette ſolution, leur mouvement ſe réglant ſur des prin-

cipes

cipes entierement différens. Par conſéquent, quelque ingénieuſe que ſoit la ſolution de M. Bernoulli, on ne la ſauroit regarder que comme une ſolution très particuliere, qui ne s'étend qu'à de certaines eſpeces de vibrations, qu'on peut nommer régulieres, pendant qu'une infinité d'autres eſpeces irrégulieres en ſont abſolument exclues.

13. Cependant la conſtruction générale que j'ai donnée autrefois pour le mouvement des cordes vibrantes, s'étend également à toutes ces eſpeces tant irrégulieres que régulieres; & pour le tems préſent où l'on continue de combattre ma conſtruction en la regardant, ou comme fauſſe, ou ſuperflue, je crois qu'il ſera fort intéreſſant, que j'en tire ici en détail la détermination du mouvement d'une corde qui n'a été ébranlée au commencement que dans une de ſes parties. J'ai tout lieu d'eſperer, que M. Bernoulli en reconnoitra la juſteſſe, ſur tout quand il verra le bel accord avec l'expérience; mais M. d'Alembert dira, ſans doute, qu'il réfutera ma ſolution dans quelcun de ſes ouvrages qu'il publiera dans la ſuite, & il ſe contentera pour le préſent d'en avertir le public. Or, quoi qu'il en ſoit, je ſoumets ma ſolution entierement au jugement du Public dans la confiance qu'elle ſera approuvée au moins d'une partie, même avant que la réfutation paroiſſe.

14. Je commencerai donc par mettre devant les yeux ma conſtruction du probleme des cordes vibrantes. Soit A B la corde dans ſa ſituation naturelle, la longueur A B $= a$, ſon poids $=$ M, & la force dont elle eſt tendue $=$ F, en ſuppoſant la corde également épaiſſe par toute ſa longueur. Qu'à cette corde on ait donné au commencement une figure quelconque A M B, dont, comme j'ai déjà remarqué, toutes les appliquées P M doivent être regardées comme infiniment petites. Cela poſé, on demande, après qu'on aura ſubitement relâché la corde, quel ſera ſon mouvement dans la ſuite? Il eſt évident que, pour réſoudre cette queſtion, il faut être en état d'aſſigner la figure de la corde pour chaque inſtant ſuivant. Or, poſant que depuis le commencement il s'eſt ecoulé un tems de t Fig. 4.

ſecondes, & que g marque la hauteur d'où les corps graves tombent dans une ſeconde ; ſi y marque l'appliquée qui répondra alors à l'abſciſſe $AP = x$, la Théorie que perſonne ne révoque en doute, fournit pour la valeur de y cette équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{2Fag}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, dont l'intégrale complette eſt ſans contredit

$$y = \Gamma:\left(x + t\sqrt{\frac{2Fag}{M}}\right) + \Delta:\left(x - t\sqrt{\frac{2Fag}{M}}\right)$$

où les caractéres Γ & Δ indiquent des fonctions quelconques.

15. Pour conſtruire cette équation, je prolonge la droite AB de part & d'autre, j'y prends les parties Ab & $Ba = AB$, & je décris ſur elles $AV^{I}V^{II}V^{III}b$ & $Bv^{II}v^{III}a$, égales à la figure initiale de la corde AMB, mais dans une ſituation renverſée, comme on peut le voir aiſément en regardant la figure : d'où il eſt clair que ces courbes continuées auront en A & B leurs tangentes communes avec la courbe donnée. Dans la premiere conſtruction, j'ai continué ces mêmes courbes de part & d'autre à l'infini, mais on verra bientôt, qu'il ſuffit de la décrire une fois de chaque côté. Or ces courbes nous ſerviront à déterminer la figure que la corde prendra à un tems quelconque écoulé depuis le commencement. Pour cet effet, j'ajoûte à la figure la ligne droite $EF = \sqrt{\frac{2Fag}{M}}$, qui ſervira de meſure du tems d'une ſeconde, & dont la longueur ſera aiſément déterminée par la formule $\sqrt{\frac{2Fag}{M}}$: ce qui nous met en état de repréſenter par une ligne droite chaque tems pour lequel on voudra connoitre la figure de la corde.

16. Maintenant, ſi l'on veut ſavoir de chaque point de la corde P, à quelle diſtance il ſe trouvera de ſon lieu naturel ſur l'appliquée PM, après un tems quelconque donné de t ſecondes, qu'on prenne

prenne ſur l'axe de part & d'autre, du point P, les intervalles P T & Pt égaux à ce tems, ou bien à E F. t, & après y avoir tiré les appliquées T V & $t u$, l'appliquée cherchée pour le point P, que j'ai nommée $= y$, ſera toujours $= \frac{1}{2}$ T V $+ \frac{1}{2} t u$. Si le tems propoſé t eſt plus grand, l'une ou toutes les deux appliquées doivent être priſes dans les continuations où l'on doit tenir compte, ſi ces appliquées tombent en ſens contraire: ainſi, après le tems P T$'$ $=$ Pt' on aura $y = -\frac{1}{2}$ T$'$ V$' + \frac{1}{2} t' v'$, & après le tems P T$''$ $=$ Pt'', on aura $y = -\frac{1}{2}$ T$''$ V$'' - \frac{1}{2} t'' v''$, & ainſi de ſuite. De là on connoitra auſſi aiſément le mouvement de chaque point de la corde P pour un tems propoſé quelconque, puiſqu'on trouve par cette conſtruction, de combien change ſon lieu d'un inſtant à l'autre. Ainſi rien n'eſt plus aiſé que de déterminer le mouvement tout entier de la corde, quelle qu'ait été ſa figure initiale A M B.

17. Pour prouver la verité de cette conſtruction, je n'ai qu'à en montrer le parfait accord avec l'équation fournie par la théorie, & avec les conditions que la nature de la queſtion renferme. Or d'abord, il eſt évident que cette conſtruction donne pour le premier inſtant la même figure A M B qu'on ſuppoſe avoir été imprimée à la corde; & on en voit auſſi que tous les points de cette courbe ne changent point de place au premier inſtant, ou bien que le mouvement commence du repos, comme on le ſuppoſe dans le probleme. Enſuite, l'une & l'autre extrémité de la corde A & B demeurera conſtamment en repos; car, en prenant de A ou de B ſur l'axe de part & d'autre des abſciſſes égales, les appliquées y ſont auſſi toujours égales & l'une négative de l'autre, de ſorte que leur ſomme eſt conſtamment $= 0$; c'eſt auſſi la raiſon, pourquoi la courbe A M B a été continuée de part & d'autre de la maniere qui a été expliquée ci-deſſus; & puiſque les deux points A & B demeurent toujours néceſſairement en repos, il eſt impoſſible de ſuppoſer à la courbe A M B d'autres continuations que celles que je viens d'établir.

18. Maintenant rien n'empêche qu'on n'enviſage la courbe AMB avec toutes ſes continuations que je viens de lui donner, comme une ſeule courbe où il n'importe ſi la ligne AMB eſt une courbe réguliere renfermée dans quelque équation, ou ſi c'eſt une courbe irréguliere décrite à la main, la régularité n'entrant ici pour rien en compte. Et partant, prenant une abſciſſe quelconque AT, l'appliquée TV qui lui répond pourra être regardée comme une fonction de AT, & indiquée en ſorte $TV = \Delta : AT$. Cela remarqué, ſoit pour abréger la ligne $EF = \sqrt{\frac{2Fag}{M}} = c$, & nommant l'appliquée $= y$, qui répond à l'abſciſſe $AP = x$, après le tems $= t$ ſecondes, on prend dans la conſtruction les intervalles $PT = Pt = ct$, d'où l'on a les abſciſſes $AT = x - ct$ & $At = x + ct$; & partant les appliquées $TV = \Delta : (x - ct)$ & $tv = \Delta : (x + ct)$: de ſorte que notre conſtruction donne $y = \frac{1}{2}\Delta : (x - ct) + \frac{1}{2}\Delta : (x + ct)$: ce qui convient parfaitement avec l'équation principale $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$; puiſqu'on a

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{c}{2}\Delta' : (x-ct) + \frac{c}{2}\Delta' : (x+ct) ; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2}\Delta' : (x-ct) + \frac{1}{2}\Delta' : (x+ct)$$

&

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{cc}{2}\Delta'' : (x-ct) + \frac{cc}{2}\Delta'' : (x+ct) \;\&\; \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{1}{2}\Delta'' : (x-ct) + \frac{1}{2}\Delta'' : (x+ct)$$

ce qui ſuffit pour prouver la juſteſſe de ma conſtruction.

19. Mais, pour puiſer de cette conſtruction une connoiſſance parfaite de tout le mouvement de la corde, il ſuffit de pouſſer les opérations expoſées juſqu'au tems exprimé par la longueur de la corde AB, puiſque alors la corde ſera réduite à une figure $AnmB$ ſemblable à celle qu'elle avoit au commencement, mais dans une

Fig. 5.

ſitua-

ſituation renverſée; de ſorte qu'après ce tems le mouvement redevient ſemblable à celui du commencement. Pour prouver cela, prenons du point P les intervalles $PT = Pt = AB$: & après le tems de $\frac{AB}{EF}$ ſecondes, le point P ſe trouvera en n, en ſorte que $Pn = \frac{1}{2}(TV + tv)$. Or, prenant $BQ = AP$, à cauſe de $AT = AQ$ & $Bt = BQ$, on aura en vertu de la conſtruction $TV = QN$ & $tv = QN$; & partant $Pn = QN$; d'où l'on voit que la courbe $Anm B$ eſt ſemblable à BNMA. Par conſéquent, quelle qu'ait été la figure initiale de la corde, il eſt certain qu'après le tems $\frac{AB}{EF} = V\frac{Ma}{2Fg}$, les mêmes phénomenes du mouvement reviennent, & qu'il ſuffit toujours de connoitre le mouvement pour un tel intervalle de tems, à quoi les deux continuations Ab & Ba de la courbe initiale ſont ſuffiſantes.

Solution du probleme propoſé.

20. Soit comme auparavant la longueur de la corde $AB = a$, ſon poids $= M$, la force de ſa tenſion $= F$, & g la hauteur d'où les corps graves tombent dans une ſeconde: & que pour meſurer le tems on prenne une ligne droite $c = V\frac{2Fag}{M}$, qui marquera une ſeconde. Suppoſons maintenant, que cette corde n'ait été ébranlée au commencement que dans ſa partie AC, à laquelle on ait donné la figure AMC, tandis que le reſte CB a conſervé ſa figure naturelle & rectiligne, & qu'après avoir réduit la corde dans cet état forcé, on la relâche ſubitement. Cela poſé, on demande, quel ſera le mouvement dont la corde ſera agitée dans la ſuite? Pour cet effet, on prendra ſur la droite AB prolongée les intervalles $Ab = Ba = AB$, ſûr leſquels on décrira les courbes Amc & $a\mu\gamma$, ſemblables à la courbure initiale AMC, mais dans une ſituation renverſée, pour avoir l'échelle des tems bcmAMCB$\gamma\mu a$, Planche VI. Fig. 6.

dont les parties, bc, CB & Bγ, conviennent avec l'axe même, de ſorte que les appliquées dans ces eſpaces ſont cenſées être nulles.

21. Maintenant, par la conſtruction expliquée ci-deſſus, il eſt aiſé de déterminer le mouvement de chaque point de la corde. Ainſi le milieu D de l'eſpace ébranlé AC étant au commencement à la diſtance DM, s'approchera vers l'axe, & parviendra en D aprés le tems $=$ AD: de là il paſſera de l'autre côté de l'axe, & après le tems $Dd = 2AD$, il ſe trouvera à la diſtance $\frac{1}{2}\,dm = \frac{1}{2}\,DM$, d'où il retournera de nouveau vers l'axe, & reviendra en D après le tems $Dc = 3AD$, où il demeurera en repos jusqu'au tems $D\gamma = BD + BC = 2AB - 3AD$, de ſorte que la durée de ce repos eſt $= 2AB - 6AD = 2AB - 3AC = 2BC - AC$.

De la même maniere, le point C montera d'abord, & après le tems $CD = AD$, parviendra à ſa plus grande diſtance $= \frac{1}{2}\,DM$, d'où il retournera en C après le tems $CA = 2AD$: & de là il paſſera de l'autre côté de l'axe jusqu'à la diſtance $\frac{1}{2}\,dm = \frac{1}{2}\,DM$, après le tems $Cd = 3AD$; enſuite il retournera en C après le tems $Cc = 4AD$, où il repoſera jusqu'au tems $C\gamma = 2BC = 2AB - 2AC$. Or un point quelconque P de la partie CB demeurera en repos pendant le tems PC, après quoi il prendra le même mouvement que le point C; tant que la diſtance Pγ eſt plus grande que Pc, ou bien $PB + BC > AP + AC$, ou $BP > AC$. Mais ſi $BP < AC$ il recommence plutôt à ſe mouvoir.

22. De là nous pourrons aſſigner la figure de la corde après un tems écoulé quelconque depuis le commencement; dont je conſidérerai les principaux inſtans:

Fig. 7. I. Après le tems AD, la corde aura la figure 7, où la partie AD eſt droite, & la courbure ne ſe trouve que dans la partie DcE, le point c étant dans la plus grande élongation.

Fig. 8. II. Après le tems 2AD, la corde aura la figure AdCeFB, les intervalles AD, DC, CE, EF étant pris égaux; où les points

points *d* & *e* ſe trouvent dans leur plus grand éloignement de l'axe.

III. Après le tems $\frac{3}{4}$ AD, la même courbure eſt avancée ſur la partie DG, les parties AD & BG étant droites & en repos. Fig. 9.

IV. Après le tems $\frac{4}{4}$ AD, la même courbure eſt avancée ſur la partie CH, ſuppoſé que $\frac{4}{4}$ AD ſoit encore plus petit que AB. Fig. 10.

V. Enfin, après le tems AB, la corde reçoit une figure ATNB ſemblable à la premiere, mais dans une ſituation renverſée; après quoi les mêmes phénomenes reviennent, dont les periodes s'achevent dans le tems $=$ AB, ou bien de $\sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ ſecondes. Fig. 11.

23. On voit donc que ce mouvement eſt fort irrégulier, & qu'il n'y a aucune partie de la corde qui faſſe des oſcillations réglées qui puiſſent être comparées à celles d'un pendule ſimple, ſelon la maniere de M. Bernoulli. Car chaque partie n'eſt ébranlée que pendant quelque tems, où même ſon mouvement n'eſt rien moins que ſemblable à celui de quelque pendule : & pendant un autre tems la même partie ſe trouve dans un repos parfait. M. Bernoulli m'avoit objecté contre ce mouvement, que ſi une partie de la corde avoit été en repos pendant quelque tems, il n'y auroit point de raiſon pourquoi elle commenceroit à ſe mouvoir dans un ſens plutôt que dans un autre. Mais on n'a qu'à ſuivre pas à pas la progreſſion du mouvement, & ce doute évanouira de ſoi même: outre qu'on voit auſſi dans la propagation du ſon par l'air, dont le calcul eſt fondé ſur les mêmes principes, que les ébranlemens propagés ne ſe continuent que dans un ſens, pendant que la premiere agitation ſe répand en tout ſens.

Con-

Conſidération du cas, où la corde n'a été ébranlée que dans ſon milieu.

Fig. 12. 24. Soit AB encore la même corde que j'ai conſidérée juſqu'ici, dont au commencement la partie du milieu CD ait été détournée dans la courbe CMD, les deux autres parties AC & BD ayant été conſervées dans leur état naturel; & que de cet état forcé la corde ſoit relâchée ſubitement. Donc, pour en déterminer le mouvement, je prolonge la corde de part & d'autre en a & b, en ſorte que $Ab = Ba = AB$, & ſur ces parties prolongées je décris dans une ſituation renverſée les courbes $cm.d$ & $\gamma\mu\delta$, ſemblables à la courbe CMD. Pour rendre la choſe plus claire, je ſuppoſerai chaque partie AC, CD, & BD, préciſément le tiers de la corde entiere AB. Enſuite, ſoit O le milieu tant de la corde que de la partie ébranlée CD, & je conçois la courbe CMD compoſée de deux parties égales & ſemblables, CM & DM. On voit bien que je ne fais ces ſuppoſitions que pour faciliter les conſtructions ſuivantes, & les rendre plus évidentes.

25. Concevons la corde diviſée en ſix parties égales aux points E, C, O, D, F, & prenant la corde entiere $AB = a$, pour exprimer le tems de $\sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ ſecondes, après chaque ſixieme partie de ce tems, la corde ſera réduite aux figures ſuivantes:

Fig. 13. I. Après le tems $= \frac{1}{6}AB$, les parties EO & FO ſeront courbées en haut, les éloignemens de l'axe n'étant que la moitié de ceux de la courbe CMD, & les parties AE & BF ſe trouveront encore en repos. L'angle en O ne doit pas choquer, puiſque l'inflexion n'y eſt qu'infiniment petite.

Fig. 14. II. Après le tems $= \frac{1}{3}AB$, ces deux courbures ſeront avancées juſques aux extrémités, & ſeront encore tournées en haut ſur les parties AC & BD, la partie du milieu CD étant droite & en repos.

III.

III. Après le tems $= \frac{1}{2}AB$, toute la corde ſe trouvera dans ſa poſition naturelle & rectiligne, mais les parties AC & BD auront un mouvement pour ſe courber en bas, celle du milieu CD demeurant encore en repos. Fig. 15.

IV. Après le tems $= \frac{2}{3}AB$, les parties AC & BD ſeront effectivement courbées en bas, celle du milieu CD étant encore droite. Fig. 16.

V. Après le tems $= \frac{3}{4}AB$, ces deux courbures ſe rapprocheront vers le milieu O, les parties AE & BF étant droites & en repos. Fig. 17.

VI. Enfin, après le tems $= AB$, toute la corde ſe trouvera dans un état ſemblable à celui du commencement, mais dans une ſituation renverſée. Fig. 18

26. Ces deux cas ne laiſſent plus aucune raiſon de douter, que les cordes ne ſoyent ſuſceptibles de mouvemens très irréguliers, qu'on ne ſauroit comparer avec les oſcillations d'un pendule, ni regarder comme un mêlange de pluſieurs vibrations ſimples & régulieres. Dans ces cas donc, le ſon doit être très impur, & quaſi varier à tout inſtant; cependant, puisque toujours après le tems $= V\frac{Mn}{2Fg}$, la corde retourne dans le même état, & que ces périodes ſont régulieres, nonobſtant les agitations irrégulieres de chaque partie de la corde; le ſon principal de la corde ſera néanmoins le même que ſi les vibrations étoient régulieres, quoiqu'on y apperçoive quelque bruit fort désagréable. Cet accident ne doit pas être regardé comme uniquement attaché aux cas que je viens de développer, mais il eſt auſſi très poſſible, lors qu'on ébranle la corde dans toute ſon étendue, ce que je me propoſe de faire encore voir, pour mettre la Théorie à l'abri de toute nouvelle objection.

Planche VII. Fig. 19.

Développement du cas où la corde a reçu au commencement la figure A *p q r s t* B (Fig. 19.)

27. Dans ce cas, je ſuppoſe l'intervalle AF deux fois plus grand que BF, & je diviſe toute la corde en ſix parties égales aux points C, D, E, F, G, pour rendre la conſtruction plus évidente. Cette figure a donc deux ventres inégaux AF & BF; ce qui eſt ſans contredit un cas qui ne ſauroit être compris dans la ſolution de M. Bernoulli. Cependant on verra que ce mouvement participe beaucoup de celui que cet illuſtre Géometre a aſſigné aux cordes à deux ventres: la différence n'étant, ſinon que le mouvement de chaque élément de la corde eſt irrégulier & tout à fait différent de celui d'un pendule. Mais, nonobſtant cette irrégularité, toute la corde retourne à un état ſemblable à celui du commencement après le tems $= \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ ſecondes, que j'exprime ici par la longueur de la corde AB: or, pendant ce tems presque toutes les parties de la corde acheveront deux vibrations, mais qui ſont d'autant plus inégales entr'elles, que les deux ventres du commencement AF, & BF, auront été inégaux entr'eux.

28. Ayant donc continué la figure initiale d'une maniere renverſée ſur les parties prolongées A*b* & B*a*, ma conſtruction fournira pour les inſtans principaux ſuivans les figures que je m'en vai rapporter:

Fig. 20. I. Après le tems AC $= \frac{1}{6}$AB, la corde aura la figure repréſentée fig. 20. où le premier ventre s'étend juſqu'en G, & la partie BG eſt réduite dans ſa ſituation naturelle rectiligne.

Fig. 21. II. Après le tems AD $= \frac{2}{6}$AB, la partie AD eſt droite, & l'autre BD a un ventre courbé en haut.

Fig. 22. III. Après le tems AE $= \frac{3}{6}$AB, les deux ventres deviennent égaux, l'un AE étant tourné en bas, & l'autre BE en haut.

IV.

IV. Après le tems $AF = \frac{1}{6} AB$, il y a un ventre AF tourné en bas, & la partie BF eſt droite. Fig. 11.

V. Après le tems $AG = \frac{5}{6} AB$, la partie AC eſt droite, & l'autre BC à un ventre tourné en bas. Fig. 24.

VI. Après le tems AB, la corde reprend la figure du commencement, mais dans une ſituation renverſée. Fig. 25.

29. Depuis le tems $= AB$ la corde reprendra dans un ordre renverſé les mêmes figures qu'elle a eues aux tems $\frac{5}{6} AB$, $\frac{4}{6} AB$ &c. & enfin après le tems $= 2 AB$ elle ſe trouvera parfaitement rétablie dans ſon état premier (fig. 19.): pendant lequel tems elle aura achevé deux vibrations entieres. Mais durant chaque vibration entiere, dont le tems eſt $= AB$, les différentes parties de la corde ſeront portées d'un mouvement tout particulier. Car le point C paſſe deux fois par l'axe, d'abord après le tems $\frac{2}{6} AB$ & enſuite après le tems $\frac{5}{6} AB$, la différence étant $= \frac{1}{2} AB$. Mais quoique ce point C demeure après le premier paſſage au deſſous de l'axe pendant le tems $= \frac{3}{6} AB$, après le ſecond paſſage il ne demeure au deſſus de l'axe que pendant le tems $\frac{2}{6} AB$. Enſuite il ſe trouvera encore au deſſous pendant le tems $\frac{3}{6} AB$, mais depuis il s'arretera au deſſus pendant le tems $\frac{4}{6} AB$: de ſorte que les intervalles de tems entre les paſſages ſucceſſifs du point C par l'axe ſont comme les nombres 3, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 4 &c. & partant ce point paroitra, pendant le tems $2 AB$, achever 4 vibrations, mais inégales entr'elles.

30. Une ſemblable irrégularité regne auſſi entre les paſſages ſucceſſifs par l'axe AB, du point G, mais les points D & F demeurent pendant des intervalles de tems égaux $= \frac{4}{6} AB$ alternativement au deſſus & au deſſous de l'axe, de ſorte que ces deux points ſemblent achever 3 vibrations pendant le tems $= 2 AB$. Pour le point du milieu E, il demeure toujours pendant un tems $= AB$ au-deſſus & d'autant au deſſous de l'axe. Donc pendant que la corde entiere rend un certain ſon prineipal, quelques uns de ſes élémens

mens ſembleront rendre un ton plus haut d'une octave, d'autres donneront un ton plus haut d'une quinte: tandis que d'autres produiſent le même ſon principal. Cependant il faut bien remarquer que, dans ce cas, l'octave produite par les points C & G eſt très impure, puisque les intervalles de tems que ces points demeurent ſucceſſivement au deſſus & au deſſous de l'axe, ſont fort inégaux entr'eux, puisque ce ne ſont que les termes $= 3$ de la ſerie 3, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 4 &c. qui s'accordent avec l'octave, tandis que les termes 2 & 4 concourent à produire la quinte & la douzieme.

31. De là on jugera aiſément, quelles irrégularités doivent ſe trouver dans le mouvement des cordes, lorsque la figure initiale aura pluſieurs ventres inégaux entr'eux: leſquelles n'empêcheront pas pourtant, que le mouvement dans ſa totalité ne ſoit très régulier: on comprendra auſſi que pluſieurs tels mouvemens peuvent être réunis enſemble dans la même corde, & cela de la même maniere que M. Bernoulli a fait voir, que pluſieurs mouvemens réguliers s'y peuvent trouver à la fois. D'où il faut conclure, que la ſolution de M. Bernoulli ne renferme que les mouvemens réguliers, qui peuvent avoir lieu dans les cordes vibrantes: & on ne ſauroit plus douter que les cordes ne ſoient ſuſceptibles d'une infinité d'autres mouvemens irréguliers, que ma méthode découvre tous ſans aucune difficulté. Cette même concluſion regarde auſſi M. d'Alembert, entant qu'il prétend que l'Analyſe ne s'étend qu'à la détermination des mouvemens réguliers, quoiqu'il n'en nie pas l'exiſtence.

32. Mais cette même circonſtance, qu'on a trouvé moyen d'appliquer l'Analyſe à des cas, qui en ont paru entierement exclus, ſemble mériter l'attention de tous les Géometres. Jusqu'ici on n'a pas cru que l'Analyſe fut applicable à des lignes courbes mécaniques, qui ne ſauroient être renfermées dans aucune équation, ou qui ſont deſtituées de toute loi de continuité. Cela eſt bien vrai à l'égard de cette partie de l'Analyſe qui ne s'occupe qu'à des fonctions d'une ſeule quantité variable, à laquelle on s'eſt presque unique-

quement appliqué jusqu'ici : mais dès qu'on traite des fonctions de deux ou plusieurs variables, comme dans le cas des cordes vibrante, l'appliquée y doit être considérée comme une fonction non seulement de l'abscisse x, mais aussi du tems t; cette partie de l'Analyse est très essentiellement différente de la précédente, & s'étend même à des fonctions destituées de toute loi de continuité. Cette partie, dont nous ne connoissons presque encore que les premiers élémens, mérite sans doute que tous les Géometres réunissent leurs forces pour la cultiver.

DÉMONSTRATION RIGOUREUSE
DE MA CONSTRUCTION OU PROBLEME DES CORDES VIBRANTES.

33. D'abord, j'envisage le probleme des cordes vibrantes sous ce point de vue, *que la figure qu'on a imprimée au commencement à la corde, étant donnée, il faut déterminer le mouvement que recevra la corde après avoir été relâchée subitement:* où l'on suppose, que la figure initiale ne s'écarte qu'infiniment peu de son état naturel & rectiligne. Avec cette restriction, je regarde la figure initiale comme une courbe quelconque, sans me mettre en peine, si elle peut être exprimée par quelque équation, ou si elle est décrite d'une maniere irréguliere quelconque. Dans l'un & l'autre cas, il est également certain que, dès que la corde sera relâchée, elle sera aussi mise en mouvement ; & la recherche de ce mouvement doit être regardée sans doute comme un probleme très réel, qui mérite à tous égards l'attention des Géometres. Si l'Analyse est suffisante à le résoudre ou non ? c'est une question tout à fait étrangere ; & si la solution est impossible en général, l'impossibilité ne se manifestera que trop tôt dans les recherches qu'on doit entreprendre pour arriver à la solution.

34. Soit donc la longueur de la corde $AB = a$, que je suppose par tout également épaisse, son poids $= M$, & la force Fig. 26.

dont elle eſt tendue $= F$. Cela poſé ſoit AMB la figure, qu'on a dabord imprimée à la corde, & qu'après un tems quelconque de t ſeconde elle ait été réduite à la figure AYB, qui comme l'initiale doit néceſſairement paſſer par les deux termes A & B, où la corde eſt fixée. Donc, poſant pour cette courbe AYB une abſciſſe quelconque $AX = x$, & l'appliquée $XY = y$, il eſt evident que y ſera une certaine fonction tant de l'abſciſſe $AX = x$ que du tems t, de ſorte que l'appliquée y doit être conſidérée & traitée comme une fonction des deux variables x & t, d'où l'on comprend ce que ſignifient ces formules différentielles $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ & $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$.

Il eſt bon de remarquer ici, que la formule $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ exprime la viteſſe dont le point Y s'éloigne de l'axe, & que cette viteſſe eſt déterminée par l'eſpace qui en ſeroit parcouru dans une ſeconde.

35. Pour déterminer la nature de cette fonction y, les principes de Mécanique fourniſſent cette équation différentielle du ſecond degré $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fag}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, où g marque la hauteur d'où un corps peſant tombe dans une ſeconde. Je ne m'arrête point à démontrer cette formule, puisqu'elle eſt reconnue juſte de tous ceux qui ont traité cette matiere, ſans aucune conteſtation. Auſſi l'intégration ne ſauroit être révoquée en doute, d'autant plus que M. d'Alembert lui-même en eſt le premieur Inventeur. Or, poſant pour abréger $\frac{2Fag}{M} = cc$, l'intégrale complete de cette équation eſt $y = \Gamma:(x + ct) + \Delta:(x - ct)$ où les caracteres Γ & Δ marquent des fonctions quelconques des quantités $x + ct$ & $x - ct$. Cette double univerſalité eſt introduite par la double intégration qui y a conduit. Car, dans ces ſortes d'intégrations, telles fonctions indéterminées tiennent lieu des conſtan-

conſtantes arbitraires, que les intégrations ordinaires renferment. Ce qui diſtingue eſſentiellement l'intégration des fonctions à deux variables de celles qui n'en renferment qu'une ſeule.

36. On ne ſauroit ſe former une plus juſte idée d'une telle fonction générale qu'en concevant une courbe quelconque, décrite ſur l'axe AB, où prenant une abſciſſe égale à $x + ct$ ou à $x - ct$, l'appliquée repréſentera la dite fonction. Ainſi on n'aura qu'à concevoir deux telles lignes courbes, l'une pour repréſenter la fonction marquée par le caractère Γ, & l'autre pour celle du caractère Δ; j'employerai ces mêmes caractères pour déſigner ces deux courbes. Ayant donc décrit deux telles lignes courbes Γ & Δ ſur l'axe AB, qu'on prenne dans la premiere Γ l'appliquée qui répond à l'abſciſſe $x + ct$, & dans l'autre Δ l'appliquée qui repond à l'abſciſſe $x - ct$: alors la ſomme de ces deux appliquées fournira une telle valeur pour y, qui convient infailliblement à l'équation différentielle $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$: d'où l'on voit que cette ſolution eſt infiniment générale, puiſqu'on peut tirer les deux courbes Γ & Δ à volonté. Je remarque ſeulement que, puiſque la valeur de y doit être extrémement petite, on n'a qu'à multiplier la ſomme des deux dites appliquées par une fraction très petite, vu qu'il eſt clair que, ſi à l'équation différentielle ſatisfait une valeur $y = u$, il ſatisfera auſſi la valeur $y = \frac{u}{1000}$, & en général $y = mu$, de ſorte qu'on peut faire le coëfficient m auſſi petit qu'on voudra.

37. Maintenant il ne s'agit que déterminer les deux courbes Γ & Δ, qui jusqu'ici ont été arbitraires, en ſorte qu'elles conviennent aux conditions que notre probleme renferme. Il en eſt ici de même que de tous les problemes dont la ſolution ſe trouve par des intégrations, où les conſtantes arbitraires que chaque intégration introduit dans le calcul, doivent toujours être déterminées par

par les conditions du probleme. Or, dans notre cas, la principale condition eſt, qu'au commencement, ou poſant $t = o$, la figure de la corde provienne préciſément la même que celle qui eſt preſcrite AMB. Poſons donc le tems $t = o$, & la valeur de y, qui ſera $y = \Gamma: x + \Delta: x$, doit devenir égale à l'appliquée XM de la courbe donnée: ou bien les deux courbes Γ & Δ doivent être telles, que la ſomme de leurs appliquées, qui répondent à la même abſciſſe $AX = x$ devienne $= XM$. Conſidérant donc l'une des deux courbes Γ & Δ comme donnée, l'autre ſera déterminée par cette condition: il faut donc chercher encore une autre condition renfermée dans le probleme, pour déterminer entierement toutes les deux courbes Γ & Δ.

38. Cette autre condition eſt contenue dans la maniere dont la corde eſt relâchée de ſon état initial forcé, puiſque nous ſuppoſons que dans cet inſtant la corde n'a encore aucun mouvement. De là, prenant le tems $t = o$, il faut que la viteſſe de chaque point de la corde évanouiſſe. Or, en général après le tems t, la viteſſe du point Y eſt $= \left(\frac{dy}{dt}\right)$, ou bien $= c\Gamma': (x+ct) - c\Delta': (x-ct)$, où Γ' & Δ' marquent les fonctions différentielles, en ſorte que ſi nous poſions $\Gamma: u = v$, nous aurions $\Gamma': u = \frac{dv}{du}$; ainſi Γ' & Δ' ſeront repréſentés par des courbes, dont les appliquées ſont les tangentes des angles dont les élémens des courbes Γ & Δ ſont inclinés à l'axe AB. Poſons maintenant le tems $t = o$, & la formule $c\Gamma': x - c\Delta': x$ exprimera la viteſſe du point M de la corde au commencement, laquelle devant être $= o$, nous aurons $\Gamma': x = \Delta': x$. Donc, puiſque ces deux fonctions différentielles ſont égales entr'elles, les intégrales $\Gamma: x$ & $\Delta: x$ le ſeront auſſi, vu qu'elles ne différeront que d'une quantité conſtante, ce qui revient au même que ſi nous poſions $\Gamma: x = \Delta: x$.

39.

39. Donc, puisque la premiere condition exige qu'il ſoit $\Gamma: x + \Delta: x = XM$, & la ſeconde $\Gamma: x = \Delta: x$, toutes les deux courbes arbitraires ſe trouvent maintenant déterminées par l'état initial, & on aura $\Gamma: x = \Delta: x = \frac{1}{2}XM$. Ces deux courbes ſeront donc égales entr'elles, & leurs appliquées partout égales à la moitié des appliquées XM de la figure initiale, de ſorte que cette figure nous fournit l'une & l'autre des courbes Γ & Δ. Ou bien la figure initiale elle-même AMB pourra ſervir à repréſenter les deux courbes Γ & Δ, pourvu que nous établiſſions notre équation ſous cette forme:

$$XY = y = \tfrac{1}{2}\Gamma:(x+ct) + \tfrac{1}{2}\Gamma:(x-ct) \text{ à cauſe de } \Delta = \Gamma,$$

où les formules $\Gamma:(x+ct)$ & $\Gamma:(x-ct)$ marquent dans la courbe initiale AMB les appliquées qui répondent aux abſciſſes $x+ct$ & $x-ct$. De là on connoitra auſſi aiſément la viteſſe du point Y, tendante à l'éloigner de l'axe par cette équation

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{c}{2}\,\Gamma':(x+ct) - \frac{c}{2}\,\Gamma':(x-ct).$$

40. Pour trouver donc, après un tems quelconque de t ſecondes, l'état de la corde, ou bien la poſition de chacun de ſes points, qui dans l'état naturel ſe trouvoit en X, on prendra ſur l'axe de part & d'autre de ce point X les intervalles $XT = Xt = ct$, pour avoir les abſciſſes $AT = x + ct$, & $At = x - ct$. Aux points T & t, on tirera les appliquées TV & tv à la courbe initiale de la corde AMB, & la moitié de la ſomme de ces deux appliquées donnera l'appliquée cherchée XY, pour la figure que la corde aura à préſent. Mais ici on rencontre une grande difficulté, lorsque l'un ou l'autre des points T & t, ou tous les deux, tombent au delà des points A & B, ſur l'axe où la corde eſt fixée: on voit bien que, pour cet effet, il faut continuer de part & d'autre la courbe initiale AMB; & comme toutes les objections qu'on a faites à ma conſtruction, roulent ſur la maniere de cette continuation, je tâcherai

de la mettre entierement hors de doute, en l'établiſſant de la maniere ſuivante.

41. Si la longueur de la corde AB étoit infinie, cette difficulté évanouiroit; concevons donc la corde continuée à l'infini des deux côtés, & tendue par la même force F; & nous aurons à examiner cette queſtion, s'il ne ſeroit pas poſſible de donner à cette corde infinie une telle figure initiale, que la partie AB en reçoive le même mouvement dont elle eſt agitée actuellement? Car, ſi cela eſt poſſible, nous n'aurons qu'à prolonger dans la penſée la corde AB à l'infini, & lui ſuppoſer ladite figure initiale par toute ſa longueur; d'où il ſera aiſé enſuite de déterminer le mouvement de la partie AB pendant toute ſa durée. Je me flatte que cette fiction, dont on fait très ſouvent de ſemblables presque dans toutes les recherches, ne trouvera aucune contradiction; auſſi ne décidé-je pas encore ſi cette nouvelle queſtion eſt poſſible ou non? Mais, ſi elle eſt poſſible, perſonne ne ſauroit plus nier que cette conſidération ne nous conduiſe à la connoiſſance du véritable mouvement dont notre corde AB ſera agitée.

42. Or la corde AB n'eſt terminée aux points A & B, qu'entant que ces points demeurent immobiles pendant tout le mouvement; donc, quand même la corde ſeroit étendue au delà des termes A & B, mais que ſon mouvement ſeroit tel, que les points A & B demeuraſſent toujours en repos, la partie AB auroit ſans doute le même mouvement que ſi la corde AB étoit fixée aux points A & B, & que les parties prolongées en fuſſent entierement retranchées, pourvu que la même tenſion y ſoit conſtamment obſervée. Maintenant, après avoir établi ce principe inconteſtable, il eſt évident que, ſi la corde AB étoit ſeulement prolongée en *a* & *b*, de ſorte que $Ab = Ba = AB$, & qu'on eût donné aux parties prolongées Ab & Ba, les figures renverſées de celle de AMB, comme j'ai expliqué ci-deſſus; les points A & B demeureroient en repos, du moins tant que les points T & *t* ne paſſent point au delà des termes *a* & *b*: & il eſt bien certain que le mouvement de AB ſera pré-

Planche V. Fig. 4.

préciſément le même que ſi les parties Ab & Ba étoient retranchées.

43. On ne ſauroit donc plus avoir le moindre doute, que par la nature même de la queſtion la courbe AMB ne doive être continuée au moins par les intervalles Ab & Ba, ſelon la loi que j'ai établie ci-deſſus; & les raiſons que j'ai alléguées pour ces deux intervalles, ont également lieu pour tous les autres qu'on y voudra ajouter au delà à l'infini. Ainſi, quand même la courbe AMB ſeroit réguliere & auroit ſa continuation naturelle, comme ſi c'étoit, par exemple, un arc de cercle, cette continuation naturelle n'entreroit ici pour rien en compte, & il faudroit toujours ſur les lignes Ab & Ba décrire de ſemblables arcs de cercle. Quelque choquant que cela puiſſe paroître à quelques Géometres, j'eſpere qu'on ne trouvera plus rien à reprocher à ma conſtruction, à laquelle on ne ſauroit plus refuſer la plus grande généralité, puiſqu'elle s'étend également à toutes les figures poſſibles, dont la corde AB eſt ſuſceptible au commencement. En effet, qui pourroit nier qu'il ne fût poſſible de donner d'abord à la corde la figure AMCB, compoſée par exemple d'un arc de cercle AMC, & d'une ligne droite CB, quoique l'une de ces deux parties ne ſoit certainement pas la continuation naturelle de l'autre. Planche VI. Fig. 6.

44. Mais, quoique cette conſtruction ſoit tirée de l'équation intégrale $y = \Gamma:(x+ct) + \Delta:(x-ct)$ qui renferme la ſolution du probleme, M. d'Alembert ſemble nier qu'elle ſatisfaſſe à l'équation différentielle du ſecond degré $\left(\frac{ddy}{dt}\right) = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, que la Théorie fournit immédiatement. Il allegue quelques difficultés, auxquelles il faut encore répondre. Or d'abord, comment peut-on douter de la bonté d'une conſtruction, lorſqu'elle eſt parfaitement d'accord avec l'équation intégrale, qui contient la ſolution du probleme, & cela, ſous le prétexte qu'elle ne convient pas parfaitement à l'équation différentielle, d'où l'intégrale eſt tirée. On a déjà réſolu tant

de problemes par le moyen des intégrations, & perſonne ne s'eſt encore aviſé de révoquer la ſolution en doute; d'autant plus que c'eſt toujours des équations intégrales, qui fourniſſent les conſtructions, & tant qu'on n'y peut pas parvenir, on ne ſauroit ſe vanter d'une ſolution parfaite.

45. Mais voyons quels ſont les inconveniens qu'on rencontre en remontant de notre conſtruction aux formules différentielles du premier & ſecond degré. Soit donc AMB la figure initiale donnée à la corde AB, à laquelle on ait conſtruit ſur la prolongation Ba = AB la figure ſemblable amB dans une ſituation renverſée: de ſorte qu'après le tems t en prenant des intervalles PT = Pt = ct, le point P pris à la diſtance AP = x ſe trouve éloigné de l'axe au deſſus de l'intervalle $y = \frac{1}{2}\Gamma:(x+ct) + \frac{1}{2}\Gamma:(x-ct) = \frac{1}{2}(-tv + TV)$, à cauſe de TV = Γ: AT & $-tv = \Gamma At$, puiſqu'on a en général PM = Γ: AP = $\Gamma:x$. Maintenant, qu'on conſtruiſe la courbe A′ M′ B′ m' a', en ſorte que ſon appliquée ſoit — PM′ = $\frac{d.PM}{d.AP} = \frac{d.\Gamma:x}{dx} = \Gamma':x$, ce qu'on fera en prenant une certaine ligne pour unité. Donc, puiſque

Planche VII. Fig. 27.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \tfrac{1}{2}\Gamma':(x+ct) + \tfrac{1}{2}\Gamma':(x-ct)$$

$$\& \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{c}{2}\Gamma':(x+ct) - \frac{c}{2}\Gamma':(x-ct)$$

on aura par cette nouvelle courbe:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \tfrac{1}{2}(-tv' + TV') \quad \& \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{c}{2}(-tv' - TV')$$

dont la derniere formule $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ exprime la viteſſe du point P de la corde dirigée en haut après le tems t. Au reſte, il eſt évident que

les

les appliquées de ces courbes, qui tombent dans la figure au deſſous de l'axe, doivent être priſes négatives.

46. Cette ligne $A' M' B' m' a'$ eſt bien tirée dans la figure d'un trait continu; mais on objecte que ſi la courbe A M B n'étoit pas continue, & qu'elle eût des angles, il en réſulteroit des interruptions dans la ligne $A' M' B' m' a'$. Mais comme la premiere condition de notre probleme exige, que non ſeulement toutes les appliquées de la courbe A M B, mais auſſi les angles dont tous ſes élémens ſont inclinés à l'axe, ſoient infiniment petits, de tels angles qu'on veut ſuppoſer dans la figure A M B, ſont déjà exclus, n'étant au plus qu'infiniment petits. Mais, quand même il y auroit quelque interruption dans cette ſeconde ligne, elle n'affecteroit qu'un élément, & partant ne troubleroit pas la ſolution. En tout cas, on n'auroit qu'à emouſſer infiniment peu les angulosités dans la figure A M B, pour faire évanouir cet inconvénient, & par cela même, qu'on n'auroit changé qu'infiniment peu ſa figure A M B, toutes les concluſions qu'on en tire, demeureront toujours les mêmes. De telles objections ſont entierement ſemblables à celles qu'on a d'abord faites contre le calcul des infiniment petits.

47. Or ces inconvéniens deviendront encore beaucoup plus conſidérables quand on remonte aux différentiels du ſecond degré, où il faut décrire une nouvelle ligne $A'' M'' B'' m'' a''$ de la précédente $A' M' B' m' a'$, de la même maniere que celle-ci a été formée de la figure A M B $m a$. Car, puisque la ligne $A' M' B' m' a'$ peut avoir en B' un angle plus conſidérable, on obtiendra deux lieux pour le point B'', l'un au deſſous & l'autre au-deſſus de l'axe, ce qui ſemble rendre incertaines les formules différentielles du ſecond degré qui renferment les accélérations inſtantanées. En effet, pour le point de la corde P, après le tems t, on aura par cette troiſieme ligne:

$$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \tfrac{1}{2}\Gamma'':(x+ct) + \tfrac{1}{2}\Gamma'':(x-ct) = \tfrac{1}{2}(tv''-TV''),$$

$$\& \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{cc}{2}\Gamma'':(x+ct) + \frac{cc}{2}\Gamma'':(x-ct) = \frac{cc}{2}(tv''-TV'').$$

Donc, ſi le point t tomboit en B, on ſeroit incertain, ſi pour tv'', on devroit prendre l'appliquée poſitive ou négative BB''. Mais, quoiqu'on y commette quelque erreur, cette erreur n'affectera qu'un ſeul élément, & ſera par conſéquent ſans aucune conſéquence, étant toujours infiniment petite.

48. D'ailleurs, nonobſtant cette incertitude, on aura toujours ouvertement $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, ce qui étant l'équation principale, à laquelle la Théorie conduit immédiatement, il eſt évident que notre conſtruction lui ſatisfait auſſi bien qu'à l'équation intégrale qui en a été conduite. Et après tout cela, on n'a qu'à émouſſer infiniment peu l'angle B' dans la ſeconde ligne, pour réunir les deux points B'' & B'' en B, & faire évanouir par ce moyen toutes les difficultés. Le changement qui en réjaillira ſur la premiere courbe AMBmn, ne ſera auſſi qu'infiniment petit, & partant ne changera rien dans l'état initial de la corde, d'où la détermination du mouvement a été tirée. Toutes ces objections ſont donc préciſément de la même nature, que celles qu'on a faites autrefois contre le calcul différentiel, en lui reprochant que dans certains élémens quelques particules n'évanouiſſent point, qu'on néglige néanmoins à l'égard des autres quantités. Comme aujourd'hui ces doutes ſont entierement diſſipés, ceux qu'on fait contre cette détermination du mouvement des cordes, tomberont auſſi d'eux-mêmes.

ÉCLAIR-

Fig. 1.

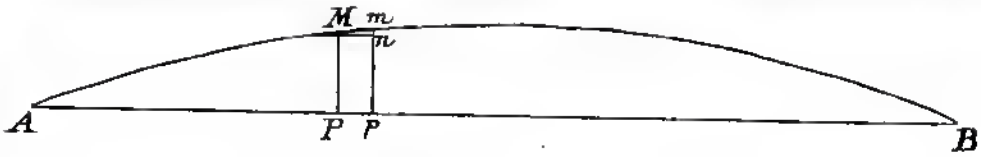


Fig. 2.

Fig. 3.

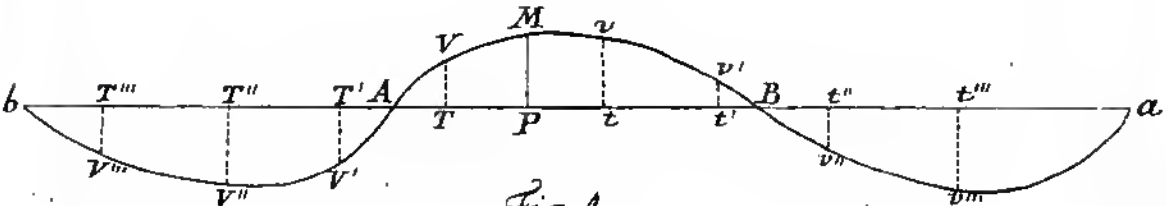
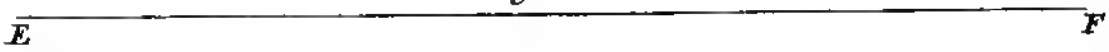


Fig. 4.



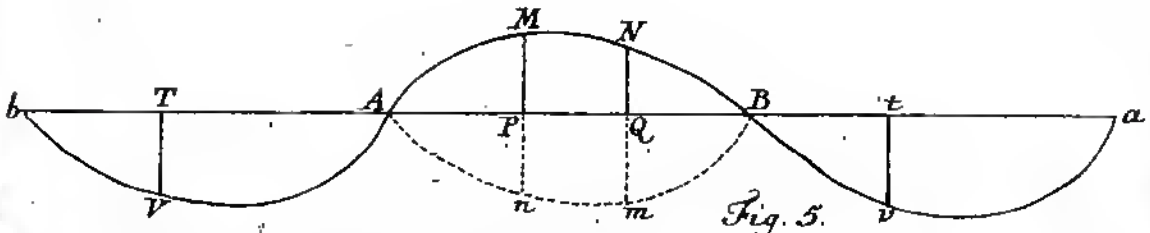


Fig. 5.

Mem. de l'acad. Tome XXI. 1765 Pl. V. pag. 334.

Fig. 6.

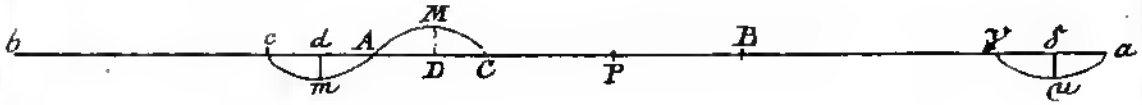


Fig. 7. aprés le tems AD

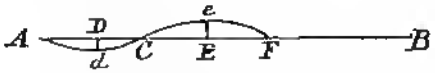
Fig. 8.  aprés le tems 2 AD = AC

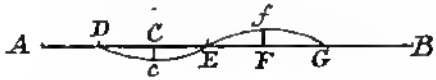
Fig. 9.  aprés le tems 3 AD

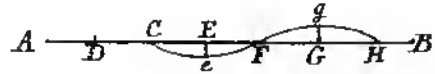
Fig. 10.  aprés le tems $\frac{4}{3}$ AD = 2 AC

Fig. 11. aprés le tems AB

Fig. 12.

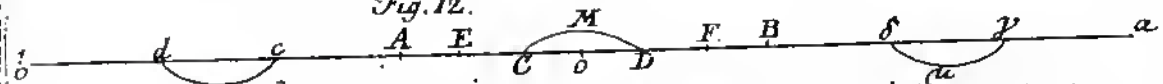


Fig. 13. aprés le tems CO = $\frac{1}{6}$ AB

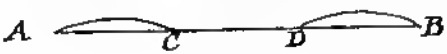
Fig. 14.  aprés le tems CD = $\frac{1}{3}$ AB

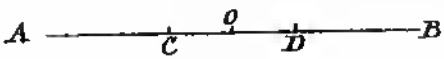
Fig. 15.  aprés le tems AO = $\frac{1}{2}$ AB

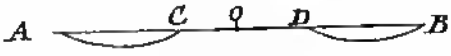
Fig. 16.  aprés le tems AD = $\frac{2}{3}$ AB

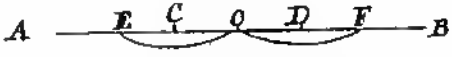
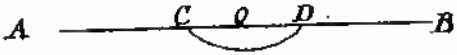
Fig. 17.  aprés le tems = $\frac{5}{6}$ AB

Fig. 18.  aprés le tems = AB

Mem. de l'Acad. Tome XXI. 1765 Pl. VI. pag. 334.

Fig. 19

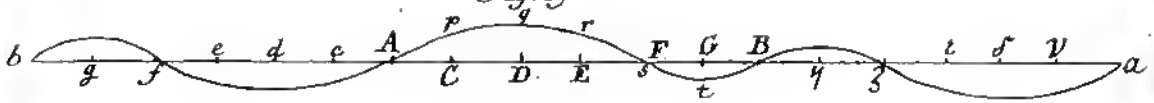


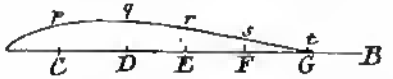
Fig. 20.  Après le tems AC

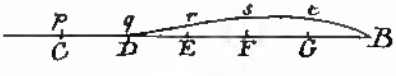
Fig. 21.  Après le tems AD

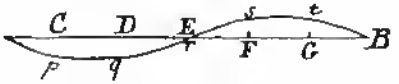
Fig. 22.  Après le tems AE

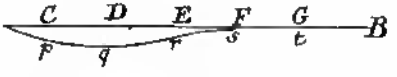
Fig. 23.  Après le tems AF

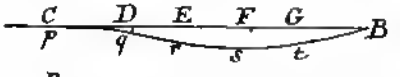
Fig. 24.  Après le tems AG

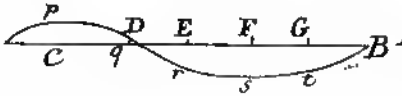
Fig. 25.  Après le tems AB

Fig. 26.

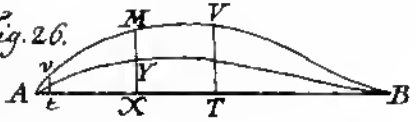
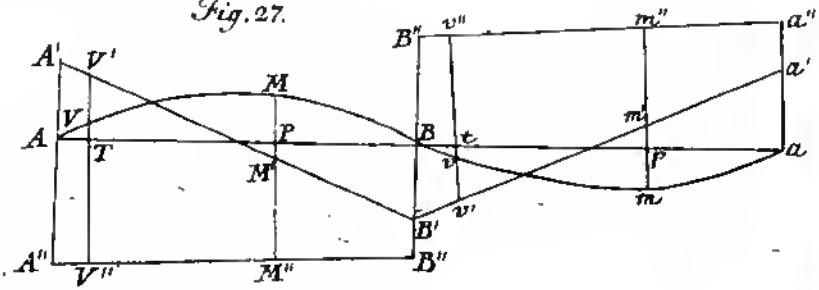


Fig. 27.



Mem. de l'Acad. Tome XXI. 1765. Pl. VII. pag. 334.

ÉCLAIRCISSEMENS PLUS DÉTAILLÉS SUR LA GÉNÉRATION ET LA PROPAGATION DU SON, ET SUR LA FORMATION DE L'ECHO,

PAR M. EULER.

1.

La plus ſublime recherche que les Géometres ayent entrepriſe de nos jours avec ſuccès, eſt ſans contredit à tous égards celle de la propagation du ſon. Comme il y eſt queſtion d'une certaine agitation de l'air, cette recherche a été d'autant plus difficile, que parmi toutes celles qu'on a faites ſur le mouvement de différens corps, il ne s'en trouve pas une ſeule, où l'on ait réuſſi à ſoumettre au calcul le mouvement de l'air: de ſorte que cette partie de la Mécanique a été jusqu'ici entierement inconnue. Car on n'y ſauroit rapporter le peu de choſe qu'on a fait ſur le mouvement des corps pouſſés par la force d'un air comprimé; puiſqu'on n'y a conſidéré que la ſeule force de l'air, ſans examiner le mouvement dont les différentes particules de l'air ſont agitées entr'elles. Ainſi on ne ſavoit encore abſolument rien des différens mouvemens dont une maſſe d'air eſt ſuſceptible.

2. Outre cette difficulté, on en a rencontré encore une autre auſſi grande de la part de l'Analyſe: quelque perfectionnée que paroiſſe déjà cette ſcience par les ſoins des plus grands Géometres, elle n'étoit pas encore ſuffiſante pour entreprendre cette recherche; il falloit quaſi ouvrir une carriere tout à fait nouvelle, où il s'agit d'étendre l'Analyſe à des fonctions de deux ou pluſieurs variables, pendant que presque toutes les découvertes des Géometres ont été bornées à des fonctions d'une ſeule variable. Il falloit donc s'appliquer à une branche tout à fait

fait nouvelle de l'Analyſe des infinis, dont même les premiers élémens n'étoient presque pas encore développés. De là on ne ſera pas ſurpris ſi cette nouvelle Analyſe rencontre de grandes contradictions, même de la part des plus grands Géometres; quand on ſe rappelle à combien de contradictions le calcul différentiel a été expoſé dans ſa premiere naiſſance.

3. Quoique j'aye déjà traité ce ſujet en quelques Mémoires après le célebre M. de la Grange, à qui on eſt redevable de cette importante découverte, tant la nouveauté que l'importance mérite bien toute l'attention, & des recherches ultérieures ne manqueront pas de nous fournir encore de plus grands éclairciſſemens. Lorsque je traitai cette matiere pour la premiere fois, je me ſuis attaché principalement à déterminer la viteſſe dont un tremouſſement eſt tranſmis par l'air; mais à préſent je tacherai de développer toutes les particularités qui peuvent avoir lieu dans les agitations de l'air, & la maniere dont elles ſont altérées dans leur propagation. Cette recherche eſt d'autant plus intéreſſante, que c'eſt de là que réſultent toutes les variétés que nous obſervons dans les ſons. Mais, ayant déjà fait voir que la propagation ſe fait à peu près de la même maniere dans le plein air que dans un tuyau, je bornerai mes recherches préſentes à des tuyaux, & même également larges par toute leur étendue: il n'importe presque rien ſi ces tuyaux ſont droits ou courbés d'une maniere quelconque, puisque les phénomenes du ſon n'en ſouffrent aucun changement.

Pl. VIII. Fig. 1. 4. Soit donc AB un tuyau de la même largeur $= ff$ par toute ſa longueur, que la figure repréſente droit, quoiqu'il puiſſe avoir une figure courbée quelconque; je regarde auſſi encore ſa longueur indéterminée, puisque ce n'eſt qu'après toutes les intégrations, qu'on tiendra compte des bouts du tuyau, ſoit qu'ils ſoyent ouverts ou fermés. Je ſuppoſe donc que l'équilibre de l'air contenu dans ce tuyau ait été troublé d'une maniere quelconque, ou par toute ſa longueur, ou ſeulement dans une partie. Que B exprime la denſité naturelle

turelle de l'air, mais qu'au point S posant la distance AS $=$ S prise du point fixe A, la densité de l'air ait été reduite à Q, & qu'on ait imprimé à cette particule d'air en S un mouvement vers B avec la viteſſe $=$ V, de ſorte que les deux quantités Q & V expriment le dérangement, dont l'équilibre de l'air dans le tuyau a été troublé au commencement. Si quelque part on avoit laiſſé l'air dans ſon état naturel, on n'auroit qu'à y mettre $Q = B$ & $V = o$. C'eſt ainſi que je repréſente l'état initial de l'air contenu dans le tuyau.

5. Maintenant après un tems écoulé de t ſecondes la couche de l'air, qui au commencement a rempli l'élément $S\Sigma = dS$, ſoit parvenue en $s\zeta$, & nommons l'eſpace $As = s$, dont l'élément $s\zeta = ds$: que la denſité de l'air y ſoit à préſent $= q$, & la viteſſe vers B. $= v$, en exprimant chaque viteſſe par l'eſpace qui en ſeroit parcouru dans une ſeconde, de ſorte que tout revient à déterminer ces trois quantités s, q, & v, auxquelles ont été reduites après le tems t les trois quantités S, Q & V de l'état initial. Or à l'égard de celles-ci il eſt bon de remarquer, que puisque l'état initial doit être regardé comme donné les lettres Q & V ſont de certaines fonctions de l'eſpace AS $=$ S, mais les quantités s, q & v puisqu'elles dépendent non ſeulement de l'état initial, mais auſſi du tems t, ſont effectivement des fonctions de deux variables S & t: & partant leur détermination apartient à cette nouvelle partie de l'Analyſe, qui traite des fonctions de deux variables, & qui eſt fondée ſur des principes, qui lui ſont particuliers.

6. Donc puisque s eſt une fonction de S & t, en augmentant tant S que t de leurs différentiels dS & dt, la valeur de s deviendra $= s + dS\left(\frac{ds}{dS}\right) + dt\left(\frac{ds}{dt}\right)$, où il faut remarquer que la partie $dS\left(\frac{ds}{dS}\right)$ exprime proprement l'élément $s\zeta$, dont le point Σ ſera plus avancé que le point S après le tems t. Mais

l'autre partie $dt\left(\frac{ds}{dt}\right)$ exprime l'eſpace par lequel le point s avancera pendant l'élément du tems ſuivant dt: lequel étant diviſé par dt donnera par conſéquent la viteſſe de l'air en s après le tems t, de ſorte que nous en tirons $v = \left(\frac{ds}{dt}\right)$. Enſuite l'élément de la maſſe d'air, qui occupoit au commencement l'eſpace $S\Sigma = dS$ avec la denſité Q, la largeur du tuyau étant $= ff$, eſt exprimé par la formule $ffQdS$. Or cette même maſſe occupant après le tems t l'eſpace $s\zeta = dS\left(\frac{ds}{dS}\right)$ avec la denſité q la largeur demeurant la même $= ff$, ſera exprimée par la formule $ffqdS\left(\frac{ds}{dS}\right)$, d'où nous tirons cette égalité $Q = q\left(\frac{ds}{dS}\right)$: de ſorte qu'ayant trouvé la nature de la fonction s, nous en connoiſſons d'abord tant la viteſſe $v = \left(\frac{ds}{dt}\right)$ qui ſe trouve en s après le tems t, que ſa denſité $q = Q:\left(\frac{ds}{dS}\right)$. Or cet air en s eſt le même, qui au commencement a été en S.

7. La viteſſe de l'air en s après le tems t étant $v = \left(\frac{ds}{dt}\right)$, l'incrément de cette viteſſe pendant l'élément du tems ſuivant dt, ſera $= dt\left(\frac{dv}{dt}\right) = dt.\left(\frac{dds}{dt^2}\right)$, lequel étant diviſé par dt donne l'accélération $= \left(\frac{dds}{dt^2}\right)$, qui doit être la même, que celle qui eſt produite par les forces, qui agiſſent ſur l'élément de l'air en $s\zeta$, or ces for-

forces ne réſultent que de la preſſion de l'air, dont il agit en vertu de ſon élaſticité tant en s qu'en ζ. Soit donc la preſſion en s égale au poids d'une colonne de mercure, dont la hauteur $= p$, laquelle dependant de la denſité de l'air en s doit auſſi être conſidérée comme une fonction des deux variables S & t; d'où nous concluons pour le même tems la preſſion en ζ égale à la hauteur $= p + dS\left(\frac{dp}{dS}\right)$. Donc l'élément d'air en $s\zeta$, dont la maſſe eſt $= ffQdS$ eſt repouſſé vers A par le poids d'une colonne de mercure, dont la hauteur $= dS\left(\frac{dp}{dS}\right)$, & qui agit ſur la baſe $= ff$. Que l'unité exprime la denſité du mercure, & le poids ou la maſſe de cette colonne érant $= ffdS\left(\frac{dp}{dS}\right)$, la force accélératrice ſera $= -\frac{1}{Q}\left(\frac{dp}{dS}\right)$.

8. Or poſant la hauteur $= g$, d'où les corps peſans tombent dans une ſeconde, qui eſt comme on ſait de 15, 625 pieds de Rhin, les principes de Mécanique fourniſſent cette équation: $\left(\frac{ddS}{dt^2}\right) = -\frac{2g}{Q}\left(\frac{dp}{dS}\right)$, ou $\left(\frac{dp}{dS}\right) + \frac{Q}{2g}\left(\frac{ddS}{dt^2}\right) = 0$, où il faut obſerver que Q marque une fraction, qui eſt à l'unité, comme la denſité de l'air en S à la denſité du mercure, ou bien en raiſon de leur gravités ſpecifiques. Ou ayant déjà trouvé $Q = q\left(\frac{dS}{dS}\right)$ nous aurons $\left(\frac{dp}{dS}\right) + \frac{q}{2g}\left(\frac{dS}{dS}\right)\left(\frac{ddS}{dt^2}\right)$. Maintenant puiſque la preſſion p eſt proportionelle à la denſité q, ſuppoſons qu'à une denſité connue $= b$ il répond la hauteur du barometre $= a$, & nous aurons $p = \frac{aq}{b}$, donc $\left(\frac{dp}{dS}\right) = \frac{a}{b}\left(\frac{dq}{dS}\right)$:

de ſorte que notre équation prend cette forme $\frac{2gg}{bQ}\left(\frac{dq}{dS}\right) + \left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0$, qui conjointement avec la précédente $Q = q\left(\frac{ds}{dS}\right)$ renferme la détermination du mouvement de l'air dans le tuyau.

9. De là nous pourrons d'abord éliminer la lettre q; car puisque Q eſt une fonction du ſeul S, nous aurons $\frac{dQ}{dS} = \left(\frac{dq}{dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right) + q\left(\frac{ddds}{dS^2}\right)$, d'où nous tirons:

$$\left(\frac{dq}{dS}\right) = \frac{dQ}{dS} : \left(\frac{ds}{dS}\right) - Q\left(\frac{ddds}{dS^2}\right) : \left(\frac{ds}{dS}\right)^2,$$

& cette valeur ſubſtituée dans l'autre équation donne

$$\frac{2agdQ}{bQdS} : \left(\frac{ds}{dS}\right) - \frac{2ag}{b}\left(\frac{ddds}{dS^2}\right) : \left(\frac{ds}{dS}\right)^2 + \left(\frac{ddds}{dt^2}\right) = 0.$$

Puisque Q eſt une fonction donnée de S, poſons pour abréger $\frac{dQ}{QdS} = P$, & $\frac{2ag}{b} = cc$, pour avoir en multipliant par $\left(\frac{ds}{dS}\right)^2$ cette équation:

$$cc\,P\left(\frac{ds}{dS}\right) - cc\left(\frac{ddds}{dS^2}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{ddds}{dt^2}\right) = 0,$$

de l'intégration de laquelle dépend la détermination du mouvement qu'on cherche: or quelques peines que je me ſuis données, je n'en ai pu trouver la nature de la fonction s, ni comment elle eſt compoſée de deux variables S & t.

10.

10. Donc quelque ſimple que paroiſſe le cas, que je me ſuis propoſé, où il ne s'agit que du mouvement de l'air contenu dans un tuyau de même largeur par toute ſon étendue; il eſt pourtant encore de beaucoup trop compliqué, pour que les bornes de l'Analyſe ſoyent ſuffiſantes à le réſoudre. La difficulté ne réſide pas dans le mouvement, que je ſuppoſe avoir été d'abord imprimé à l'air dans le tuyau, puisque la lettre V, qui en déſigne la viteſſe, n'entre pas même dans le calcul. Donc ſi l'on ſuppoſoit une certaine quantité d'air dans le tuyau réduite à une plus grande denſité, & qu'il s'y trouve un boulet, qui en ſeroit pouſſé; il faut avouer que même dans ce cas la détermination du mouvement de l'air ſurpaſſeroit encore les forces du calcul: tout ce qu'on a fait ſur ce ſujet, ſe reduit au ſeul mouvement du boulet, qu'on a déterminé en faiſant abſtraction de celui de l'air, ou bien en négligeant l'inertie de l'air: laquelle étant ſi extrémement petite à l'égard de celle du boulet, le calcul ne laiſſe pas d'être très bien d'accord avec les expériences.

11. Je ne voi qu'une ſeule condition, ſous laquelle l'équation, que je viens de trouver, puiſſe être reduite à l'intégrabilité; cette condition eſt que la formule $\left(\frac{ds}{dS}\right)$ retienne toujours presque la même valeur. Donc puisque au commencement il étoit $s = S$, & partant $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1$, cette condition aura lieu, quand les valeurs de $\left(\frac{ds}{dS}\right)$ ne différent jamais ſenſiblement de l'unité. On voit bien que cela arrivera, lorsque l'eſpace Ss, par lequel l'air en S eſt tranſporté pendant le tems t, eſt toujours extrémement petit, ou bien lorsque chaque particule de l'air contenu dans le tuyau ne change presque point de place. Or c'eſt préciſément le cas de la propagation du ſon que j'ai ici principalement en vue; mais il pourra auſſi être appliqué avec le même ſuccès à tous les autres cas, où il ne s'agit que de dé-

terminer un tremouſſament de l'air dans le tuyau; tels cas ſont premierement la génération, & enſuite la production du ſon dans les tuyaux d'orgue, que je me propoſe de développer à la premiere occaſion, où je me ſervirai des mêmes principes, que je m'en vai établir dans les articles ſuivans.

12. Puisque je ſuppoſerai donc, que la quantité s ne differe jamais que quaſi infiniment peu de S, je poſe $s = S + z$, de ſorte que z marque l'eſpace Ss, par lequel l'air qui étoit en S, ſe trouve tranſporté après le tems t. De là nous aurons $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + \left(\frac{dz}{dS}\right)$ où le terme $\left(\frac{dz}{dS}\right)$ étant infiniment petit par rapport à l'unité, peut être omis; mais cela nonobſtant la valeur $\left(\frac{d\,ds}{dS^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dS^2}\right)$ demeurera dans le calcul, puisqu'il n'y a rien, par rapport auquel on la pourroit rejetter; enfin on aura $\left(\frac{ds}{dt}\right) = v = \left(\frac{dz}{dt}\right)$, & $\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$: d'où notre équation ſe réduit à cette forme à cauſe de $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1$.

$$cc\mathrm{P} - cc\left(\frac{ddz}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 0.$$

Où je remarque que cette même équation réſulteroit ſi l'on poſoit $s = S + at + z$, quelque grande que ſoit la quantité a, pourvu que z ſoit une très petite; mais ce cas n'eſt que celui, où le tuyau entier ſeroit tranſporté uniformément ſelon la même direction, ou bien ſi l'air paſſoit par le tuyau d'un mouvement uniforme.

13.

13. Lorsque je traitai la premiere fois ce ſujet de la propagation du ſon, l'équation, à laquelle je ſuis parvenu, différoit de celle-ci en ce, que le premier terme $cc\mathrm{P}$ ne s'y trouvoit point; mais cela nonobſtant la rapidité de la propagation, que j'en ai tirée, étoit très juſte, puisque ce terme alors omis renferme la nature de l'agitation, à laquelle je n'ai fait alors aucune attention. Mais à préſent ce terme me ſervira à découvrir toutes les variétés des ſons, qui dépendent de la nature de la premiere agitation de l'air dans le tuyau; car on ſait, que les ſons, quoiqu'ils ſoyent également graves ou aigus, & auſſi également forts, admettent encore pluſieurs variations & différences, comme ſont celles des différentes voyelles, dont perſonne n'a encore entrepris d'expliquer la nature. Enſuite ce même terme $cc\mathrm{P}$ me mettra auſſi en état d'expliquer la formation du ſon dans les flutes ou tuyaux d'orgues, ce que je remets à une autre occaſion, me contentant pour le préſent d'examiner plus en détail la production & propagation du ſon.

14. D'abord je remarque que le terme $cc\mathrm{P}$ ne trouble point l'intégration de l'équation trouvée: car poſant $z = u + \mathrm{R}$ de ſorte que R ſoit une fonction de la variable S, nous aurons:

$$cc\mathrm{P} - \frac{cc\,dd\mathrm{R}}{dS^2} - cc\left(\frac{ddu}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = 0.$$

Faiſons donc $\frac{dd\mathrm{R}}{dS^2} = \mathrm{P} = \frac{d\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}dS}$, & nous aurons $\frac{d\mathrm{R}}{dS} = l\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{C}}$, & $\mathrm{R} = \int dS\, l\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{C}}$. Or pour la quantité u on aura cette équation $\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddu}{dS^2}\right)$, dont on ſait par le mouvement des cordes vibrantes, que l'intégrale complette eſt

$$u = \Gamma:(S + ct) + \Delta:(S - ct),$$

où

où Γ & Δ désignent des fonctions quelconques des quantités y jointes. Par conséquent l'intégrale complette de notre équation est

$$z = \int dS\, l\frac{Q}{C} + \Gamma:(S+ct) + \Delta:(S-ct),$$

& de là ensuite $s = S + z$.

15. Maintenant il ne reste plus que d'ajuster cette équation infiniment générale au cas dont il est question. Pour cet effet il en faut deduire les valeurs $\left(\frac{ds}{dS}\right)$ & $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ qui résultent

$$\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + \left(\frac{dz}{dS}\right) = 1 + l\frac{Q}{C} + \Gamma':(S+ct) + \Delta':(S-ct), \text{ \&}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right) = c\Gamma':(S+ct) - c\Delta':(S-ct)$$

Appliquons à présent ces formules à l'état initial en posant $t = 0$, & puisqu'alors il devient $s = S$, $\left(\frac{ds}{dt}\right) = V$, & $\left(\frac{ds}{dS}\right) = \frac{Q}{q} = 1$, à cause de $q = Q$, nous aurons:

$$0 = \int dS\, l\frac{Q}{C} + \Gamma:S + \Delta:S,$$

$$V = c\Gamma':S - c\Delta':S,$$

$$\text{\&}\quad 0 = l\frac{Q}{C} + \Gamma':S + \Delta':S.$$

Or de ces trois équations la premiere est déjà comprise dans la troisieme, & la constante C peut encore être prise à volonté. Posons donc $C = B$, ce qui est la densité naturelle de l'air dans le tuyau, & remarquons que de là il ne nait aucune restriction puisque la généralité de la lettre C est déjà comprise dans les deux fonctions générales.

16.

16. En prennant $C = B$, puisque la denſité Q ne ſauroit différer conſidérablement de la denſité naturelle, vu que nous ſuppoſons que les changemens de place de chaque particule d'air ſont toujours très petits, la fraction $\frac{Q}{B}$ ne différera presque pas de l'unité, & partant ſon logarithme ſera $l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$. De là nous déterminerons les deux fonctions différentielles:

$$\Gamma' : S = \frac{V}{2c} - \tfrac{1}{2} l\frac{Q}{B}, \quad \& \quad \Delta' : S = -\frac{V}{2c} - \tfrac{1}{2} l\frac{Q}{B}$$

& partant les fonctions Γ & Δ mêmes ſeront:

$$\Gamma : S = \frac{1}{2c}\int V\,dS - \tfrac{1}{2}\int dS\, l\frac{Q}{B},$$

$$\& \quad \Delta : S = -\frac{1}{2c}\int V\,dS - \tfrac{1}{2}\int dS\, l\frac{Q}{B}.$$

Donc, puisque l'état initial donne à connoitre pour chaque abſciſſe S les valeurs V & Q, on en tirera aiſément les fonctions $\Gamma' : S$, $\Delta' : S$; $\Gamma : S$, & $\Delta : S$, non ſeulement pour l'abſciſſe S, mais auſſi pour toute autre abſciſſe $S + ct$, ou $S - ct$, qui entrent dans nos formules qui expriment l'état de l'air après le tems t. D'où cette queſtion eſt parfaitement réſolue, quelle qu'ait été l'agitation initiale, pourvu qu'elle ſoit extrémement petite.

17. Nous voilà donc parvenus à la ſolution de ce probleme aſſez général: *L'état d'équilibre de l'air dans le tuyau* AB *ayant été troublé d'une maniere quelconque, pourvu que les dérangemens ſoyent extrémement petits, déterminer le mouvement de l'air qui en ſera chaſſé dans le tuyau.* Pour en donner la ſolution, conſidérons d'abord tout ce qui eſt donné; ce qui ſe réduit aux points ſuivans. Fig. 1.

1°. La denſité du mercure étant exprimée par 1, ſoit b celle de l'air naturel, & a la hauteur du mercure dans le barometre, d'où l'on tire l'eſpace $c = V\frac{2ag}{b}$, où g marque la hauteur de la chûte dans une ſeconde.

Fig 2. 2°. Que dans l'état initial le dérangement d'équilibre ait été tel, que l'air au point S du tuyau ait reçu la denſité $= Q$, d'où je conſtruis la courbe CQD, en poſant ſes appliquées $SQ = c\,l\frac{Q}{b} = \frac{Q-b}{b}c$, que je nommerai l'échelle des denſités.

3°. Qu'outre ce dérangement on ait imprimé à l'air en S une viteſſe ſelon la direction SB, & poſant l'eſpace qui en ſeroit parcouru dans une ſeconde $= V$, je conſtitue l'appliquée $SV = V$, d'où je conſtruis l'échelle des viteſſes EVF.

L'axe de ces deux échelles eſt la droite AB, qui repréſente en même tems le tuyau étendu en ligne droite, en cas qu'il ſoit courbé.

Solution analytique du probleme.

18. Qu'après le tems de t ſecondes écoulé depuis le commencement, la particule d'air qui étoit alors en S, ſe trouve à préſent en s, & poſons l'eſpace $Ss = z$: ſoit enſuite la denſité de cet air en $s = q$, & ſa viteſſe $= v$ dirigée vers B: & il eſt clair que toute la ſolution ſe réduit à la détermination de ces trois élémens z, q & v. Pour cet effet on n'a qu'à établir les fonctions ſuivantes pour l'abſciſſe $AS = S$.

$$\Gamma' : S = \frac{V}{2c} - \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{Q}{b}; \qquad \Delta' : S = -\frac{V}{2c} - \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{Q}{b}; \;\&$$

$$\Gamma : S = \frac{1}{2c}\int V\,dS - \tfrac{1}{2}\int dS\,l\,\frac{Q}{b}; \quad \Delta : S = -\frac{1}{2c}\int V\,dS - \tfrac{1}{2}\int dS\,l\,\frac{Q}{b};$$

&

& de là on aura

$$z = \int dS\, l \frac{Q}{b} + \Gamma : (S + ct) + \Delta : (S - ct),$$

$$\frac{Q}{q} = 1 + l\frac{Q}{b} + \Gamma' : (S + ct) + \Delta' : (S - ct),$$

$$\& \quad v = c\,\Gamma' : (S + ct) - c\,\Delta' : (S - ct).$$

Or, puisque q differe très peu de Q, on aura aſſez exactement

$$\frac{q}{b} = 1 - \Gamma' : (S + ct) - \Delta' : (S - ct).$$

Conſtruction Géometrique du Probleme.

19. Les échelles conſtruites ſur l'état initial de l'air dans le tuyau donnent d'abord pour l'abſciſſe $AS = S$ les valeurs ſuivantes:

$$l\frac{Q}{b} = \frac{1}{c}.\,SQ; \quad \text{donc } \int dS\, l\frac{Q}{b} = \frac{1}{c}.\,ACSQ,$$

$$\& \quad V = SV; \quad \text{donc } \int V\,ds = AESV,$$

d'où nous tirons

$$\Gamma' : S = \frac{1}{2c}.SV - \frac{1}{2c}.SQ; \quad \Delta' : S = -\frac{1}{2c}.SV - \frac{1}{2c}.SQ,$$

$$\Gamma : S = \frac{1}{2c}.AESV - \frac{1}{2c}.ACSQ; \quad \Delta : S = -\frac{1}{2c}.AESV - \frac{1}{2c}.ACSQ.$$

Donc, prenant pour un tems écoulé quelconque de t ſecondes les abſciſſes $AT = S + ct$, & $At = S - ct$, de ſorte que $ST = St = ct$ nous aurons ſemblablement:

$$\Gamma' : (S + ct) = \frac{1}{2c}.TN - \frac{1}{2c}.TM; \quad \Delta' : (S - ct) = -\frac{1}{2c}.tn - \frac{1}{2c}.tm,$$

$$\Gamma : (S + ct) = \frac{1}{2c}.AETN - \frac{1}{2c}.ACTM; \quad \Delta : (S - ct) = -\frac{1}{2c}.AEtn - \frac{1}{2c}.ACtm,$$

d'où il eſt à préſent aiſé de conſtruire les formules trouvées pour les trois quantités z, q, & v.

20. Or, d'abord pour la quantité z qui exprime l'eſpace Ss, dont la particule d'air, qui étoit au commencement en S ſe trouve à préſent plus avancée vers B, nous aurons:

$$z = \frac{1}{c}.\mathrm{ACSQ} + \frac{1}{2c}.\mathrm{AETN} - \frac{1}{2c}.\mathrm{ACTM} - \frac{1}{2c}.\mathrm{AE}tn - \frac{1}{2c}.\mathrm{AC}tm,$$

$$\text{ou bien } z = \frac{1}{2c}\,(tn\mathrm{TN} - \mathrm{SQTM} + \mathrm{SQ}tm),$$

où tnTN, SQTM, & SQtm, marquent des eſpaces renfermés par les deux échelles données.

Enſuite, pour la denſité q de l'air, qui ſe trouve à préſent en s, nous aurons:

$$q = b\left(1 - \frac{1}{2c}.\mathrm{TN} + \frac{1}{2c}.\mathrm{TM} + \frac{1}{2c}.tn + \frac{1}{2c}.tm\right),$$

$$\text{ou bien } q = b + \frac{b}{2c}\,(\mathrm{TM} + tm - \mathrm{TN} + tn).$$

Enfin, pour la viteſſe de cet air en s, qui eſt $= v$, & dirigée vers B, nous aurons:

$$v = \tfrac{1}{2}\mathrm{TN} - \tfrac{1}{2}\mathrm{TM} + \tfrac{1}{2}tn + \tfrac{1}{2}tm,$$

$$\text{ou bien } v = \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{TN} + tn - \mathrm{TM} + tm).$$

Cette viteſſe eſt exprimée par l'eſpace qui en ſeroit parcouru dans une ſeconde.

De la Génération & Propagation du Son.

Fig. 3. 21. Je conçois ici que notre tuyau s'étend de part & d'autre à l'infini, ayant par tout la même largeur: & qu'au commencement une petite partie d'air contenu dans l'eſpace IK ait été ebranlée d'une maniere quelconque, dont la nature ſoit exprimée par les deux

deux échelles IQK & IVK, la premiere IQK étant celle des denſités dont chaque appliquée OQ eſt $= \frac{Q - b}{b} c$, où Q marque la denſité de l'air en O, & b la denſité naturelle, pendant que c eſt un eſpace égal à $\sqrt{\frac{2ag}{b}}$, comme j'ai expliqué ci-deſſus: de ſorte qu'on en aura la denſité $Q = b\left(1 + \frac{OQ}{c}\right)$. De l'autre échelle des viteſſes IVK, chaque appliquée OV exprime la viteſſe qui a été imprimée à l'air en O ſelon la direction OB: où il eſt bon d'obſerver, que les appliquées poſitives, ou dirigées en haut, de l'échelle IQK marquent une plus grande denſité de l'air que la naturelle: & que de ſemblables appliquées de l'échelle IVK ſe rapportent à la direction OB. Tout le reſte de l'air dans le tuyau étant encore en équilibre, toutes les deux échelles ſe réuniſſent, hormis l'eſpace IK avec l'axe, & leurs appliquées évanouiſſent.

22. Maintenant, conſidérons un point quelconque S du tuyau, pour y déterminer l'état de l'air après cette agitation excitée en IK: & puisque, pour un tems quelconque de t ſecondes, il faut prendre, du point S de part & d'autre ſur l'axe, des intervalles $ST = St = ct$, & y tirer des appliquées aux deux échelles, il eſt clair qu'à moins que l'un ou l'autre des points T & t ne tombe dans l'eſpace IK, toutes les appliquées étant alors $= 0$, l'air en S ſe trouvera en repos avec ſa denſité naturelle $= b$. Premierement donc, tant que le tems écoulé t eſt plus petit que $\frac{IS}{c}$, l'air en S demeurera en équilibre: & il ne commencera à être ébranlé qu'après le tems $t = \frac{IS}{c}$. Poſons donc le tems écoulé $t = \frac{ST}{c}$ & puisque, au point t pris de l'autre côté, ne répond aucune appliquée tm ou tn, dans cet inſtant le point S ſe trouvera en s de ſorte que

l'eſpace $Ss = \frac{1}{2c}(ITN - ITM) = \frac{1}{2c}.\ MIN$; & alors la denſité de l'air en s ſera $q = b + \frac{b}{2c}(TM - TN) = b - \frac{b}{2c}.\ MN$; & ſa viteſſe dirigée vers B ſera $v = \frac{1}{2}(TN - TM) = \frac{1}{2}MN$. Or, dès que le tems écoulé t devient plus grand que $\frac{SK}{c}$, l'air en s ſe trouvera rétabli dans l'état d'équilibre, où il demeurera.

23. Ayant pris le point S quaſi derriere l'agitation produite dans l'eſpace IK, conſidérons auſſi un point S' pris de l'autre côté, & l'air dans ce lieu demeurera en équilibre jusqu'à ce qu'il s'écoule un tems plus grand que $\frac{KS'}{c}$ ſeconde. Soit donc le tems écoulé $t = \frac{S't'}{c}$, & puisqu'en prenant en avant un pareil eſpace $S'T'$, les appliquées $T'M'$ & $T'N'$ y ſont nulles; l'air qui a été en S' ſe trouvera à préſent avancé en s', de ſorte que l'eſpace

$$S's' = \frac{1}{2c}(Kt'n' + Kt'm').$$

Enſuite la denſité de l'air dans ce lieu s' ſera

$$q = b + \frac{b}{2c}(t'n' + t'm')$$

& la viteſſe dirigée vers B

$$v = \tfrac{1}{2}(t'n' + t'm').$$

D'où l'on voit que l'agitation initiale ne ſe propage point de la même maniere en avant & en arriere, & qu'une très grande différence y peut

peut avoir lieu. Et on voit même que, ſi les deux échelles IQK & IVK ſe réuniſſoient dans une ſeule courbe, la propagation vers A évanouïroit entierement, & l'air y reſteroit toujours en équilibre.

24. Mais, nonobſtant cette différence, la viteſſe de la propagation eſt la même vers A & vers B, & par un eſpace $= x$ l'agitation eſt toujours transmiſe dans le tems de $\frac{x}{c}$ ſecondes, d'où l'on voit que l'eſpace $c = \sqrt{\frac{2ag}{b}}$ eſt préciſément celui que le ſon parcourt dans une ſeconde. C'eſt la même viteſſe que le grand Newton avoit déjà trouvée; & l'on ſait qu'elle eſt conſidérablement plus petite, que l'expérience ne la decouvre. Il y a grande apparence qu'il en faut chercher la raiſon dans les petites parcelles ſolides, qui voltigent dans l'air, à travers desquelles l'agitation eſt transmiſe dans un inſtant: ſi la dixieme partie de tout l'eſpace étoit rempli de telles parcelles, le ſon devroit ſe propager de la dixieme partie plus vite; ce qui mettroit d'accord la théorie avec l'expérience. Mais, quelle qu'en ſoit la cauſe, il eſt toujours certain que la théorie ne ſauroit être révoquée en doute pour cela, ſurtout quand on fait attention que nous ſuppoſons les agitations extrémement petites, pendant qu'on a fait les expériences ſur le bruit des canons, qui cauſe ſans doute dans l'air une agitation très violente, à laquelle on ne ſauroit plus appliquer la théorie.

25. Il paroit des formules que je viens de trouver, qu'après que toute l'agitation a été transmiſe par les points S & S′, les particules d'air qui ont été au commencement dans ces lieux, n'y ſont pas rétablies néceſſairement, mais qu'elles repoſeront enſuite en d'autres points s & s'. Ainſi, dans le cas que la figure repréſente, l'air qui étoit en S ſera transporté après l'agitation par l'eſpace $Ss = \frac{1}{2c}(IVK - IQK)$, & de l'autre côté vers B, l'air qui étoit

étoit en S' par l'eſpace $S's' = \frac{1}{2c}(IVK + IQK)$. Il ſemble que ces déplacemens n'affectent en aucune façon la ſenſation du ſon; mais, ſi les deux échelles IVK & IQK ſe trouvent en partie au deſſus & en partie au deſſous de l'axe, puisque les aires qui tombent au deſſous doivent être priſes négativement, les aires entieres IVK & IQK peuvent bien évanouïr: or cela arrive ordinairement dans les agitations de quelques parties de l'air, où il y a toujours autant d'air rarefié qu'il y en a de condenſé: & ſi quelques particules ont reçu quelque mouvement vers B, il y en a toujours d'autres qui ſont d'autant pouſſées vers A. Par cette raiſon on peut ſe diſpenſer d'avoir égard à ces déplacemens actuels, & ſe contenter de connoitre la denſité & le mouvement de chaque particule, pendant qu'elle eſt agitée.

26. Voyons à préſent plus en détail, comment l'agitation de l'air, excitée au commencement dans l'eſpace IK, eſt transmiſe par le tuyau tant en avant qu'en arriere. Les deux échelles étant donc celle des denſités IQK, & celle des viteſſes IVK: Soit propoſé le tems de t ſecondes, après lequel il faut déterminer l'agitation qui ſe trouvera dans le tuyau: pour cet effet on n'a qu'à prendre des deux côtés les eſpaces $Ii = Kk = ct$ & $Ii' = Kk' = ct$, & l'agitation initiale ſe trouvera à préſent partagée par les deux intervalles ik & $i'k'$; en ſorte que, prenant $io = IO$ & $i'o' = IO$, la denſité en o ſera $q = b + \frac{b}{2c}(OQ - OV)$, & la viteſſe $= \frac{1}{2}(OV - OQ)$; & de l'autre côté en o' la denſité $q = b + \frac{b}{2c}(OQ + OV)$, & la viteſſe $= \frac{1}{2}(OV + OQ)$. Donc, ſi nous conſtruiſons ſur ik l'échelle des denſités igk, prenant ſon appliquée $oq = \frac{1}{2}(OQ - OV) = \frac{q - b}{b}c$, elle

Fig. 4.

ſera

ſera en même tems l'échelle des viteſſes dirigées vers A. De la même maniere, conſtruiſant ſur l'eſpace $i'k'$ l'échelle des denſités, en prenant $o'q' = \frac{1}{2}(OQ + OV)$, elle ſera auſſi l'échelle des viteſſes dirigées vers B. Dans tous les autres endroits du tuyau l'air ſe trouvera en équilibre, ſans excepter l'eſpace IK où la premiere agitation a été excitée.

27. C'eſt une propriété bien remarquable de toutes les agitations produites par la propagation, que les deux échelles des denſités & des viteſſes ſe réduiſent partout à la même ligne courbe: d'où nous apprenons que, plus l'air y eſt condenſé, plus il a auſſi de viteſſe en même ſens que le ſon va; & où la denſité eſt plus petite que la naturelle, là auſſi le mouvement eſt dirigé en ſens contraire. Il eſt donc évident, que les agitations produites peuvent très conſidérablement différer de l'agitation initiale; & en effet, ſi celle-ci étoit déjà telle que l'échelle des viteſſes fût égale à celle des denſités, la propagation ſe feroit dans un ſeul ſens, & l'air de l'autre côté dans le tuyau n'en ſeroit jamais ébranlé. Puiſque donc le ſon ſe répand presque également en tout ſens, ce qui arrive lorsque l'échelle des viteſſes dans l'agitation initiale évanouit, nous pourrons regarder cette échelle comme réunie avec l'axe IK; puiſqu'on peut toujours imaginer une telle échelle de denſités qui ſeule produiſe le même effet.

28. Dans ce cas, on auroit partout dans les agitations produites les appliquées oq & $o'q'$ égales à $\frac{1}{2}OQ$; & ce ſera toujours de la figure de l'échelle iqk que dépend la nature du ſon, puiſque l'oreille n'eſt frappée que par ces agitations produites: car je ne parle pas ici du grave ou aigu des ſons, qui eſt cauſé par la fréquence de pluſieurs trémouſſemens qui ſe ſuccedent les uns aux autres, & dont la différence fait le principal objet de la Muſique. Toutes les autres qualités des ſons qui ne ſe rapportent pas à la ſucceſſions de pluſieurs vibrations, ne ſauroient dépendre que de la figure des échelles iqk, qui caractériſent les agitations propagées

dans l'air, & en conſtituent quaſi l'eſſence. Or on comprend aiſément qu'une variété infinie peut avoir lieu dans ces figures; & partant il n'y a aucun doute, que toutes les différentes qualités que nous appercevons dans les ſons n'en tirent pas leur origine; quoiqu'il ſoit encore incertain, quelle qualité répond à chaque figure: & s'il a été jusqu'ici ſi difficile de découvrir la différence qui regne dans la pronciation des diverſes voyelles, nous voyons à préſent, que chaque voyelle doit être appropriée à une certaine figure des échelles *i q k*, d'où dépendent auſſi toutes les autres variétés que l'oreille peut diſtinguer dans les ſons.

29. Or d'abord, je remarque que plus ou moins de largeur dans la figure *i q k* ne fait que rendre le ſon plus ou moins fort, ſans en altérer les autres qualités. Car, plus les appliquées *o q* ſont grandes, plus auſſi eſt grande leur force pour frapper l'oreille; & quoique dans le tuyau cette figure demeure la même à toutes les diſtances de l'agitation principale I Q K: dans l'air libre ſa largeur va de plus en plus en diminuant, d'où ne réſulte d'autre effet que l'affoibliſſement du ſon, ſans que ſes autres qualités en ſoient altérées. D'où l'on peut conclure, que ſi toutes les appliquées *o q* de la figure *i q k* ſont diminuées dans la même raiſon, il n'en arrive d'autre changement dans le ſon que l'affoibliſſement. Mais, ſi la figure *i q k* changeoit en ſorte que quelques unes de ſes appliquées fuſſent augmentées ou diminuées dans une plus grande raiſon que d'autres, le ſon en ſouffriroit ſans doute un changement plus eſſentiel: & il ſemble que l'expreſſion des lettres conſones, dans la voix, dépend d'une telle modification, ou dans la premiere ou dans la derniere des agitations dont chaque ſyllabe eſt compoſée; vu que les conſones n'affectent que le commencement ou la fin de chaque ſyllabe.

30. Mais la longueur *i k* de chaque agitation *i q k* eſt invariable, non ſeulement dans le tuyau, mais auſſi dans l'air libre, d'où l'on peut conclure qu'une qualité plus eſſentielle des ſons en dépend, qui demeure la même, pendant que la force va en diminuant. Peut-

être

être que c'eſt dans cette longueur *i k*, qu'il faut chercher la cauſe des différentes voyelles : qui dans ce cas ne différeront entr'elles que du plus au moins. Si cela ne paroiſſoit aſſez conforme à la vérité, il faudroit recourir aux différentes figures des échelles *i q k*, où l'on trouveroit principalement à diſtinguer celles qui n'ont qu'un ventre, de celles qui en ont deux ou trois, ou pluſieurs : d'où ſans doute doit réſulter une différence très eſſentielle dans les ſons. Mais je ne donne tout cela que pour des conjectures, & il s'en faut beaucoup qu'on puiſſe eſperer ſi tôt une explication ſuffiſante de toutes les variétés qu'on obſerve dans les ſons : & il ne paroit pas encore, quel ſecours on pourroit attendre des expériences qu'on voudroit faire ſur ce ſujet.

Sur la formation de l'Echo.

31. Jusqu'ici j'ai conſidéré le tuyau comme étendu à l'infini de part & d'autre ; mais à préſent je le conſidérerai comme terminé, ou d'un côté, ou de tous les deux ; & nous verrons avec d'autant plus de ſurpriſe, que cette ſeule circonſtance eſt capable de produire l'écho, qu'on s'eſt formé jusqu'ici des idées tout à fait différentes ſur la formation de ce phénomene. D'abord donc, je ſuppoſerai terminé le tuyau d'un ſeul côté en B, pendant que de l'autre côté il demeure étendu à l'infini, partout avec la même largeur. Or il y a ici deux cas à examiner, l'un où le tuyau en B *b* eſt ouvert, & l'autre où il y eſt fermé comme dans la fig. 6. Dans l'un & l'autre cas il s'engendre un écho ſimple ; ce qui paroitra bien étrange pour le premier, où l'on ne ſauroit concevoir aucune réflexion, comme on ſe l'eſt communément imaginé ; d'où l'on comprendra auſſi pour l'autre cas, où le tuyau eſt bouché en B *b*, que ce n'eſt pas proprement à la réflexion qu'il faut attribuer la formation de l'écho.

PREMIER CAS.

32. Si donc, *premierement*, le tuyau terminé & ouvert en B *b* & qu'on y ait imprimé à l'air contenu dans l'eſpace I K une

agitation quelconque, dont l'échelle des denſités ſoit I m K, & l'échelle des viteſſes I n K. Or, puiſque le tuyau eſt ouvert en Bb, où il communique avec l'air extérieur, il eſt impoſſible que la denſité en B ſoit différente de la naturelle, que je ſuppoſe $= h$. Donc, concevant le tuyau au delà de B vers Z prolongé à l'infini, il faut abſolument que les deux échelles qu'on doit ſuppoſer ſur cette continuation, ſoient telles que la denſité en B demeure toujours la même $= h$, de quelque maniere que puiſſe varier la viteſſe. Donc, pour un tems écoulé quelconque de t ſecondes, prenant du point B de part & d'autre les intervalles $BT = Bt = ct$: ſoient tm & tn les appliquées des deux échelles en t, & TM & TN celles en T; & puiſque nous avons vu §. 20. que la denſité en B eſt $q = h + \frac{h}{2c}(TM + tm - TN + tn)$; il faut donc qu'il ſoit partout $TM = -tm$ & $TN = tn$, pour qu'il devienne $q = h$; d'où l'on détermine pour toute la continuation BZ à l'infini les deux échelles des denſités & des viteſſes, quoique cette continuation n'exiſte que dans l'imagination.

33. De là il eſt clair que, ſur la continuation B Z, les deux échelles ſe réuniſſent avec l'axe, à l'exception du ſeul eſpace $ik = IK$, & également éloigné de B, que celui où la premiere agitation a été excitée, où l'échelle des denſités iMk eſt égale à la principale Imk, mais dans une ſituation renverſée, pendant que celle des viteſſes iNk, ſe trouve ſituée en même ſens que la principale I n K; d'où l'on voit que la denſité en B doit demeurer toujours la même en vertu de la conſtruction donnée ci-deſſus. Maintenant, ayant trouvé la juſte continuation des deux échelles au delà de B à l'infini, la même conſtruction nous découvrira tous les phénomenes dont l'agitation initiale excitée en I K ſera ſuivie dans le tuyau. Car, pour les agitations qui en ſont communiquées à l'air libre par l'ouverture Bb, notre calcul ne s'y étend point. Ainſi, il faut bien ſe garder de s'imaginer que l'agitation ik exiſte réellement hors du tuyau; & il

ne

ne la faut regarder que comme un moyen propre à nous découvrir les agitations de l'air dans le tuyau, cauſées par l'agitation initiale IK. Cependant il eſt certain que, dès que cette agitation parvient au bout Bb, elle eſt enſuite propagée par l'air libre; mais cette propagation n'eſt plus ſoumiſe à notre calcul.

34. Puiſque la denſité de l'air dans l'ouverture Bb ne ſauroit recevoir aucun changement, voyons quelle en ſera la viteſſe à chaque moment. Or, après le tems de t ſeconde, prenant les intervalles BT $=$ Bt $=$ ct, à cauſe de l'appliquée TM negative, nous aurons par le §. 20. la viteſſe de l'air en Bb vers Z.

$$v = \tfrac{1}{2}(\mathrm{TN} + tn + \mathrm{TM} + tm) = tm + tn:$$

donc, avant le tems $= \frac{\mathrm{BK}}{c}$, l'air en Bb ſera en repos; enſuite il recevra ce mouvement, dont la viteſſe eſt égale à la ſomme des deux appliquées tm & tn, tant qu'elles ſont toutes les deux poſitives, mais ce mouvement ne durera que pendant un tems $= \frac{\mathrm{IK}}{c}$ ſecondes, après lequel l'équilibre ſera parfaitement rétabli en Bb. Ici je remarque que, quoique l'agitation en Bb ſoit tout à fait différente de la principale IK, les agitations qui en ſont produites dans l'air libre ſont pourtant de la même nature que celles dans le tuyau; car on voit par ce qui eſt expliqué ci-deſſus, que de très différentes agitations initiales peuvent réſulter les mêmes agitations propagées, pourvu que les deux échelles ayent un certain rapport entr'elles: or on s'aſſurera aiſément que ce rapport ſe trouve préciſément dans l'agitation de l'ouverture Bb.

35. Voyons à préſent ce qui doit arriver dans un autre lieu quelconque A du tuyau; & il eſt d'abord clair qu'après le tems $= \frac{\mathrm{AI}}{c}$ ſeconde, l'agitation y commencera, & durera pendant le

tems $= \frac{IK}{c}$ ſeconde, de ſorte qu'après le tems $\frac{A\,t}{c}$ ſeconde la denſité y ſera $q = b + \frac{b}{2c}(tm - tn)$, & la viteſſe $v = \frac{1}{2}(tn - tm)$ dirigée vers B; alors une oreille placée en A entendra le ſon, qui aura été produit en IK. Après cela, l'air en A demeurera tranquille, mais cette tranquillité ne dure que pendant le tems $\frac{Kk}{c} = \frac{2BK}{c}$, au bout duquel une nouvelle agitation y ſera excitée, provenant de l'agitation imaginaire ik; de ſorte qu'au tems $= \frac{AT}{c}$ ſeconde depuis le commencement, la denſité y ſera

$$q = b + \frac{b}{2c}(-TM - TN) = b - \frac{b}{2c}(tm + tn),$$

& la viteſſe $v = \frac{1}{2}(TN + TM) = \frac{1}{2}(tm + tn)$. Cette nouvelle agitation différera de la premiere, puiſque l'une eſt déterminée par la ſomme des deux appliquées tm & tn, pendant que l'autre l'eſt par leur différence. Si dans l'agitation initiale IK il étoit par tout $tn = tm$, la premiere agitation en A évanouïroit entierement, mais l'autre deviendroit d'autant plus forte; & s'il arrivoit le contraire, qu'il fût $tn = -tm$, la ſeconde évanouïroit.

36. De là il eſt clair que le même ſon excité en IK ſera entendu deux fois en A, & partout ailleurs dans le tuyau AB, hormis près de l'embouchûre Bb: & que, ſi le lieu A eſt pris derriere l'eſpace IK, la répétition du ſon ſuit après le tems $= \frac{2BK}{c}$, où il faut remarquer que c deſigne l'eſpace que le ſon parcourt dans une ſeconde, qui eſt de 1040 pieds de Paris environ. Voilà donc un cas bien remarquable d'un *écho* ſimple, dont l'origine ſuit très naturellement des principes de la Mécanique, quoiqu'aucune réflexion n'y puiſſe avoir lieu. Un tel écho ſe formera donc dans un tuyau

tuyau ouvert d'un côté, & continué de l'autre à l'infini; & quoique dans ce calcul la largeur du tuyau ait été ſuppoſée très petite, le même phénomene doit auſſi arriver dans de tuyaux très larges, comme par exemple dans des galeries voûtées: où plus un homme s'y trouvera éloigné du bout Bb, & plus entendra-t-il tard la répétition de ſa propre voix: comme, s'il en étoit éloigné de 520 pieds, l'écho viendroit préciſément après une ſeconde.

SECOND CAS.

37. Le même phénomene aura également lieu, quand le tuyau eſt fermé en Bb, en le ſuppoſant encore infini vers l'autre côté. Pour appliquer nos formules à ce cas, il faut conſidérer que l'air en Bb ne ſauroit avoir aucun mouvement. Donc la continuation des deux échelles vers Z doit être telle, que notre conſtruction donne toujours pour le lieu B la viteſſe $v = 0$; quelle qu'y puiſſe être la denſité. Pour cet effet, prenons du point B de part & d'autre les intervalles égaux $BT = Bt$, & puiſque les appliquées tm & tn ſont connues au point t, ſoyent TM & TN celles au point T, d'où en vertu du §. 20. la viteſſe en B réſulte $v = \frac{1}{2}(TN + tn - TM + tm)$, qui devant toujours être $= 0$, il faut qu'il ſoit $TN = -tn$, & $TM = tm$. L'agitation initiale en IK étant donc repréſentée par l'échelle des denſités ImK, & celle des viteſſes InK, on n'a qu'à prendre les intervalles $Bi = BI$, & $Bk = BK$: & y décrire l'échelle des denſités iMk égale à ImK, & celle des viteſſes iNk égale, mais contraire à InK. Partout ailleurs les deux échelles ſont réunies avec l'axe. Fig. 6.

38. En Bb la viteſſe demeurant toujours $= 0$, la denſité après le tems $= t$, en prenant $BT = Bt = ct$, à cauſe de l'appliquée TN négative, y ſera $q = b + \frac{b}{2c}(TM + tm + TN + tn) = b + \frac{b}{c}(tm + tn)$. Mais, pour tout autre endroit A dans le tuyau,

tuyau, derriere l'agitation initiale IK, après que le ſon en ſera entendu en A, l'écho y parviendra après le tems $= \frac{Kk}{c} = \frac{2BK}{c}$. Cet intervalle de tems ſera d'autant plus grand, plus l'agitation initiale IK ſe trouvera reculée du bout Bb, d'où l'on voit que les phénomenes de l'écho ſeront les mêmes, ſoit que le bout Bb ſoit fermé ou ouvert; la ſeule différence conſiſtera dans la nature de l'agitation, qui n'affecte point l'intervalle du tems écoulé entre le ſon principal & ſa répétition. Ici on pourroit bien dire, que l'écho provient de la réflexion du fond Bb; mais, puiſque le même écho ſe forme, lorsque le tuyau eſt ouvert en Bb, on voit bien que l'idée de la réflexion ne fournit point la juſte explication de ce phénomene, mais que cette explication demande des recherches beaucoup plus profondes.

TROISIEME CAS.

Fig. 7. 39. Conſidérons maintenant un tuyau terminé des deux côtés en A & B, & puisque nous avons déjà vu, que les phénomenes ſont à peu près les mêmes, ſoit que les bouts ſoyent fermés ou ouverts, je ſuppoſerai le tuyau AB ouvert des deux côtés. Enſuite, pour ne pas trop embrouiller les idées, je conçois l'agitation initiale comme faite dans un ſeul point t, la denſité y étant $= b + \frac{b}{c} \cdot tm$, & la viteſſe $= tn$, & que partout ailleurs ſur AB les deux appliquées évanouiſſent. Qu'on prolonge la droite AB de part & d'autre à l'infini, & qu'on prenne les intervalles AB', BA'; $A'B''$, $B'A''$ &c. égaux à la longueur du tuyau AB: & puisque le tuyau eſt ouvert en B à la diſtance $BT = Bt$, il faut établir les appliquées TM & TN; & à cauſe de l'ouverture Aa par la même raiſon, il faut établir en t', prenant $At' = At$, les appliquées $t'm'$ & $t'n'$; enſuite auſſi, à la diſtance $At'' = AT$, les appliquées $t''m''$ & $t''n''$. Selon la même loi, en prenant $BT' = Bt'$, il y faut mettre les appliquées $T'M'$ & $T'N'$, & ainſi de ſuite; d'où l'on voit, com-

comment on doit établir dans tous les intervalles AB′, BA′, A′B″, &c. les deux appliquées, celles des viteſſes étant toutes dirigées en haut, & celles des denſités alternativement en haut & en bas.

40. Soit à préſent une oreille en A, & après le tems $= \frac{At}{c}$ elle recevra la premiere impreſſion, cauſée par les deux agitations tmn & $t'm'n'$ conjointement; c'eſt le ſon principal, qu'elle entendra alors. Enſuite après le tems $\frac{tT}{c} = \frac{t't''}{c} = \frac{2Bt}{c}$ elle entendra le premier écho, qui ſera ſuivie du ſecond après le tems $= \frac{2At}{c}$; depuis du troiſieme après le tems $= \frac{2Bt}{c}$, enſuite du quatrieme après le tems $= \frac{2At}{c}$, & ainſi de ſuite. Le ſon principal ſera donc répété une infinité de fois, les intervalles de chaque écho au ſuivant étant alternativement de $\frac{2Bt}{c}$ & $\frac{2At}{c}$ ſecondes. Si le bruit étoit excité au lieu A même, la multitude des échos ſe réduiroit à la moitié, & les intervalles de tems entr'eux ſeroient tous égaux & $= \frac{2AB}{c}$ ſecondes; de ſorte que, ſi la longueur du tuyau AB étoit de 520 pieds, tous ces échos ſe ſuivroient toutes les ſecondes.

41. Que le premier ſon s'excite en t, & que l'oreille ſoit placée au même endroit; dans ce cas le premier écho ſuivra le ſon principal après le tems $\frac{tt'}{c} = \frac{2At}{c}$, le ſecond après le tems $\frac{tT}{c} = \frac{2Bt}{c}$, le troiſieme après le tems $\frac{tT'}{c} = \frac{tt''}{c} = \frac{2AB}{c}$, qui étant produit par les deux agitations $T'M'N'$ & $t''m''n''$ égales & ſemblables à la principale, ſera plus fort & plus diſtinct. Or celui-

ci ſera ſuivi en même ordre de nouveaux après le tems $\frac{2At}{c}$, $\frac{2Bt}{c}$ & $\frac{2AB}{c}$, & ainſi de ſuite. D'où l'on voit qoe, ſi le point t étoit pris au milieu du tuyau AB, tous les échos ſe ſuccéderoient à intervalles égaux, chacun étant $= \frac{AB}{c}$ ſecondes. Si l'oreille ſe trouvoit dans un autre endroit S, le nombre des échos ſeroit encore plus multiplié, & cela par des intervalles de tems plus inégaux entr'eux: pour en juger mieux, on n'a qu'à s'imaginer qu'en tous les endroits t, T, t', T', t'', T'' &c. le même cri ſoit produit au même inſtant, & voir à quel inſtant chacun d'eux parvient au lieu propoſé S dans le tuyau, ſelon la loi de la propagation.

42. Si la longueur du tuyau eſt au deſſous de 100 pieds, de ſorte que les intervalles de tems entre les échos conſtructifs ne ſauroient être diſtingués, tous les échos ſe réduiront à une réſonnance confuſe; d'où l'on comprend clairement ce que c'eſt qu'une réſonance. Mais, ſi le tuyau eſt beaucoup plus long que 100 pieds, & que les intervalles de tems entre les échos ſucceſſifs deviennent aſſez ſenſibles: alors on entendra pluſieurs échos de ſuite, dont le nombre devroit même être infini, ſi par des cauſes phyſiques les répétitions ne devenoient de plus en plus foibles. Or ce que je viens d'expoſer, pourra ſelon toute apparence être appliqué à des galeries fort longues & bien fermées de tous côtés, quoiqu'à la rigueur ces recherches ne s'étendent qu'à des tuyaux fort étroits: cependant il n'y a presque point de doute qu'on y obſervera une telle multiplicité d'echos. On trouve même quelques obſervations dans les Oeuvres de Kircher, qui ſemblent très bien confirmer cette production des échos.

43. Mais on comprend aiſément, que tout ce que je viens de développer, ne regarde qu'un cas trés particulier, & qu'on ſe tromperoit bien groſſierement, ſi l'on vouloit aſſigner à tous les échos

Fig. 1.

Fig. 2.

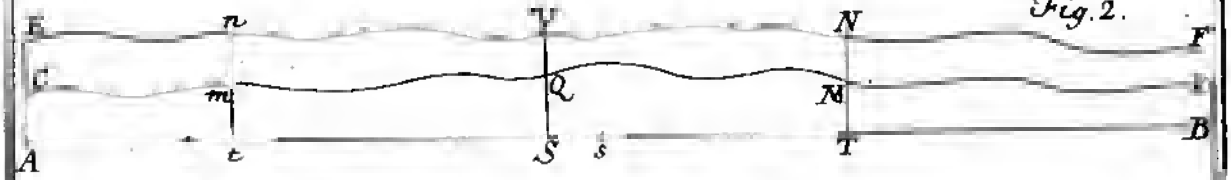


Fig. 3.

Fig. 4.

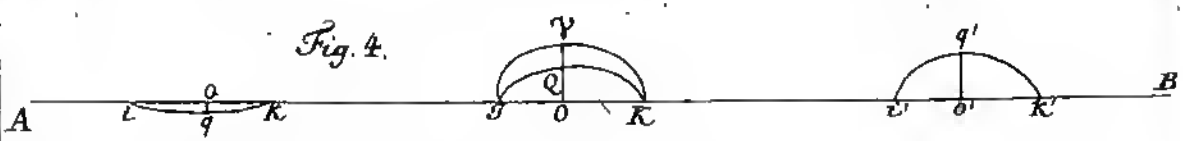


Fig. 5.

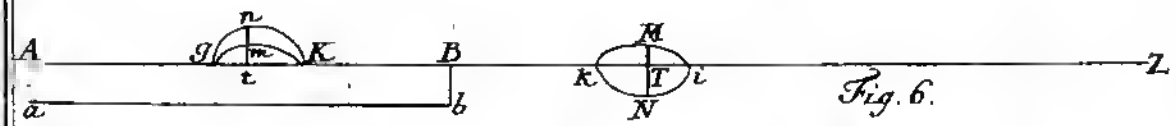


Fig. 6.

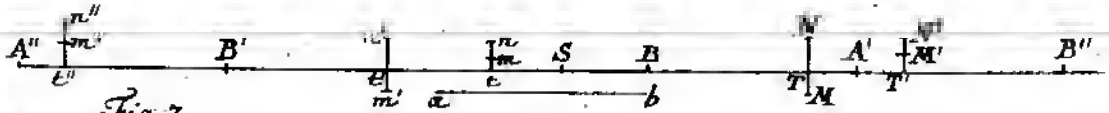


Fig. 7.

Mem. de l'Acad. Tome XXI. 1763. Pl. VIII. pag. 363.

échos cette même origine. Je n'ai conſidéré que des tuyaux également larges par toute leur étendue; ce qui eſt ſans doute un cas très particulier, auquel les bornes de l'Analyſe m'ont attaché, vu qu'il eſt encore impoſſible de définir le mouvement de l'air dans les tuyaux, dont la largeur varie d'une maniere quelconque. Cependant on avouera que ce cas, quelque particulier qu'il ſoit, nous a fourni des éclairciſſemens très importans tant ſur la génération & propagation du ſon, que ſur la formation des *échos:* d'où nous pourrons puiſer des idées beaucoup plus juſtes qu'on n'en a eu juſqu'ici. Mais, comme cette recherche eſt fondée ſur une branche tout à fait nouvelle de l'Analyſe, elle doit principalement exciter tous les Géometres à la cultiver; puisque c'eſt de là qu'on peut attendre les plus importantes découvertes, qui ſont entierement inacceſſibles à l'Analyſe ordinaire, & parmi leſquelles il faut ſurtout compter celles où le mouvemeot de l'air entre en conſidération.

44. Donc, ſi nous poſſédons encore à peine les premiers principes pour connoitre le mouvement de l'air, & ſi tout ce que nous en ſavons ſe réduit à certaines eſpeces de tuyaux; combien ſommes-nous encore éloignés de déterminer toutes les modifications que le ſon reçoit dans des cavités quelconques? La cavité de la bouche humaine nous en fournit un exemple frappant, dont nous ne connoiſſons que fort en gros l'effet dans la formation de la voix: ne ſachant preſque rien de la maniere dont les articulations & autres modifications ſont opérées. Mais il n'y a aucun doute que, s'il nous étoit poſſible de pénétrer dans ces myſteres, nous découvririons auſſi dans la figure de la bouche un vrai chef-d'oeuvre de la ſouveraine ſageſſe, qui ſurpaſſe infiniment tout ce que le plus ſublime Géometre eſt capable d'imaginer. C'eſt ainſi que partout le Créateur a mis l'empreinte de ſon infinie ſageſſe, même dans les choſes qui en paroiſſent le moins ſuſceptibles.

SUR

LES COURBES TAUTOCHRONES.

PAR M. DE LA GRANGE *).

On appelle en général courbe *tautochrone* une courbe telle, que ſi un corps ſe meut le long de ſa concavité, ſoit en montant ſoit en deſcendant, il employe toujours le même tems à parcourir un arc quelconque pris du point le plus bas.

M. Huyghens ayant démontré dans ſon fameux Ouvrage intitulé *horologium oſcillatorium*, que la cicloïde étoit la tautochrone des corps peſans dans le vuide, cette découverte excita la curioſité des Géometres, & les engagea à chercher une méthode directe & analitique pour réſoudre le probleme du tautochroniſme dans une hypotheſe quelconque; probleme qui eſt peut être un des plus curieux & en même tems des plus difficiles de la méchanique.

Mrs. Jean Bernoulli & Euler ſe ſont particuliérement appliqués à cette recherche, & ont donné presqu'en même tems, l'un dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, pour l'année 1730, & l'autre dans le Tome IV, des commentaires de l'Académie de Petersbourg, & enſuite dans le ſecond volume de ſa Mécanique, des méthodes tres ingénieuſes pour déterminer les tautochrones dans un milieu réſiſtant comme le quarré de la viteſſe, & dans quelque hypotheſe de péſanteur que ce ſoit. Ces méthodes qui ſont les mêmes quant au fond, conſiſtent à faire en ſorte que l'expreſſion générale du tems $\int \frac{dx}{u}$ devienne égale à une fonction de dimenſion nulle de deux quantités quelconques, l'une conſtante A, & l'autre variable X, telles, qu'en faiſant $X = A$, on ait le tems total

*) Lu dans l'aſſemblée du 4 Mars 1767.

total depuis le commencement du mouvement jusqu'à ſa fin. Car alors la quantité A qui dépend de l'arc total que le corps doit parcourir, s'évanouit néceſſairement de la formule $\int \frac{dx}{u}$, lorsque $X = A$, & par conſéquent l'expreſſion du tems ſe trouve entierement indépendante de la longueur de cet arc. Or pour cela il ſuffit que la quantité différentielle $\frac{dx}{u}$ ſoit elle-même une fonction de dimenſion nulle de X & de A, comme par exemple $\frac{dP}{\sqrt{(A^2 - P^2)}}$ & d'autres ſemblables ; condition à laquelle il n'eſt pas difficile de ſatisfaire lorsqu'on peut avoir l'expreſſion de la viteſſe u, ce qui arrive quand la réſiſtance eſt nulle, & quand elle eſt proportionelle au quarré de la viteſſe ; mais il n'en eſt pas tout à fait de même dans les autres cas où l'équation en u n'eſt point intégrable. Auſſi les deux grands Géometres dont nous venons de parler, n'ont-ils conſidéré d'autres hypotheſes de réſiſtance que celle du quarré de la viteſſe ; & M. Fontaine eſt le ſeul qui ait fait jusqu'ici quelques pas de plus dans cette recherche. Sa méthode eſt fondée ſur un calcul particulier qu'il appelle fluxio-différentiel, & qui conſiſte à faire varier les mêmes quantités de deux manieres différentes ; & on peut regarder l'ouvrage qu'il a donné ſur cette matiere, comme un des plus beaux qui ſe trouvent parmi les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, & ſurtout comme celui qui a le plus contribué à la célébrité de cet illuſtre Mathématicien.

Mais, quelque profonde & quelque ingénieuſe que ſoit cette nouvelle théorie des tautochrones, il faut avouer qu'elle laiſſe encore beaucoup à deſirer. Lorsqu'il n'y a point de réſiſtance, & que par conſéquent la force accélératrice du corps eſt entierement indépendante de la viteſſe, on ſait depuis longtems que le tautochronisme exige que cette force ſoit proportionelle à l'eſpace qui reſte à parcourir. Mais quelle eſt en général la force néceſſaire pour pro-

duire le tautochronisme, en la regardant comme une fonction quelconque de l'eſpace & de la viteſſe ? Voilà le probleme qu'il faut réſoudre pour avoir une théorie générale & complette des tautochrones. M'étant occupé de ce probleme, voici la ſolution que j'en ai trouvée, & qui eſt, ſi je ne me trompe, générale & nouvelle.

Solution du probleme des tautochrones.

Soit u la viteſſe du corps en un point quelconque de la ligne qu'il décrit, p ſa force accélératrice dans ce point, x l'eſpace qu'il a encore à parcourir, & a l'eſpace total depuis le point d'où le corps eſt parti jusqu'à celui où il doit arriver; on aura, comme l'on ſait, (à cauſe que x croiſſant u diminue,) l'équation

$$u\,du + p\,dx = 0.$$

Et le tems que le corps doit employer à parcourir l'eſpace x ſera exprimé par $\int \frac{dx}{u}$; de ſorte qu'en faiſant, après l'intégration, $x = a$, on aura le tems total depuis le commencement du mouvement jusqu'à la fin. Or ce tems doit être indépendant de l'eſpace parcouru a, par la nature du probleme; donc il faut que la valeur de $\int \frac{dx}{u}$ ſoit telle qu'en faiſant $x = a$, a s'évanouiſſe entierement.

Soit X une fonction quelconque de x, & A une pareille fonction de a; il eſt clair que la condition dont il s'agit aura lieu, ſi en faiſant $X = z\,A$, & ſubſtituant la valeur de x tirée de cette équation dans la formule $\int \frac{dx}{u}$, cette ſubſtitution y fait diſparoître la quantité a, & la réduit à n'être qu'une fonction de z; car alors la ſuppoſition de $x = a$ donnera $X = A$, & par conſéquent $z = 1$; de ſorte que la formule $\int \frac{dx}{u}$ aura dans ce cas une valeur déterminée

minée & indépendante de a. Donc, ſi on différentie cette formule en faiſant varier x & a, qu'enſuite on ſuppoſe $dx = X' dX$, $da = A' dA$ (X' étant une fonction de X, ou x, & A' une pareille fonction de A, ou a) & qu'on mette à la place de dX ſa valeur $A dz + z dA$, il faudra que le coëfficient de dA ſoit $= o$. Cela poſé, comme la viteſſe u doit dépendre des deux quantités x, & a, ſuppoſons qu'en les faiſant varier toutes deux en même tems on ait la différentielle $du = P dx + Q da$, il eſt clair qu'on aura d'abord en vertu de l'équation $u du + p dx = o$, $P = -\frac{p}{u}$;

Enſuite la différentielle de $\int \frac{dx}{u}$ ſera, dans la même ſuppoſition, $\frac{dx}{u} - da \int \frac{Q dx}{u^2}$; laquelle, en faiſant les ſubſtitutions convenables, c'eſt à dire, en mettant $X'(A dz + z dA)$ au lieu de dx, & $A' dA$ au lieu de da, deviendra

$$\frac{A X' dz}{u} + \left(\frac{X' z}{u} - A' \int \frac{Q dx}{u^2}\right) dA.$$

Donc il faudra que l'on ait $\frac{X' z}{u} - A' \int \frac{Q dx}{u^2} = o$; c'eſt à dire en remettant pour z ſa valeur $\frac{X}{A}$, & faiſant pour plus de ſimplicité $XX' = \xi$, & $AA' = \alpha$, $\frac{\xi}{u} - \alpha \int \frac{Q dx}{u^2} = o$.

D'où, en faiſant varier x ſeul, on tire $Q = \frac{u d\xi - \xi du}{\alpha dx}$, & mettant pour $\frac{du}{dx}$ ſa valeur P, ou bien $-\frac{p}{u}$,

$$Q = \frac{\frac{u d\xi}{dx} + \frac{p\xi}{u}}{\alpha}$$

De

De ſorte que la valeur complette de du ſera en général

$$du = -\frac{p\,dx}{u} + \left(\frac{u\,d\xi}{dx} + \frac{p\xi}{u}\right)\frac{d\alpha}{\alpha},$$

ξ étant une fonction quelconque de x, & α une pareille fonction de α.

Maintenant, ſoit R le facteur compoſé de x, & de u, qui multipliant l'équation $du + \frac{p\,dx}{u} = 0$, dans laquelle α eſt ſuppoſé conſtant, la rendroit intégrable, il eſt évident que ce même facteur étant regardé comme une fonction de u, x, & α doit auſſi rendre intégrable l'équation

$$du + \frac{p\,dx}{u} - \left(\frac{u\,d\xi}{dx} + \frac{p\xi}{u}\right)\frac{d\alpha}{\alpha} = 0;$$

Donc il faut que l'équation

$$R\left(\frac{u\,d\xi}{dx} + \frac{p\xi}{u}\right)\left(\frac{u\,du + p\,dx}{\frac{u^2\,d\xi}{dx} + p\xi} + \frac{d\alpha}{\alpha}\right) = 0.$$

ſoit intégrable; & comme le terme $\frac{d\alpha}{\alpha}$ eſt une fonction de α ſeul, & que les termes $\frac{u\,du + p\,dx}{\frac{u^2\,d\xi}{dx} + p\xi}$ ne contiennent point α, mais ſeulement x & u, il s'enſuit 1°, que le multiplicateur commun $R\left(\frac{u\,d\xi}{dx} + \frac{p\xi}{u}\right)$ doit être une quantité conſtante, c'eſt à dire, que R doit être réciproquement proportionnel à $\frac{u\,d\xi}{dx} + \frac{p\xi}{u}$;

2° que

2°. que par conſéquent la quantité $\frac{u\,du + p\,dx}{\frac{u^2\,d\xi}{dx} + p\xi}$ doit être une différentielle complette de x & de u.

Soit $\frac{u^2\,d\xi}{dx} + p\xi = r$, ce qui donne $p = \frac{r}{\xi} - \frac{u^2\,d\xi}{\xi\,dx}$, & l'on aura la transformée $\frac{\xi u\,du - u^2\,d\xi}{\xi r} + \frac{dx}{\xi}$, laquelle, en faiſant $\frac{u}{\xi} = y$ ſe changera en celle-ci $\frac{u^2\,dy}{ry} + \frac{dx}{\xi}$.

Or, comme ξ eſt une fonction de x, il eſt viſible que cette quantité ne ſauroit être une différentielle complette à moins que $\frac{u^2}{r}$ ne ſoit une fonction de y ſeule.

Donc, ſi on dénote par φy une fonction quelconque de y, il faudra que l'on ait $r = u^2\varphi y$, c'eſt à dire, à cauſe de $y = \frac{u}{\xi}$, $r = u^2\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right)$. Donc, en ſubſtituant cette valeurs de r dans l'équation $p = \frac{r}{\xi} - \frac{u^2\,d\xi}{\xi\,dx}$, on aura

$$p = u^2\left[\frac{\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right)}{\xi} - \frac{d\xi}{\xi\,dx}\right].$$

Telle eſt l'expreſſion générale de la force accélératrice néceſſaire pour le tautochroniſme, où ξ peut être une fonction quelconque de x, & $\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right)$ une fonction quelconque de $\frac{u}{\xi}$.

REMARQUE.

La ſolution précédente eſt fondée ſur cette conſidération qu'en faiſant $X = zA$, l'expreſſion du tems $\int \frac{dx}{u}$ doit devenir une fonction de la ſeule variable z. Soit donc Πz cette fonction, on aura en général $\int \frac{dx}{u} = \Pi z + c$, la conſtante c devant être telle que $\int \frac{dx}{u}$ ſoit nul lorsque $x = 0$. Or, puisque X eſt une fonction quelconque de x, ſuppoſons qu'elle devienne $= f$ quand $x = 0$; & l'on aura dans ce cas $z = \frac{f}{A}$; donc il faudra que $\Pi \frac{f}{A} + c = 0$; & par conſéquent que $c = -\Pi \frac{f}{A}$; de ſorte qu'on aura $\int \frac{dx}{u} = \Pi z - \Pi \frac{f}{A}$: d'où l'on voit que la valeur de $\int \frac{dx}{u}$ contiendra néceſſairement la quantité A, à moins que f ne ſoit $= 0$. Donc il faut pour l'exactitude de la ſolution que la fonction X ſoit telle qu'elle s'évanouiſſe lorsque $x = 0$; & comme $\xi = XX'$, il faudra auſſi que la quantité ξ devienne nulle dans le même cas.

EXEMPLE.

Suppoſons $\Phi\left(\frac{u}{\xi}\right) = f + g\frac{\xi}{u} + h\frac{\xi^2}{u^2}$, f, g, h étant des conſtantes quelconques, nous aurons

$$p = h\xi + gu + \left(\frac{f}{\xi} - \frac{d\xi}{\xi dx}\right) u^2.$$

Soit $\frac{f}{\xi} - \frac{d\xi}{\xi dx} = k$, en ſorte que $p = h\xi + gu + ku^2$,

&

& l'on trouvera par l'intégration $\xi = Ce^{-kx} + \frac{f}{k}$, C étant une conſtante arbitraire, qu'on déterminera par la condition que ξ ſoit $= o$ lorsque $x = o$ (Rem. précéd.); de ſorte qu'on aura $C = -\frac{f}{k}$, & par conſéquent $\xi = f\frac{1 - e^{-kx}}{k}$.

On voit par là, que pour que le tautochroniſme ait lieu dans un milieu dont la réſiſtance ſeroit en général $-gu - ku^2$, il faut que le mobile ſoit ſollicité par une force proportionelle à ξ, c'eſt à dire, $a\frac{1 - e^{-kx}}{k}$, x étant l'eſpace à parcourir.

Si $k = o$, c'eſt à dire, ſi la réſiſtance du milieu étoit ſimplement proportionelle à la viteſſe, on auroit (en ſuppoſant k infiniment petit) la force proportionelle ax; & il en ſeroit de même ſi la réſiſtance étoit tout à fait nulle. Ce qui s'accorde avec ce que l'on ſait d'ailleurs.

Au reſte ces cas ſont les ſeuls où l'on ait pu juſqu'ici déterminer les loix du tautochroniſme; notre méthode donne, comme l'on voit, le moyen d'étendre cette recherche auſſi loin qu'il eſt poſſible.

Corollaire I.

C'eſt une choſe digne de remarque, que l'expreſſion de la force ſollicitatrice qu'on vient de trouver pour le cas de la réſiſtance $gu + ku^2$ ne dépend en aucune maniere du terme gu; de ſorte que la même courbe qui eſt tautochrone dans le vuide, ou dans un milieu réſiſtant comme le quarré de la viteſſe, doit l'être auſſi dans un milieu dont la réſiſtance ſeroit proportionelle á la viteſſe, ou en partie au quarré de la viteſſe. Pour en trouver la raiſon, il n'y a qu'à examiner l'expreſſion génerale de p; & on verra que, comme la quantité $\Phi\frac{u}{\xi}$ ex-

exprime une fonction quelconque de $\frac{u}{\xi}$, on peut écrire $\Phi\frac{u}{\xi} + g\frac{\xi}{u}$ au lieu de $\Phi\frac{u}{\xi}$; ce qui donnera ſimplement dans la valeur de p le nouveau terme gu. D'où l'on peut conclure en général, que toute courbe qui eſt tautochrone dans une hypotheſe quelconque de force & de réſiſtance, l'eſt auſſi en ſuppoſant la réſiſtance augmentée d'une quantité proportionelle à la viteſſe.

Corollaire II.

L'équation $pudu + pdx = 0$ donne, en mettant pour p ſa valeur $u^2\left[\frac{\Phi\left(\frac{u}{\xi}\right)}{\xi} - \frac{d\xi}{\xi dx}\right]$, & faiſant, comme ci-deſſus, $\frac{u}{\xi} = y$, $\frac{dy}{y\Phi y} + \frac{dx}{\xi} = 0$, d'où l'on tirera la valeur de y en x, & par conſéquent auſſi celle de u, à cauſe que $u = \xi y$.

Soit $\int\frac{dy}{y\Phi y} = \Phi y$, l'intégrale étant priſe de maniere qu'elle ſoit nulle lorsque $y = 0$, on aura en ſubſtituant $\frac{dX}{X}$ au lieu de $\frac{dx}{\xi}$, & intégrant enſuite $\Phi y + lX = C$, C étant la valeur de X lorſque $y = 0$. Or, puisque $y = \frac{u}{\xi}$, & que u doit être $= 0$, au commencement du mouvement lorsque $x = a$, & par conſéquent $X = A$, on aura $C = lA$; donc $\Phi y = l\frac{A}{X}$, & faiſant $X = zA$, $\Phi y = -lz$. Dénotons par Ψ la fonction réciproque de Φ, c'eſt à dire, une fonction telle que $\Psi(\Phi y) = y$, & l'on aura

aura $y = \Psi - lz$; donc $u = \xi\Psi - lz$; donc $\frac{dx}{u} = \frac{dx}{\xi\Psi - lz} = \frac{dX}{X\Psi - z} = \frac{dz}{z\Psi - lz}$; quantité qui doit être intégrée de maniere qu'elle ſoit nulle lorsque $z = 0$. Or z eſt donnée en x par l'équation $z = \frac{X}{A}$; donc on connoitra auſſi la viteſſe u & le tems $\int \frac{dx}{u}$ en x. Si on veut avoir le tems total employé à décrire l'arc a, il faudra faire $x = a$, ou bien $z = 1$; & comme l'expreſſion du tems eſt une fonction de z ſeul, il eſt clair que le tems total ſera indépendant de la longueur de l'arc parcouru a.

Corollaire III.

Soit t le tems employé à parcourir un arc quelconque $a - x$, pris du point ou le corps commence à ſe mouvoir, en ſorte que l'on ait $dt = -\frac{dx}{u}$, & comme $u = \xi y$, on aura $dt = -\frac{dx}{\xi y}$, & mettant au lieu de $\frac{dx}{\xi}$ ſa valeur tirée de l'équation $\frac{dy}{y\Phi y} + \frac{dx}{\xi} = 0$, il viendra $dt = \frac{dy}{y^2\Phi y}$. Or, au commencement du mouvement, on a $x = a$, & $u = 0$, donc $y = 0$; & à la fin on a $x = 0$, & par conſéquent auſſi $\xi = 0$, (par la Remarque préc.) donc $y = \frac{u}{\xi} = \infty$. Ainſi, pour déterminer le mouvement du corps, il n'y a qu'à intégrer les équations $\frac{dy}{y\Phi y} + \frac{dx}{\xi} = 0$, & $dt = \frac{dy}{y^2\Phi y}$, de maniere que y ſoit nulle lorsque $t = 0$, & $x = a$; & l'on aura y en x, & t en y; ou bien, à cauſe de $y = \frac{u}{\xi}$, on aura u

en x, & t en x, & u. A l'égard du tems total, on le trouvera en faiſant dans l'expreſſion de t, $y = \infty$.

Corollaire IV.

Soit comme dans l'exemple ci-deſſus

$$\varphi y = f + \frac{g}{y} + \frac{h}{y^2}; \quad \& \quad \xi = f\,\frac{1 - e^{-kx}}{k},$$

en ſorte que la réſiſtance du milieu ſoit $gu + ku^2$, & la force ſollicitatrice $hf\,\frac{1 - e^{-kx}}{k}$, l'équation $\frac{dy}{y\varphi y} + \frac{dx}{\xi} = 0$, deviendra $\frac{dy}{fy + g + \frac{h}{y}} + \frac{k\,dx}{f(1 - e^{-kx})} = 0$, ou bien

$$\frac{y\,dy}{h + gy + fy^2} + \frac{k e^{kx} dx}{f(e^{kx} - 1)} = 0,$$

dont l'intégrale priſe de maniere que $y = 0$ lorsque $x = a$, eſt

$$\frac{1}{2f}\,l\,\frac{h + gy + fy^2}{h} - \frac{g}{2f\sqrt{(fh - \frac{1}{4}g^2)}} \times \left(\text{Arc. tang.}\,\frac{fy + \frac{1}{2}g}{\sqrt{(fh - \frac{1}{4}g^2)}} - \text{Arc. tang.}\,\frac{\frac{1}{2}g}{\sqrt{(fh - \frac{1}{4}g^2)}}\right) + \frac{1}{f}\,l\,\frac{e^{kx} - 1}{e^{ka} - 1} = 0,$$

c'eſt à dire, $\frac{e^{kx} - 1}{e^{ka} - 1} \times \sqrt{\left(1 + \frac{g}{h}\,y + \frac{f}{h}\,y^2\right)}$

$$= \frac{e^{\frac{g}{2\sqrt{(fh - \frac{1}{4}g^2)}}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{fy + \frac{1}{2}g}{\sqrt{(fh - \frac{1}{4}g^2)}}}}{e^{\frac{g}{2\sqrt{(fh - \frac{1}{4}g^2)}}\,\text{Arc. tang.}\,\frac{\frac{1}{2}g}{\sqrt{(fh - \frac{1}{4}g^2)}}}},$$

d'où

d'où l'on tirera la valeur de y en x. Enſuite on aura

$$u = fy\,\frac{1 - e^{kx}}{k}, \quad \&$$

$$t = \int \frac{dy}{y^2 \Phi y} = \int \frac{dy}{h + gy + fy^2},$$

c'eſt à dire en intégrant de maniere que $t = 0$, lorsque $y = 0$,

$$t = \frac{1}{\sqrt{(fh - \frac{1}{4}g^2)}} \times \left(\text{Arc.tang.} \frac{fy + \frac{1}{2}g}{\sqrt{(fh - \frac{1}{4}g^2)}} - \text{Arc.tang.} \frac{\frac{1}{2}g}{\sqrt{(fh - \frac{1}{4}g^2)}} \right).$$

Faiſant $y = \infty$, on aura le tems total égal à

$$\frac{1}{\sqrt{(fh - \frac{1}{4}g^2)}} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc. tang.} \frac{\frac{1}{2}g}{\sqrt{(fh - \frac{1}{4}g^2)}} \right),$$

π étant l'angle de 180°.

Soit $g = 0$, on aura $\frac{e^{kx} - 1}{e^{ka} - 1} \sqrt{\left(1 + \frac{fy^2}{h}\right)} = 1$,

d'où $\sqrt{\left(1 + \frac{fy^2}{h}\right)} = \frac{e^{ka} - 1}{e^{kx} - 1}$. On aura de plus

$$t = \frac{1}{\sqrt{(fh)}} \text{ Arc. tang. } \frac{fy}{\sqrt{(fh)}}.$$

Or Arc. tang. $\frac{fy}{\sqrt{(fh)}}$ = Arc. cof $\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{fy^2}{h}\right)}}$, donc

$$t = \frac{1}{fh} \text{ Arc. cof } \frac{e^{kx} - 1}{e^{ka} - 1},$$

& faiſant $x = 0$, on aura le tems total $= \frac{\pi}{2\sqrt{(fh)}}$.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

Si on vouloit que le tems employé à parcourir l'eſpace a fut proportionel à A^m, le probleme pourroit ſe réſoudre de la même maniere, en ſuppoſant $\int \frac{dx}{u} = ZA^m$ (Z étant une fonction quelconque de z) ce qui donneroit par la différentiation

$$\frac{\text{diff.} \int \frac{dx}{u}}{\int \frac{dx}{u}} = \frac{dZ}{Z} + \frac{m\,dA}{A},$$

c'eſt à dire, en ſubſtituant à la place de la différence de $\int \frac{dx}{u}$ ſa valeur trouvée dans le probleme précédent

$$\frac{\frac{AX'\,dz}{u} + \left(\frac{X'z}{Z} - A' \int \frac{Q\,dx}{u^2}\right) dA}{\int \frac{dx}{u}} = \frac{dZ}{Z} + \frac{m\,dA}{A}.$$

Donc, comparant enſemble les termes de dA,

$$\frac{\frac{X'z}{u} - A' \int \frac{Q\,dx}{u^2}}{\int \frac{dx}{u}} = \frac{m}{A},$$

c'eſt à dire, en multipliant par $A \int \frac{dx}{u}$, & ſubſtituant $\frac{X}{A}$ à la place de z, ξ à la place de XX', & α à la place de AA',

$$\frac{\xi}{u} - \alpha \int \frac{Q\,dx}{u^2} = m \int \frac{dx}{u},$$

d'où

d'où en différentiant, on aura $Q = \frac{u(d\xi - m\,dx) - \xi\,du}{\alpha\,dx}$,

ou bien à cauſe de $\frac{du}{dx} = -\frac{p}{u}$,

$$Q = \frac{u\left(\frac{d\xi}{dx} - m\right) + \frac{p\xi}{u}}{\alpha}.$$

Ainſi on trouvera que la quantité $\frac{u\,du + p\,dx}{u^2\left(\frac{d\xi}{dx} - m\right) + p\xi}$ doit être une différentielle complette; de ſorte qu'en faiſant

$$u^2\left(\frac{d\xi}{dx} - m\right) + p\xi = r,$$

la queſtion ſe réduira à rendre la quantité

$$\frac{\xi u\,du - u^2(d\xi - m\,dx)}{\xi r}$$

une différentielle exacte.

Qu'on mette $\frac{d\mathrm{X}}{\mathrm{X}}$ à la place de $\frac{dx}{\xi}$, & qu'on diviſe le haut & le bas de la fraction par u^2, elle ſe changera en celle-ci

$$\frac{\frac{du}{u} - \frac{d\xi}{\xi} + \frac{m\,d\mathrm{X}}{\mathrm{X}}}{\frac{r}{u^2}},$$

c'eſt à dire en $\frac{d.l\,\frac{u\mathrm{X}^m}{\xi}}{\frac{r}{u^2}}$; d'où l'on voit que $\frac{r}{u^2}$ doit être une

fonction de $l\frac{uX^m}{\xi}$, c'eſt à dire, de $\frac{uX^m}{\xi}$; de ſorte qu'on aura $r = u^2\Phi\left(\frac{uX^m}{\xi}\right)$, & par conſéquent

$$p = u^2\left[\frac{\Phi\left(\frac{uX^m}{\xi}\right)}{\xi} - \frac{d\xi}{\xi dx} + \frac{m}{\xi}\right].$$

A l'égard de la valeur de X on la déterminera par le moyen de l'équation $\frac{dX}{X} = \xi dx$, laquelle donne $X = e^{\int \xi dx}$. Au reſte on prouvera encore ici, comme on a fait dans la Remarque précédente, que la valeur de ξ doit être nulle lorsque $x = 0$.

Soit $\Phi\left(\frac{uX^m}{\xi}\right) = f + \frac{h\xi}{u^2X^{2m}}$, on aura

$$p = \frac{h\xi}{X^{2m}} + u^2\left(\frac{f+m}{\xi} - \frac{d\xi}{\xi dx}\right),$$

& faiſant $\frac{f+m}{\xi} - \frac{d\xi}{\xi dx} = k$, on aura

$$\xi = \frac{f+m}{k}(1 - e^{-kx});$$

donc $\frac{dX}{X} = \frac{dx}{\xi} = \frac{ke^{kx}dx}{(f+m)(e^{kx}-1)}$, d'où l'on tire

$$lX = \frac{1}{f+m}l\frac{e^{kx}-1}{k}, \text{ & enſuite}$$

$$X = \left(\frac{e^{kx}-1}{k}\right)^{\frac{1}{f+m}}.$$

Donc

Donc ſi on fait pour abréger $\frac{m}{f+m} = n$, & $h(f+m) = g$, on aura $p = ge^{-kx}\left(\frac{e^{kx}-1}{k}\right)^{1-2n} + ku^2$, & le tems total employé à parcourir l'eſpace a ſera proportionel à $\left(\frac{e^{ka}-1}{k}\right)^n$.

Si $k = 0$, alors $p = gx^{1-2n}$, & le tems total devient proportionel a a^n.

APPENDICE *).

En examinant la ſolution que nous venons de donner du probleme des tautochrones, il eſt aiſé de voir qu'elle ſe réduit à faire en ſorte que l'élément du tems dt ſoit de cette forme $Y\,dy$, Y dénotant une fonction quelconque de y, & y étant $= \frac{u}{\xi}$. En effet, puisque au commencement du mouvement on a $u = 0$, & à la fin $x = 0$, & par conſéquent auſſi $\xi = 0$ (hyp.), il eſt clair que le tems total ſera égal a l'intégrale de $Y\,dy$ priſe de maniere quelle ſoit nulle lorsque $y = 0$, & qu'elle finiſſe lorsque $y = \infty$, & qu'ainſi il ſera tout a fait indépendant de l'arc parcouru, comme la nature du probleme exige.

De là il s'enſuit que l'on peut rendre notre ſolution beaucoup plus générale en prenant pour y une fonction quelconque de u & de x, pourvu qu'elle ſoit nulle lorsque $u = 0$, & qu'elle ſoit infinie lorsque $x = 0$; conditions qui peuvent avoir lieu d'une infinité de manieres.

Soit donc y une fonction quelconque de u, & de x, telle que $y = 0$ quand $u = 0$, & $y = \infty$ quand $x = 0$, & ſoit $dy = M\,du + N\,dx$; qu'on dénote par Y une fonction quelconque de y, & l'on aura en général dans le cas du tautochroniſme

*) Lu à l'Académie le 30. Avril 1767.

niſme $dt = Y\,dy$, c'eſt à dire, en mettant pour dt ſa valeur $\frac{dx}{u}$, & pour dy, $M\,du + N\,dx$,

$$\left(\frac{1}{u} - YN\right) dx - YM\,du = 0.$$

Or l'équation $u\,du + p\,dx = 0$ donne $du = -\frac{p\,dx}{u}$; donc faiſant cette ſubſtitution, & diviſant toute l'équation par dx, on aura

$$\frac{1}{u} - YN + \frac{YMp}{u} = 0,$$

d'où l'on tire

$$p = \frac{Nu}{M} - \frac{1}{MY}.$$

C'eſt là, ce me ſemble, la ſolution la plus ſimple, & en même tems la plus générale, qu'on puiſſe donner du probleme dont il s'agit.

SUR

SUR

LES TAUTOCHRONES.

PAR M. D'ALEMBERT.

1.

L'Illuſtre M de la Grange m'ayant communiqué, il y a peu de tems, ſans démonſtration une formule générale & très ſimple qu'il a trouvée pour la ſolution du probleme des Tautochrones, cette formule a reveillé d'anciennes vues que j'avois pour cette ſolution, & a donné lieu aux recherches ſuivantes. J'expoſerai mes idées dans l'ordre à peu près où elles ſe ſont préſentées à mon eſprit; on verra d'abord comment, en généraliſant & ſimplifiant la méthode de M. Fontaine, (v. Mém. Acad. des Sciences de Paris 1734.) je ſuis parvenu à une formule très ſimple pour le cas où les tems ſont comme une fonction des arcs, formule dans laquelle celle de M. de la Grange eſt renfermée; on verra enſuite comment j'ai été conduit à une autre ſolution beaucoup plus ſimple & plus générale que la premiere. On trouvera enfin dans cet écrit quelques autres réfléxions que la ſolution de la queſtion propre m'a donné occaſion de faire, & qui pourront, je crois, n'être pas ſans utilité en quelques occaſions.

2. Soit u la viteſſe du corps, x, l'arc qui lui reſte à parcourir, p, la force accélératrice le long de la courbe qu'il décrit, en ſorte que l'on ait $p\,dx + u\,du = 0$. Soit à préſent un autre arc $x + \delta x$, différent du précédent d'une quantité infiniment petite, $p + \delta p$, la force accélératrice, à l'extrémité ſupérieure de cet arc, $u + \delta u$ la viteſſe, on aura de même

$$(p + \delta p)\, d(x + \delta x) + (u + \delta u)\, d(u + \delta u) = 0,$$

ou $pdx + \delta p\,dx + pd\delta x + udu + \delta u\,du + ud\delta u = 0$, qui ſe réduit à $\delta p\,dx + pd\delta x + \delta u\,du + ud\delta u = 0$, à cauſe de $p\,dx + u\,du = 0$.

3. Maintenant, ſoit X l'arc total deſcendu ou remonté, & $\Delta(X)$ la fonction de cet arc qui repréſente le tems: cela poſé, imaginons (ce qui eſt permis) que le tems total par l'arc x eſt au tems total par l'arc $x + \delta x$ comme $\Delta(X)$ eſt à $\Delta(X + dX)$, & que les tems par les arcs dx & $d(x + \delta x)$ ſont auſſi dans la même proportion; on aura

$$\frac{d(x+\delta x)}{u+\delta u} - \frac{dx}{u} : \frac{dx}{u} :: d(\Delta X) : \Delta X;$$

donc $\frac{d\delta x}{u} - \frac{\delta u\,dx}{u^2} = \frac{dx}{u} \times \frac{d\Delta X}{\Delta X}$;

& $\delta u = \frac{u\,d\delta x}{dx} - \frac{u\,d\Delta . X}{\Delta . X}$ donc en regardant, ce qui eſt permis, dx & $d\Delta X$ ainſi que X comme conſtans, on aura

$$d\delta u = \frac{du\,d\delta x}{dx} + \frac{u\,dd\delta x}{dx} - \frac{du\,d\Delta X}{\Delta . X};$$

donc ſubſtituant ces valeurs dans l'équation

$$\delta p\,dx + p\,d\delta x + \delta u\,du + u\,d\delta u = 0,$$

& ſuppoſant, ſuivant les formules connues des Géometres,

$$\delta p = \frac{dp}{dx}\,\delta x + \frac{dp}{du}\,\delta u = \frac{dp}{dx}\,\delta x + \frac{dp}{du}\left(\frac{u\,d\delta x}{dx} - \frac{u\,d\Delta X}{\Delta X}\right);$$

on aura l'équation

$$p\,dx\,d\delta x + u\,du\,dx\left(\frac{2\,d\delta x}{dx} - \frac{2\,d\Delta X}{\Delta X}\right) + uu\,dd\delta x + \frac{dp}{dx}\,\delta x\,.\,dx^2 + \frac{u\,dp}{du}\left(\frac{d\delta x}{dx} - \frac{d\Delta X}{\Delta X}\right) = 0;$$

donc

donc diviſant par $\frac{2\,d\delta x}{dx} - \frac{2\,d\Delta X}{\Delta X}$, & mettant pour $u\,du$ ſa valeur $-p\,dx$, on aura l'équation finale

$$-\frac{p\,\delta v + \frac{2p\,d\Delta X}{\Delta X}}{\frac{2\,\delta v}{dx} - \frac{2u\Delta X}{\Delta X}} + \frac{\frac{dp}{dx}\,\delta x\,.\,dx}{\frac{2\,\delta x}{dx} - \frac{2d\Delta X}{\Delta X}} + \frac{u\,dp\,dx}{du} + \frac{uu\,dd\delta x}{\frac{2\,d\delta x}{dx} - \frac{2\,d\Delta X}{\Delta X}} = 0.$$

3. Soit maintenant $p = uuk$, $\delta x = d\omega\, c^{\int \zeta dx}$; $d\omega$ étant une conſtante telle que $\lambda d\omega = \frac{d\Delta : X}{\Delta X}$; on aura $d\delta x = \zeta\, d\omega\, c^{\int \zeta dx}$; $dd\delta x = d\omega\,(\zeta\zeta\,dx + d\zeta)\, c^{\int \zeta dx}$; & diviſant par un & réduiſant, il vient $-k\frac{(\zeta^{\int \zeta dx} - 2\lambda)}{2(\zeta c^{\int \zeta dx} - \lambda)} + \frac{dk\, c^{\int \zeta dx}}{dx.\ 2(\zeta c^{\int \zeta dx} - \lambda)}$

$+k + \frac{u\,dk}{du} + \frac{\left(\zeta\zeta + \frac{d\zeta}{dx}\right) c^{\int \zeta dx}}{2(\zeta c^{\int \zeta dx} - \lambda)} = 0$; d'où l'on tire l'équation fondamentale

$$k\zeta + \frac{dk}{dx} + \frac{u\,dk}{du}(\zeta - \lambda c^{-\int \zeta dx}) + \zeta\zeta + \frac{d\zeta}{dx} = 0.$$

qui renferme la condition du probleme.

4. Soit $k = \xi + \xi'\lambda'$, ξ & ξ' étant des fonctions inconnues de x, & λ une fonction inconnue de x & de u, on aura

$$\xi\zeta + \frac{d\xi}{dx} + \frac{\lambda' d\xi'}{dx} + \frac{\xi' d\lambda'}{dx} + \xi'\zeta\lambda' + \frac{u\xi' d\lambda'}{du}(\zeta - \lambda c^{-\int \zeta dx})$$

$+$

$+ \zeta\zeta + \frac{d\zeta}{dx} = 0$; faiſons d'abord, ce qui eſt permis, $\xi\zeta + \frac{d\xi}{dx} + \zeta\zeta + \frac{d\zeta}{dx} = 0$, nous aurons $d(\xi e^{\int \zeta dx}) + d(\zeta e^{\int \zeta dx}) = 0$, d'où $\xi = -\zeta + \mathrm{E} e^{-\int \zeta dx}$; E étant une conſtante quelconque ; faiſons enſuite, ce qui eſt permis encore, $\xi' \zeta \lambda' + \frac{\lambda' d\xi'}{dx} = 0$, nous aurons $\xi' = \Lambda e^{-\int \zeta dx}$, A étant encore une conſtante quelconque; & enfin il ne nous reſtera plus que l'équation $\frac{\xi' d\lambda'}{dx} + \frac{u\xi' dx'}{du}(\zeta - \lambda e^{-\int \zeta dx}) = 0$, qui doit donner, en faiſant $d\lambda' = \mathrm{F} dx + \mathrm{G} du$, l'équation identique $\mathrm{F} = -\mathrm{G} u(\zeta - \lambda e^{-\int \zeta dx})$; d'où l'on voit que $\mathrm{G} du - \mathrm{G}(\zeta u dx - \lambda u dx e^{-\int \zeta dx})$ doit être une différentielle complette. Donc, faiſant $\zeta dx - \lambda e^{-\int \zeta dx} = \varrho dx$, on aura $\mathrm{G} du - \mathrm{G} u \varrho dx$ une différentielle complette, ou $\mathrm{G} e^{\int \varrho dx} d(u e^{-\int \varrho dx})$ une différentielle complette égale à $d\lambda'$, donc λ' doit être évidemment une fonction de $u e^{-\int \varrho dx}$; donc, puiſque $k = \xi + \xi' \lambda'$, & que $p = uuk$, on aura $p = -uu\zeta + \mathrm{E} uu e^{-\int \zeta dx} + \Lambda e^{-\int \zeta dx} \times uu \times \Phi(u e^{-\int \varrho dx})$.

5. Soit

5. Soit $c^{\int \zeta dx} = \varrho'$, on aura $\zeta = \frac{d\varrho'}{\varrho' dx}$; &

$\varrho = \frac{d\varrho'}{\varrho' dx} - \frac{\lambda}{\varrho'}$, d'où $c^{-\int \zeta dx} = \frac{1}{\varrho'} c^{\frac{\int \lambda dx}{\varrho'}}$. Donc

$$p = uu \left[\frac{\Phi\left(\frac{uc}{\varrho'}^{\frac{\int \lambda dx}{\varrho'}}\right)}{\varrho'} - \frac{d\varrho'}{\varrho' dx} + \frac{E}{\varrho'} \right];$$

qui peut ſe réduire évidemment à

$$p = uu \left[\frac{\Delta\left(\frac{uc}{\varrho'}^{\frac{\int \lambda dx}{\varrho'}}\right)}{\varrho'} - \frac{d\varrho'}{\varrho' dx} \right].$$

6. Si la courbe eſt tautochrone, c'eſt à dire, ſi $\Delta(X)$ eſt conſtant, alors $\lambda = 0$, & on aura

$$p = uu \left[\frac{\Phi\left(\frac{u}{\varrho'}\right)}{\varrho'} - \frac{d\varrho'}{\varrho' dx} \right];$$

c'eſt la formule que M. de la Grange m'a communiquée.

7. Les transformations que nous avons employées ci-deſſus de $p = uuk$, & de $k = \xi + \xi' \lambda$, n'ont eu pour objet que de ſimplifier la ſolution, & on auroit pu s'en paſſer. En effet, ſi nous n'avions point fait la transformation $p = uuk$, nous aurions eu l'équation $p\zeta + \frac{dp}{dx} + \left(\frac{udp}{du} - 2p\right)(\zeta - \lambda c^{-\int \zeta dx}) + \zeta\zeta + \frac{d\zeta}{dx} = 0$,

qu'on peut réduire à cette forme $p\mu + \frac{dp}{dx} + \frac{uvdp}{du} + \varrho = o$, μ, v & ϱ étant des fonctions données de u & de x. Suppoſons maintenant $p = \sigma\theta$, (σ & θ étant deux indéterminées variables) on aura

$$\sigma\theta\mu + \frac{\sigma d\theta}{dx} + \frac{\theta d\sigma}{dx} + \frac{u\sigma v d\theta}{du} + \frac{u\theta v d\sigma}{du} + \varrho = o;$$

qu'on peut ſéparer en ces deux-ci (à cauſe des deux indéterminées σ & θ) $\theta\mu + \frac{d\theta}{dx} + \frac{uvd\theta}{du} = o$, &

$$\frac{\theta d\sigma}{dx} + \frac{u\theta v d\sigma}{du} + \varrho = o;$$

ſoit $\theta = c^{\omega}$, la premiere équation deviendra

$$\mu + \frac{d\omega}{dx} + \frac{uvd\omega}{du} = o;$$

& ſuppoſant $d\omega = Adx + Bdu$, on aura

$$\mu + A + uvB = o;$$

donc $-\mu dx - uvBdx + Bdu$ doit être une différentielle complette; donc $Bc^{-\int v dx} d(uc^{\int v dx}) - \mu dx$ doit être une différentielle complette; d'où l'on tirera aiſément B par les méthodes connues, & par conſéquent ω & θ; enſuite l'équation

$$\frac{d\sigma}{dx} + \frac{uvd\sigma}{du} + \frac{\varrho}{\theta} = o,$$

donnera (en faiſant $d\sigma = A'dx + B'du$) $-uvB'dx - \frac{\varrho dx}{\theta} + B'du$ une différentielle complette, d'où l'on tirera B, par une méthode ſemblable, & la formule qui réſultera de cette ſoluiton

tion reviendra à celle de l'art. 5, comme on peut s'en aſſurer par le calcul: mais revenons à cette formule.

8. On doit remarquer 1°. que puisque

$$\delta x = d\omega e^{\int \zeta dx} = \varrho' d\omega = \varrho' X' dx,$$

X′ étant une fonction de X, il faut que cette fonction X′ ſoit telle que $\varrho' X'$ ſoit $= 0$ lorsque $x = 0$, & $= 1$ lorsque $x = X$; donc, puisque $\frac{d\omega}{dx} = \frac{d\Delta(X)}{\lambda\Delta(X)}$, on aura évidemment $X' = \frac{d\Delta(X)}{\lambda\Delta(X)dX}$, & par conſéquent $\varrho' X' = \varrho' \frac{d\Delta(X)}{\lambda\Delta(X)dX}$; d'où l'on voit que ſi on met dans $\frac{\lambda\Delta(X)dX}{d\Delta(X)}$, x à la place de X, on aura la valeur de ϱ', puisque $\varrho' \frac{d\Delta(X)}{\lambda\Delta(X)dX}$ doit être $= 1$ quand $x = X$.

2°. On voit de plus que $du = \frac{u d\delta x}{dx} - \frac{u d\Delta X}{\Delta X}$; d'où il s'enſuit qu'à cauſe de $dx = \varrho' d\omega$, on aura

$$du = u\left(\frac{d\varrho' d\omega}{dX} - \frac{d\Delta(X)}{\Delta(X)}\right);$$

donc, comme $\frac{\delta u}{dx}$ n'eſt ni nulle ni infinie quand $x = 0$, il s'enſuit que quand $x = 0$, $\frac{d\varrho'}{dx}$ ne doit en général être ni nulle ni infinie (ainſi que M. de la Grange l'obſerve); nous ferons cependant plus bas quelques remarques à ce ſujet.

9. Soit $\Delta(X) = X^m$, on aura $\frac{\lambda\Delta(X)dX}{d\Delta(X)} = \frac{\lambda . X}{m}$; donc $\varrho' = \frac{\lambda X}{m}$; donc $c^{\int\frac{\lambda dx}{\varrho'}} = c^{m\int\frac{dx}{x}} = x^m$; donc

$$p = uu\left[\frac{\Phi\left(\frac{mux^m}{\lambda x}\right)}{\frac{\lambda X}{m}} - \frac{1}{x}\right].$$

Soit $\Phi\left(\frac{mux^m}{\lambda x}\right) = F + \frac{B\lambda^n x^n}{m^n u^n x^{mn}} + \frac{D\lambda^2 x^2}{m^2 u^2 x^{2m}}$; & $p = \xi'' + \gamma u^p$ on aura

$$\xi'' + \gamma u^p = uu\left(\frac{Fm}{\lambda x} - \frac{1}{x}\right) + B\lambda^{n-1}x^{n-1-mn}u^{2-n} + \frac{D\lambda x^{1-2m}}{m^2};$$

d'où l'on tire $\frac{Fm}{\lambda} = 1$; $2 - n = p$, $n - 1 - mn = 0$; $B\lambda^{n-1} = \gamma$; $\xi'' = \frac{D\lambda x^{1-2m}}{m^2}$, donc

$$1 - p - m(2 - p) = 0;$$

donc $p = \frac{1-2m}{1-m}$, & $m = \frac{1-p}{2-p}$; ce qui eſt conforme à ce qu'on fait d'ailleurs *).

On voit auſſi qu'en nommant g la peſanteur & s l'abſciſſe, on aura $g\frac{dS}{dx} = \xi'' = \frac{D\lambda x^{1-2m}}{m^2}$ d'où l'on tire $gs = \frac{D'\lambda}{m^2}x^{2-2m}$, D' exprimant une conſtante.

10.

*) Voyez Euler Mech. art. 593. T. II. on y nomme $2m$ ce que nous appellons ici p.

10. En général ſoit $\frac{d\Delta x}{\lambda \Delta x\, dx} = \frac{1}{\varrho'}$, ou plus ſimplement $\frac{d\Delta x}{\lambda \Delta x\, dx} = \xi$, on aura $p = uu\,\frac{\Phi\left(\frac{u\Delta x.\, d\Delta X}{\lambda \Delta x\, dx}\right) \times d\Delta X}{\lambda \Delta x\, dx}$ $+ \frac{uu\,d\xi}{\xi\, x} = uu\Phi\left(\frac{u\,d\Delta x}{\lambda\, dx}\right) \times \frac{d\Delta x}{\lambda \Delta x\, dx} + \frac{uu\,dd\Delta x}{d\Delta x.\, dx} - \frac{uu\,d\Delta x}{\Delta x\, dx}$; donc, ſi on fait $\Delta x = \theta$, on aura

$$p = uu\Phi\left(\frac{u\,d\theta}{\lambda\, dx}\right) \times \frac{d\theta}{\lambda\,\theta\, dx} + \frac{uu\,dd\theta}{d\theta\, dx} - \frac{uu\,d\theta}{\theta\, dx}.$$

Soit $\Phi\left(\frac{u\,d\theta}{\lambda\, dx}\right) = F + \frac{B\lambda^n\, dx^n}{d\theta^n\, u^n} + \frac{C\lambda^2\, dx^2}{d\theta^2\, u^2}$; & ſoit $p = \xi'' + gu^2 + Ru^k$, on aura $\frac{F\,d\theta}{\lambda\theta\, dx} + \frac{dd\theta}{d\theta\, dx} - \frac{d\theta}{\theta\, dx} = g$; $2 - n = k$; $\frac{B\lambda^{n-1}\, dx^{n-1}}{\theta\, d\theta^{n-1}} = R$; $\xi'' = \frac{C\lambda^2\, dx^2}{d\theta^2}$; d'où $\frac{B^{\frac{1}{n-1}}\lambda\, dx}{\theta^{\frac{1}{n-1}} d\theta} = R^{\frac{1}{n-1}}$ & $\frac{\theta^{\frac{1}{n-1}}\, d\theta}{dx} = \frac{B^{\frac{1}{n-1}}\lambda}{R^{\frac{1}{n-1}}}$; il eſt aiſé de voir, que pour ſatisfaire à ces équations, θ doit être une puiſſance de x; car l'équation $\theta^{\frac{1}{n-1}}\, d\theta = \frac{B^{\frac{1}{n-1}}\lambda\, dx}{R^{\frac{1}{n-1}}}$ étant intégrée ne doit point renfermer de conſtantes, puiſque $x = o$ doit donner $\theta = o$ de plus g doit être $= o$, car θ étant une puiſſance de x, l'équation qui donne la valeur de g ne ſauroit ſubſiſter

à moins que g ne ſoit nulle ; puiſque cette équation ſe réduit à $\frac{K\,dx}{x} = g$, ainſi la valeur de p qu'on vient de trouver, retombe dans le cas de l'art. précédent.

11. Si on fait $\lambda = 0$, en ſorte que la courbe ſoit tautochrone, & qu'on ſuppoſe avec M. de la Grange $\Phi\left(\frac{u}{\varrho'}\right) = F + \frac{G\varrho'}{u} + \frac{D\varrho'^2}{u^2}$ & $p = \xi'' + \Phi + \gamma u + \eta u^2$, Φ, γ & η, étant des conſtantes données, & ξ'' une fonction de x, on aura $\xi'' + \Phi + \gamma u + \eta u^2 = \left(\frac{F}{\varrho'} - \frac{d\varrho'}{\varrho' dx}\right) u^2 + G u + D\varrho'$; & mettant pour ξ'' ſa valeur $\frac{g\,ds}{dx}$, & comparant on aura $G = \gamma$; $\frac{F}{\varrho'} - \frac{d\varrho'}{\varrho' dx} = \eta$; $\frac{g\,ds}{dx} + \Phi = D\varrho'$; d'où l'on tire la valeur de ϱ' en x, ſavoir $F\,dx = d\varrho' + \varrho'\eta\,dx$, ou $\frac{F}{\eta} + A\,c^{-\eta x} = \varrho'$; & $ds = -\frac{\Phi\,dx}{g} + \frac{D\varrho'\,dx}{g}$; ou $s = -\frac{\Phi x}{g} + \frac{F x}{g} + \frac{A \cdot D^{-\eta x}}{-g\eta}(c-1)$; & comme ϱ' doit être $= 0$ lorsque $x = 0$, on aura de plus $A = -\frac{F}{\eta}$; donc $\frac{g\,dx}{ds} + \Phi = \frac{DF}{\eta}(1 - c^{-\eta x})$.

12. Voici maintenant par quelle ſuite de réfléxions je ſuis parvenu à une ſolution plus générale & plus ſimple que la précédente. Puiſque dans les Tautochrones $p = u u \left[\Phi \frac{\left(\frac{u}{\varrho'}\right)}{\varrho'} - \frac{d\varrho'}{dx}\right]$, ſoit

ſoit $\frac{u}{\varphi'} = z$, on aura $u = \varphi' z$ & à cauſe de $p\,dx + u\,du = o$ $\frac{dx\,\Phi z}{\varphi'} - \frac{d\varphi'}{\varphi} + \frac{du}{u} = o$, ou en mettant pour u ſa valeur $\frac{dx\,\Phi z}{\varphi} + \frac{dz}{z} = o$, donc $dx = -\frac{\varphi' dz}{z\Phi z}$ & $dt = -\frac{dx}{u}$ ou $-\frac{dx}{\varphi' z} = +\frac{dz}{zz\Phi z}$; or cette derniere quantité eſt l'aire d'une courbe dont l'abſciſſe eſt z, & l'ordonnée $\frac{1}{zz\Phi z}$; & lorsque $x = o$ & par conſéquent $\varphi' = o$, comme il a été remarqué ci-deſſus, z eſt infinie; d'où il eſt très aiſé de voir que le tems total $\int -\frac{dx}{u}$, finiſſant à $x = o$, ou à $z = \infty$, ſera repréſenté par l'aire *totale* de cette courbe qui par conſéquent ſera toujours conſtante, puisque cette aire ne renferme que la variable z.

13. On doit pourtant remarquer deux choſes 1°, que lorsque z eſt $= o$, il faut que $\frac{1}{zz\Phi z}$ ſoit finie, ou du moins telle que l'aire $\int \frac{dz}{zz\Phi z}$, en prenant z très petite, ne ſoit pas infinie, autrement le tems $\int -\frac{dx}{u}$ ſeroit infini, ce qui ne doit pas être ſuppoſé dans le probleme des Tautochrones. 2°. Que quand $x = o$, & par conſéquent $z = \infty$, il faut que $\frac{1}{zz\Phi z}$ ſoit tel que l'aire $\int \frac{dz}{zz\Phi z}$ ne ſoit pas infinie, afin que le tems $\int \frac{dx}{u}$ ſoit encore toujours fini & conſtant, d'où il s'enſuit

1°.

1°. que Φz doit être telle, qu'en prenant z très petite, $zz\Phi z$ ſoit $=$ à une puiſſance $z^k = Az^{1-m}$, m étant un nombre poſitif.

2°. que par la même raiſon, en ſuppoſant z fort grand, $zz\Phi z$ doit être $= Bz^{1+m'}$, m' étant poſitif; le tout afin que l'intégrale dans le premier cas ſoit $= Az^m$, z étant très petit, & dans le ſecond $= Bz^{-m}$, z étant infini, ce qui rendra l'intégrale totale $\int -\frac{dx}{u}$ finie & conſtante.

14. On peut ajoûter que lorsque $u = o$, il eſt néceſſaire que z' ſoit $= o$, afin que le tems $\int -\frac{dx}{u}$ ſoit $= o$ lorsque $u = o$, & qu'il commence à $z = o$; car, ſi z n'étoit pas $= o$ lorsque $u = o$, l'aire $\int -\frac{dx}{u}$ pourroit n'être pas conſtante, puisqu'elle commenceroit ou du moins pourroit commencer à différentes valeurs de z; d'où il s'enſuit, que ϱ' doit être tel, non ſeulement qu'il ſoit $= o$ lorsque $x = o$, mais qu'il ne ſoit $= o$ que quand $x = o$.

15. Soit maintenant, pour généraliſer s'il eſt poſſible la formule de l'art. 6. $p = u^{m-q}\left(\frac{\Phi u^m}{\varrho'}\right) - u^{m-q} \times \left(\frac{u^m}{\varrho'}\right)^k \times X$,

m, q, k étant des indéterminées, ϱ' une fonction quelconque de x, & ξ, X des fonctions inconnues de x, on aura en faiſant $\frac{u^m}{\varrho'} = z$, ce qui donne $\frac{du}{u} = \frac{d\varrho'}{m\varrho'} - \frac{dz}{mz'}$, l'équation

$dx\Phi z$

$$\frac{dx\Phi z}{\xi} - z^k X dx + \frac{d\varrho}{m\varrho}\cdot\varrho^{\frac{2-mq}{m}} z^{\frac{2-mq}{m}} + \frac{dz}{mz}\varrho^{\frac{2-mq}{m}} z^{\frac{2-mq}{m}} = 0;$$

d'où faiſant évanouir les deux termes du milieu on a

$$k = \frac{2-mq}{m},\quad X = -\frac{d\varrho}{m}\times\varrho^{\frac{2-mq}{m}-1};\quad \&$$

$$dx = -\frac{\xi dz}{\Phi z.\ mz}\varrho^{\frac{2-mq}{m}} z^{\frac{2-mq}{m}};\ \text{donc}\ \frac{dx}{u}\ \text{ou}$$

$$\frac{dx}{\varrho'^{\frac{1}{m}} z^{\frac{1}{m}}} = -\frac{\xi dz}{mz\Phi z}\varrho^{\frac{1-mq}{m}} z^{\frac{1-mq}{m}};\ \text{donc il faut que}\ \xi\ \text{ſoit}$$

$B = \varrho^{\frac{-1+mq}{m}}$ pour que $\frac{dx}{u}$ ne ſoit exprimé qu'en dz & en z.

16. Donc on aura l'équation générale

$$p = u^{mq}\frac{\left(\Phi\frac{u^m}{\varrho'}\right)}{B\varrho'^{-\frac{1}{m}+q}} - u^{mq}\times\left(\frac{u^m}{\varrho'}\right)^{\frac{2-mq}{m}}\times \frac{d\varrho'}{mdx}\left(\varrho'^{\frac{2-mq}{m}-1}\right),$$

qui ſe réduit à

$$p = u^{mq}\frac{\Phi\left(\frac{u^m}{\varrho'}\right)}{B\varrho^{-\frac{1}{m}+q}} - \frac{u^2 d\varrho'}{\varrho' m dx}.$$

17. Comme m eſt indéterminée, ſoit ſuppoſé pour plus de ſimplicité $m = 1$, & on aura $p = \frac{u^q \Phi \frac{u}{\varrho'}}{B\varrho'^{q-1}} - u^2 \times \frac{d\varrho}{\varrho\, dx}$; & en effet l'équation $p\,dx + u\,du = 0$, donne en ce cas

$$\frac{u^q \Phi z\, dx}{B\varrho'^{q-1}} - \frac{u^2 d\varrho}{\varrho} + u\,du = 0,$$

ou $\frac{u^{q-2}\Phi z.\, dx}{B\varrho'^{q-1}} + \frac{dz}{z} = 0$, &

$$\frac{dx}{u} = -\frac{dz}{z} \cdot \frac{B\varrho'^{q-1}}{u^{q-1}\Phi z} = -\frac{dz}{z} \times \frac{B}{z^{q-1}\Phi z}, \quad \text{donc \&c.}$$

nous verrons dans un moment que la formule de la valeur de p, qui donne ce réſultat, n'eſt pas au fond plus générale que celle de l'art. 6, quoiqu'elle le paroiſſe davantage; mais nous nous ſommes propoſé d'expoſer dans ce mémoire les pas ſucceſſifs que nous avons faits pour arriver à la formule générale qu'on trouvera plus bas art. 20. nous avons cru que l'expoſé & le détail de notre marche pourroit être de quelque utilité aux Géometres.

18. Avant donc que d'en venir à cette formule, nous remarquerons qu'on peut encore généraliſer le calcul en cette ſorte; ſoit

$$p = u^{mq} \frac{\Phi\left(\frac{u^m}{\varrho'}\right)}{\xi} - u^{mq-1}.\, u^{m\lambda} z^k X,$$

on aura

$$\frac{dx\Phi z}{\xi} - \varrho^{\frac{1}{m}-m\lambda} z^{\frac{1}{m}-m\lambda} z^k X\,dx + \left(\frac{d\varrho}{m\varrho} + \frac{dz}{mz}\right)\varrho^{\frac{2-mq}{m}} z^{\frac{2-mq}{m}} = 0,$$

d'où

d'où l'on tire en faiſant évanouir le terme du milieu $z^{\lambda+k} = z^{\frac{2-mq}{m}}$, d'où $k = z^{\frac{2-mq}{m}-\lambda}$, $X = -\frac{d\varrho}{m} \times \varrho^{\frac{2-mq}{m}-1-\lambda}$, & $\frac{dx}{u} = -\frac{\xi}{\Phi z} \times \frac{dz}{mz} \varrho^{\frac{1-mq}{m}} z^{\frac{1-mq}{m}}$; donc ξ doit être $= B\varrho^{\frac{-1+mq}{m}}$;

donc $p = u^{mq} \frac{\Phi \frac{u^m}{\rho'}}{B\rho'^{q-\frac{1}{m}}} - \frac{u^2 d\rho'}{m\rho' dx}$ formule qui eſt la même que la précédente.

19. Elle paroit d'abord plus générale que la formule trouvée ci-deſſus $p = \frac{u^2}{\rho'} \Phi \frac{u}{\rho'} - \frac{u^2 d\rho'}{\rho' dx}$; mais il eſt facile de ſe détromper; en effet ſoit $\rho'^{\frac{1}{m}} = \rho$ on aura $\Phi\left(\frac{u^m}{\rho'}\right) \times \frac{1}{B} = \frac{1}{B}\Phi\left(\frac{u^m}{\rho^m}\right) = \Phi' \frac{u}{\rho}$; $\frac{u^{mq}}{\rho'^q} = \left(\frac{u}{\rho}\right)^m$; $\frac{d\rho'}{m\rho'} = \frac{d\rho}{\rho}$; donc la formule

$$p = \frac{u^{mq}\Phi\left(\frac{u^m}{\rho'}\right)}{B\rho'^{q-\frac{1}{m}}} - \frac{u^2 d\rho'}{m\rho' dx} = \frac{u^m}{\rho^m} \times \rho \times \Phi'\left(\frac{u}{\rho}\right) - \frac{u^2 d\rho}{\rho dx},$$

ou $\rho\Delta\left(\frac{u}{\rho}\right) - \frac{u^2 d\rho}{\rho dx}$; or la formule trouvée ci-deſſus $p = \frac{u^2}{\varrho}\Phi\left(\frac{u}{\varrho}\right) - \frac{u^2 d\varrho}{\varrho dx}$ ſe change aiſément en $p = \varrho\Delta\frac{u}{\varrho} - \frac{u^2 d\varrho}{\varrho dx}$ puisque $\frac{u^2}{\varrho}\Phi\left(\frac{u}{\varrho}\right) = \varrho \cdot \frac{u^2}{\varrho^2}\Phi\left(\frac{u}{\varrho}\right) = \varrho\Delta\left(\frac{u}{\varrho}\right)$. Donc &c.

20. Mais voici une méthode très générale & très ſimple pour avoir la valeur de p; on conſidérera que le tems t ou $\int -\frac{dx}{u}$, pour être toujours conſtant & fini, doit être égal à une fonction de u & de x, qui ſoit $= o$ quand $u = o$, & qui ne ſoit ni infinie ni $= o$, mais finie & conſtante, quand $x = o$, u étant alors finie; on prendra donc pour exprimer le tems t, une telle fonction à volonté de u & de x, ce qui ſe peut faire d'une infinité de manieres (comme il eſt évident;) Soit $A\,dx + B\,du$ la différentielle de cette fonction on aura $-\frac{dx}{u} = A\,dx + B\,du$; donc $-dx - A\,u\,dx = B\,u\,du$; & à cauſe de $p = -\frac{u\,du}{dx}$, on aura $p = +\frac{1 + A\,u}{B}$.

21. Soit par exemple $t = \Delta\left(\frac{u}{\xi}\right)$; (en prenant $\Delta\left(\frac{u}{\xi}\right)$ telle qu'elle ait les conditions requiſes,) on aura

$$A = -\frac{d\xi \cdot u}{\xi^2\,dx} \times \Gamma\left(\frac{u}{\xi}\right); \qquad B = \frac{1}{\xi} \times \Gamma\,\frac{u}{\xi};$$

donc $p = +\xi\,\Gamma\left(\frac{u}{\xi}\right) - \frac{u^2\,d\xi}{\xi\,dx}$, formule qui revient à celle de l'art. 6. puisque $\frac{u\,u\,\Phi\left(\frac{u}{\xi}\right)}{\xi} = \xi\left(\frac{u^2}{\xi^2}\right)\Phi\left(\frac{u}{\xi}\right) = \xi\,\Gamma\left(\frac{u}{\xi}\right)$, comme on l'a déjà vû plus haut.

22. Soit $p = g\xi' + \Phi u$, ξ' étant une fonction inconnue de x, on aura en général $g\xi' + \Phi u = +\frac{1 + A\,u}{B}$; donc

donc $A = \frac{g\xi' B + \Phi u . B - 1}{u}$; donc puisque $A\,dx + B\,du$ eſt une différentielle complette (hyp.) il eſt clair que

$$\frac{g\xi' B\,dx}{u} + \frac{B\,dx\,\Phi u}{u} - \frac{dx}{u} + B\,du$$

doit être une différentielle complette.

23. On peut voir par le calcul ſuivant un eſſai de la bonté de cette formule. Soit $t = \int \frac{dz}{F + Gz + Hzz}$; z étant $= \frac{u}{\xi}$; la valeur ſuppoſée à t aura en ce cas les conditions requiſes, & on aura $\frac{dx}{u} = \left(\frac{du}{\xi} - \frac{u\,d\xi - dx}{\xi^2\,dx}\right) : \left(F + \frac{Gu}{\xi} + \frac{Hu^2}{\xi^2}\right)$; par conſéquent $B = + \frac{1}{F\xi + Gu + \frac{Hu^2}{\xi^2}}$; donc p, ou $+ \frac{1}{B} + \frac{Au}{B} = + F\xi + Gu + \frac{Hu^2}{\xi} - \frac{u^2\,d\xi}{\xi\,dx}$; donc ſi on ſuppoſe $p = g\xi' + Gu + Ku^2$, on aura $g\xi' = + F\xi$; $+ \frac{H}{\xi} - \frac{d\xi}{\xi\,dx} = K$; $\Phi u = Gu + Ku^2$; donc la quantité $\frac{g\xi' B\,dx}{u} + \frac{B\,dx}{u}\Phi u - \frac{dx}{u} + B\,du$ qui doit être une différentielle complette, deviendra

$$+ \frac{\frac{F\xi\,dx}{u} + \frac{Gu\,dx}{u} + \frac{Ku^2\,dx}{u}}{F\xi + Gu + \frac{Hu^2}{\xi}} - \frac{dx}{u} - \frac{du}{F\xi + Gu + \frac{Hu^2}{\xi}};$$

qui ſe réduit, en mettant pour K ſa valeur $+\frac{H}{\xi}-\frac{d\xi}{\xi dx}$, & en faiſant $\frac{u}{\xi}=z$, à la quantité $\frac{dz}{F+Gz+Hzz}$, la quelle eſt en effet une différentielle complette, & a d'ailleurs les propriétés exigées ci-deſſus, ſavoir d'être $=0$ quand $z=0$, & finie & conſtante quand $z=\infty$.

24. On vient de voir que t peut être $=$ à une fonction de x & de u qui ſoit finie quand $x=0$, & nulle quand $u=0$, donc ſi on fait $t=\Delta\left(\frac{u}{\xi}\right)$; il faut que $\Delta\left(\frac{u}{\xi}\right)$ rempliſſe ces conditions; donc ſi on fait $\frac{u}{\xi}=Z$, il faudra que $\Delta\left(\frac{u}{\xi}\right)$. Soit $=\int\psi z\,dz$, ψz étant (art. 13.) une quantité qui, lorsque Bz^m, m étant poſitif, ou $=Bz^{-q}$, q étant <1, & qui lorsque $z=\infty$, ſoit $=Cz^{-s}$, s étant >1.

25. Puisque t ou $\int-\frac{dx}{u}=\Delta\left(\frac{u}{\xi}\right)$; donc

$$dt=\left(\frac{\delta u}{\xi}-\frac{u\,d\xi}{\xi^2 dx}\,\delta x\right)\Gamma\left(\frac{u}{\xi}\right);$$

par conſéquent puisque δt doit être égal $=0$, on aura $\frac{\delta u}{u}=\frac{d\xi\,\delta x}{\xi dx}$; ce qu'on peut voir d'ailleurs en conſidérant, que t ſera le même pour deux arcs x & $x+\delta x$, ſi $\frac{u}{\xi}$ eſt le même pour ces deux arcs, c. à d. ſi $\delta\left(\frac{u}{\xi}\right)=0$, ou $\frac{\delta u}{u}=\frac{d\xi\,\delta x}{\xi dx}$, main-

maintenant la condition de $\delta t = o$, donne $\frac{dx}{u} = d\frac{(x+\delta x)}{u+\delta u}$, d'où $\frac{\delta u}{u} = \frac{d\delta x}{dx}$; donc $\frac{d\delta x}{dx} = \frac{d\xi\delta x}{\xi dx}$, & $\frac{d\delta x}{\delta x} = \frac{d\xi}{\xi}$; donc on aura comme ci-deſſus $\delta x = \xi l\omega$, $d\omega$ étant une conſtante; donc $\xi = o$ quand $x = o$, & $d\xi = dx$ lorsque $x = o$, au moins en ſuppoſant que δu ne ſoit pas $= o$ quand $x = o$.

26. Une autre raiſon pour laquelle ξ doit être $= o$ quand $x = o$, c'eſt que la quantité $t = \Delta\left(\frac{u}{\xi}\right)$ doit être telle qu'elle ſoit $= o$ quand $u = o$, & finie & conſtante quand $x = o$, or cela ne ſe peut faire que par la condition que ξ ſoit nulle quand $x = o$; autrement, comme u eſt variable quand $x = o$, ſi ξ étoit finie alors, $\Delta\left(\frac{u}{\xi}\right)$ ſeroit variable, quand $x = o$, ce qui ne doit pas être; & ſi ξ étoit infinie, $\Delta\left(\frac{u}{\xi}\right)$ ſeroit ou pourroit être être $= o$, (ou finie & variable) quand $x = o$, ce qui ne doit pas être non plus.

27. Quant la condition de $\frac{d\xi}{dx} =$ à une quantité finie a lorsque $x = o$, elle ne paroit pas ſi eſſentiellement néceſſaire; car la condition que $t = \int \frac{dz}{z\,\Phi z}$ ſoit fini lorsque $z = \infty$, (art. 13.) donne ſeulement, en faiſant $z = y^{-1}$, $\int \frac{dy}{\Phi\frac{1}{y}}$ finie quand $y = o$; mais la condition que $\frac{d\xi}{dx}$ ſoit $= a$ quand $x = o$, demande que

quand

quand x eſt infiniment petite, ξ ſe réduiſe à une quantité de cette forme ax, or cette derniere condition ne paroit pas abſolument néceſſaire, il eſt ſeulement indiſpenſable que $\xi = o$ quand $x = o$; par exemple ſi ξ eſt $= Ax^2 + Bx^3$, & $t = \int \frac{dz}{a + bz + cz^2}$, la courbe ſera tautochrone, quoique $\frac{d\xi}{dx}$ ſoit $= o$, quand $x = o$, de même ſi $\xi = A\sqrt{(x)} + Bx^2$, t conſervant la même valeur, la courbe ſera tautochrone quoique $\frac{d\xi}{dx}$ ſoit $= \infty$ lorsque $x = o$. En un mot il paroit ſuffire pour le tautochroniſme que $\xi = o$ lorsque $x = o$, & que t ſoit exprimé alors par une fonction finie & conſtante laquelle ſoit auſſi $= o$ quand $u = o$.

28. Nous avons vu que pourque $\int \frac{dz}{zz\Phi z}$ ſoit $= o$ quand $z = o$, & finie conſtante quand $x = o$; il faut 1°. que z ſoit infinie quand $x = o$, 2°. que $z^2 \Phi z$ (art. 12.) puiſſe être réduite quand $z = o$, à une quantité de cette forme Bz^q, q étant $= o$, ou < 1 ; & quand $z = \infty$ à une quantité de cette forme Az^k, k étant > 1, donc on peut ſuppoſer $zz\Phi z = Bz^q \ldots + Az^k$; donc puisque $p = \xi(zz\Phi z) - \frac{u^2 d\xi}{\xi dx}$, on peut ſuppoſer

$$p = \xi(Bz^q + \ldots + Az^k) - \frac{uu d\xi}{\xi dx} = \frac{u}{z}(Bz^q + \ldots Az^k) - zz\xi\frac{d\xi}{dx},$$

on ſent bien au reſte que cette formule n'eſt qu'un cas particulier des valeurs infiniment variées, qu'on peut ſuppoſer à volonté à la quantité $zz\Phi z$.

29. Pourque t ſoit fini & conſtant quand $x = o$, il faut comme nous venons de le voir que $t = \int \frac{dz}{Z}$, z étant une fonc-

tion

tion de u & de x qui ſoit $= o$ quand $u = o$, & infinie quand $x = o$; & Z une fonction de z qui ſoit $= C$ ou $B z^q$ quand $z = o$, q étant négatif ou < 1, & $= A z$ quand $z = \infty$, q étant > 1. De là il réſulte que, ſi on fait $t = \int \frac{dz}{Z} + \int \frac{dz'}{Z'} +$ &c. à l'infini, z & z' &c. étant des fonctions quelconques de u & de x & Z, Z' &c. des fonctions de z, z' &c. formées ſuivant ces conditions, on aura $t =$ à une conſtante; & ſi on ajoûte de plus à cette valeur (pour la rendre auſſi générale qu'il eſt poſſible) la quantité quelconque $\Phi(u, x)$ telle qu'elle ſoit $= o$, quand $x = o$ & quand $u = o$, on aura encore une valeur plus générale de t; ce qui conduit à une formule infiniment générale.

30. Il eſt aiſé de voir que $p = \xi \Gamma\left(\frac{u}{\xi}\right) - \frac{u u d\xi}{\xi dx}$ ne ſauroit être $=$ à $\xi'' + \Phi u$, que dans le cas où l'on aura $\Gamma \frac{u}{\xi} = F = G \frac{u}{\xi} + \frac{H u^2}{\xi^2}$. Mais eſt clair par ce qui précéde que l'on peut ſuppoſer par exemple $t = \Delta\left(\frac{u}{\xi}\right) + \Gamma\left(\frac{u}{X}\right) +$ &c. $+ \Phi(u, x)$ ou $dt = \frac{dz}{Z} + \frac{dz'}{Z'} + \frac{dz''}{Z''} +$ &c. $+ \rho\, lx + \sigma\, du$; d'où l'on voit que, à cauſe de $dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{du} du$ &c. on aura les équations, $A = \rho + \frac{dz}{dx . Z} + \frac{dz'}{Z' dx} + \frac{dz''}{Z'' dx}$ &c. $B = \sigma + \frac{dz}{du Z} + \frac{dz'}{du Z'} + \frac{dz''}{du Z''}$ &c. Donc à cauſe de $p = \frac{1 + A u}{B}$,

on aura

$$p = \frac{\left(\varrho Z Z' Z'' + \frac{dz}{dx} Z' Z'' + \frac{dz'}{dx} Z Z'' + \frac{dz''}{dx} Z Z'\right) u + Z Z' Z''}{\sigma Z Z' Z'' + \frac{dz}{du} Z' Z'' + \frac{dz'}{du} Z Z'' + \frac{dz''}{du} Z Z'}.$$

31. Si donc on a $p = \xi'' + \Phi u$, on tâchera de déterminer les quantités ϱ, σ, z, z', z'', Z, Z', Z'' &c. à être telles que la formule précédente soit = à cette fonction ; ce qui ouvre un vaſte champ aux recherches des analyſtes.

32. Soit, par exemple, pour abréger $\varrho = 0$, $\sigma = 0$, c. à d. $\Phi(u, x) = 0$, $z' = 0$, $z'' = 0$ & $z = \frac{\Delta u}{\xi}$, on aura $Z = B. \frac{\Delta u^{-q}}{\xi^q} + \text{&c.} + A \frac{\Delta u^{-k}}{\xi^k}$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{d\xi}{\xi^2 dx} \Delta u$; $\frac{dz}{du} = \frac{d\Delta u}{du . \xi}$ donc $p = Z \xi \frac{du}{d\Delta u} - \frac{d\xi}{\xi dx} \times \frac{\Delta u du}{d\Delta u}$

$$= \frac{\xi du}{d\Delta u} \left[\frac{B \Delta u^{-q}}{\xi q} + \ldots . \frac{A \Delta u^{-k}}{\xi^k}\right] - \frac{u d\xi}{\xi dx} \cdot \frac{du \Delta u}{d\Delta u}.$$

On ſent qu'il ſeroit facile de pouſſer beaucoup plus loin ces recherches que j'abandonne à d'autres.

33. Si on fait $t = \Delta(u, x)$ avec les conditions énoncées ci-deſſus, on aura $\delta t = 0$, & $A \delta x + B \delta u = 0$, ou $\delta u = -\frac{A \delta x}{B}$, de plus $\frac{\delta u}{u} = \frac{d\delta x}{dx}$; donc $-\frac{A \delta x}{B} = \frac{u d\delta x}{dx}$; donc $-\frac{A dx}{B} = \frac{d\delta x}{dx}$; donc $\delta x = d\omega e^{\int -\frac{A dx}{B}}$; donc

$\delta u =$

$\delta u = -\frac{A u d\omega}{B} c^{\int -\frac{A dx}{B}}$; d'où il eſt clair 1°. que $c^{\int -\frac{A dx}{B}}$ doit être $= o$ lorsque $x = o$, afin que δx ſoit alors $= o$; 2°. que, ſi δu n'eſt pas alors $= o$, $-\frac{A}{B}$ doit être $= \infty$ lorsque $x = o$. Mais la condition que δu ne ſoit pas $= o$, ne paroit pas abſolument néceſſaire; comme il réſulte des art. 25 & 27. ci-deſſus.

34. Au lieu de faire $\int -\frac{dx}{u} = \Delta(u, x)$ avec les conditions requiſes, on pourroit croire qu'il ſuffit de ſuppoſer $\int \frac{dx}{u} = \Delta(u, x) + C$, C étant une conſtante, & $\Delta(u, x)$ une telle fonction de x & de u, qu'elle ſoit $= o$ quand $x = o$ & quand $u = o$. Dans cette équation, qui ſeroit beaucoup plus ſimple que les précédentes, $\int \frac{dx}{u}$ repréſenteroit non pas les tems t employés à parcourir les différentes parties de l'arc x jusqu'au point le plus bas, mais les complémens de ces tems. Mais il eſt aiſé de voir que cette équation $\int -\frac{dx}{u} = \Delta(u, x) + C$, doit être rejettée; parce qu'en faiſant $x = o$, on auroit $\int \frac{dx}{u} = C$, ce qui ne doit pas être, puisque $\int \frac{dx}{u}$ doit être alors $= o$; & qu'en ſuppoſant $C = o$, on auroit $\int \frac{dx}{u} = o$ lorsque $u = o$, ce qui ne doit pas être non plus.

25. Cependant, ſi on veut que les tems t ſoient proportionels à $\varphi(x)$, on peut très bien ſuppoſer $\int \frac{dx}{u} = \Delta(u, x) + \varphi x$,

$\Delta(u,x)$ étant $=o$ lorsque $x=o$, & lorsque $u=o$, pourvu que Φx ſoit auſſi $=o$ lorsque $x=o$; en ce cas on aura $\frac{dx}{u}=A\,dx+B\,du+X\,dx$, X étant une fonction de x;

ou $dx=A\,u\,dx+B\,u\,du+X\,u\,dx$

& p ou $-\frac{u\,du}{dx}=-\frac{1+A\,u+X\,u}{B}$; formule générale de la valeur de p, quand les tems ſont comme $\int X\,dx$. Il faut ſeulement remarquer 1°. que comme $\Delta(u,x)$ eſt $=o$ lorsque $u=o$ & $x=o$, & que $\int\frac{dx}{u}$ doit toujours aller en augmentant depuis $x=o$, jusqu'à $u=o$, Φx doit être tel que $\Phi x+\Delta(u,x)$ aille toujours en augmentant depuis $x=o$ jusqu'à $u=o$. 2°. que cette formule ne peut ſervir (art. précéd.) pour les cas du tautochronisme, c. à d. pour le cas ou Φx eſt $=$ à une conſtante C.

36. A l'occaſion de ces ſolutions que je viens de donner du probleme des tautochrones je dirai un mot des tautochrones dans les milieux qui réſiſtent peu; on a dans ce cas (en appellant y les abſciſſes répondantes aux arcs x) $g\,dy+\alpha\Phi u\,dx+u\,du=o$; ſi α étoit $=o$, on auroit $g\,dy=A\,x\,dx$, comme l'on ſait, & $u\,u=\frac{A\,g}{2}(BB-x\,x)$; ſuppoſons $\Phi u=u^m$, m étant $=$ ou $>o$, comme il eſt évident que cela doit être, car autrement la réſiſtance ſeroit d'autant plus grande que u ſeroit plus petite, ce qui ſeroit abſurde, on aura $g\,dy+\alpha N(BB-x\,x)^{\frac{m}{2}}\,dx+u\,du=o$; ſoit $dy=A\,x\,dx+C\,x^q\,dx$, C & q étant des conſtantes indéterminées, on aura

$$u^2=\frac{A\,g}{2}(BB-xx)+\frac{g\,C}{q+1}(B^{q+1}-x^{q+1})-\int\alpha N(BB-xx)^{\frac{m}{2}}\,dx;$$

d'où

d'où il eſt aiſé de tirer la valeur de C & celle de q par les méthodes connues. V. Euler Méchan. T. II. p. 404.

37. Je ferai ſeulement ici deux remarques

1°. Comme m n'eſt jamais négatif, $\int \alpha N (BB - xx)^{\frac{m}{2}} dx$ n'eſt jamais $> \int \alpha N dx = \alpha N (B - X)$; d'où il s'enſuit que $BB - xx$ ou $(B - x)(B + x)$ eſt toujours beaucoup plus grand que $\alpha N (B - x)$ & à plus forte raiſon que $\int \alpha N (BB - xx)^{\frac{m}{2}} dx$ lorsque m n'eſt pas $= 0$; par la même raiſon, dans la quantité $B^{q+1} - x^{q+1}$, q n'eſt jamais < 0; en ſorte que $BB - xx$ eſt toujours beaucoup plus grand que $c (B^{q+1} - x^{q+1})$ & par conſéquent que le développement de $\frac{dx}{\sqrt{(u)}}$ en ſérie n'entraine aucun inconvénient, parce que $\frac{dx}{\sqrt{(u)}}$ étant $= \frac{dx}{\sqrt{(BB - xx + k)}} = \frac{dx}{\sqrt{(BB - xx)}} - \frac{k dx}{2(BB - xx)^{\frac{3}{2}}}$ le terme k eſt toujours beaucoup plus petit que $BB - xx$.

2°. Si, au lieu de ſuppoſer $dy = Ax dx + Cx^q dx$, on ſuppoſoit, comme il ſemble très naturel, $dx = \frac{B dy}{\sqrt{y}} + Ey^k dy$, on tomberoit dans un réſultat très fautif en certains cas. Car on auroit alors $g dy + \alpha \Phi u dx + u du = 0$, ou $u du + g dy + \frac{B dy}{\sqrt{y}} \times \alpha \Phi (k - y) = 0$; ou $u = g (k - y) - \int \alpha (k - y)^{\frac{m}{2}} \frac{dy}{\sqrt{(y)}}$; donc $\frac{dx}{u} = \frac{\frac{B dy}{\sqrt{y}} + Ey^k dy}{\sqrt{\left(g (k - y) - \int \alpha (k - y)^{\frac{m}{2}} \frac{dy}{\sqrt{(y)}}\right)}}$; or dans le

le radical que cette quantité renferme, le terme $\int a\,(k-y)^{\frac{m}{2}}\frac{dy}{\sqrt{y}}$ n'eſt jamais $> \int \frac{a\,dy}{\sqrt{y}}$ c. à d. $> \int a\,(\sqrt{k}-\sqrt{(y)})$; donc, puiſque $k-y = (\sqrt{k}-\sqrt{(y)}) \times (\sqrt{k}+\sqrt{y})$, il eſt viſible que $k-y$ eſt toujours beaucoup plus grand que $\int a\,(k-y)^{\frac{m}{2}}\frac{dy}{\sqrt{y}}$; ſuppoſons donc $m =$ ou < 1, en ſorte que $m = 1-\omega$, ω étant o ou poſitif & < 1, il eſt aiſé de voir que $\frac{B}{\sqrt{(y)}\,(k-y)^{\frac{1}{2}}} \times \int (k-y)^{\frac{m}{2}}\frac{dy}{\sqrt{y}}$ ſera de l'ordre de $\frac{1}{y^{\frac{1-m}{2}}} = \frac{1}{y^{1+\frac{\omega}{2}}}$, ω étant poſitif ou $= o$, donc $\frac{y^k}{\sqrt{(k-y)}}$ qui eſt de l'ordre de $y^{k-\frac{1}{2}}$, doit être de l'ordre de $y^{-1-\frac{\omega}{2}}$; donc $k = -\frac{1}{2} - \frac{\omega}{2}$; donc $dx = \frac{B\,dy}{\sqrt{(y)}} + \frac{E\,dy}{\sqrt{(y)} \times y^{\frac{\omega}{2}}}$ & $x = A\sqrt{(y)} + \frac{E\,y^{\frac{1}{2}-\frac{\omega}{2}}}{\frac{1}{2}-\frac{\omega}{2}}$. Or cette ſolution eſt évidemment fautive, 1°. parceque dans le cas où $m = o$ & par conſéquent $\omega = 1$, le coëfficient $\frac{E}{\frac{1}{2}-\frac{\omega}{2}} = \infty$, au lieu qu'il doit être très petit. 2°. parce que ω étant poſitif & < 1, le terme $E\,y^{\frac{1}{2}-\frac{\omega}{2}}$ n'eſt pas très petit par rapport à $A\sqrt{(y)}$, lorsque y eſt ſuppoſé très petit; puiſque le rapport de ces termes

termes eſt $\frac{E}{A y^{\frac{\epsilon}{2}}}$; cependant la ſolution éxige que le terme ajoûté à $A\sqrt{y}$ ſoit trés petit; donc la ſolution ſeroit fautive; donc il ne faut pas chercher la valeur de x en y, mais celle de y en x.

38. Voici le dénouement de ce paradoxe. Soit d'abord $y = Axx + Cx^{k'}$; & ſoit $k' = 1$, ce qui eſt le cas de $m = 0$, & de $\omega = 1$; on aura $y = Ass + Cs$; donc $ss + \frac{Cs}{A} = \frac{y}{A}$; donc $s = -\frac{C}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{A} + \frac{c^2}{4A^2}\right)}$; or on ne peut réduire $\sqrt{\left(\frac{y}{A} + \frac{C^2}{4A^2}\right)}$ à deux termes $\frac{c}{2A} + \frac{y}{C}$, que dans le cas où y eſt très petit; ni à deux termes $\frac{\sqrt{y}}{A} + \frac{C^2\sqrt{A}}{2.4A^2\sqrt{(y)}}$, que dans le cas où y eſt grand par rapport à $\frac{C}{4A}$. Ainſi, dans aucun cas, l'équation $y = Axx + Cx$ ne peut ſe réduire à cette forme $x = B\sqrt{(y)} + Cy^{q'}$, q' étant une quantité poſitive comme il le doit être; l'équation $y = Axx + Cx$ donne $x = \sqrt{\left(\frac{y - Cx}{A}\right)}$, & ſi on mettoit pour x ſa valeur approchée $B\sqrt{(y)}$ ou $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{A}}$, on auroit $x = \sqrt{\left(\frac{y}{A} - \frac{C\sqrt{y}}{A\sqrt{(A)}}\right)}$, & en réduiſant en ſérie $x = \frac{\sqrt{(y)}}{\sqrt{A}} - \frac{C}{2A}$, ce qui ne ſe peut, puiſque x doit être $= 0$ quand $y = 0$.

39. Soit en général $y = Axx + Cx^{k'}$, on aura $k' = q + 1$; or $q + 1$ doit être $= 2 \times \frac{m}{2} + 1 = m + 1$, d'où

d'où $q = m = 1 - \omega$; & $k' = q + 1 = 2 - \omega$,

donc $x = V\left(\frac{y}{A} - \frac{Cx^{k'}}{A}\right) = V\left(\frac{y}{A} - \frac{Cy^{\frac{k'}{2}}}{A.A^{\frac{k}{2}}}\right) =$, en

réduiſant en ſérie,

$$\frac{V(y)}{VA} - \frac{Cy^{\frac{k'-1}{2}}}{2A.A^{\frac{k'-1}{2}}} = \frac{V(y)}{VA} - \frac{C}{2A}\,\frac{y^{\frac{1-\omega}{2}}}{A^{\frac{1-\omega}{2}}}$$

équation qui s'accorde avec celle qu'on a trouvée précédemment art. 37. mais qui n'en eſt pas plus exacte.

40. On trouvera dans la Méchanique de M. Euler Tom. II. art. 742. quelques autres réflexions ſur le cas où la ſolution de ce probleme eſt imparfaite, même en prenant $y = Axx + Cx^{k'}$, & non $x = AVy + By^{k}$. M. Euler remarque avec raiſon que cette ſolution eſt fautive toutes les fois que m eſt < 1. Il faut cependant obſerver, que la ſolution eſt bonne quand $m = 0$, & que l'équation $y = Axx + Bx$ qu'on trouve pour ce cas, eſt la vraie équation de la courbe, même en ne ſuppoſant pas la réſiſtance très petite.

41. Il n'eſt pas difficile de voir que, ſi la réſiſtance eſt $Au^m + Bu$, la tautochrone aura pour équation $y = Axx + Cxx + Qx^{m+1}$, d'où l'on voit qu'elle ſera la même, ou du moins aura la même équation que dans le cas de $B = 0$. Mais, quoiqu'on ait trouvé que la tautochrone, lorſque la réſiſtance eſt $F + Gu + Ku^2$, a la même équation que quand la réſiſtance eſt $F + Ku^2$, cependant, il n'en faut pas conclure en général que la tautochrone, dans le cas où la réſiſtance eſt $Au^m + Bu$, ſoit la même que dans le cas où la réſiſtance eſt Au^m; car la quantité

$$\gamma\xi^{l}\frac{dx}{u}.B + \frac{Bdx\Phi u}{u} - \frac{dx}{u} + Bdu$$ trou-

trouvée ci-deſſus art. 22. doit être une différentielle complette; or, quand on aura trouvé une quantité B qui ſatisfait à cette équation en ſuppoſant $\Phi u = Au^m$; il n'eſt pas clair que laiſſant ξ' tel qu'il eſt, on trouvera une valeur de B convenable en faiſant $\Phi u = Au^m + Bu$. En effet, ſuppoſons qu'on ait trouvé B pour le cas où la réſiſtance eſt Φu, & ſoit $B + \mathfrak{C}$ la valeur de B lorsque la réſiſtance eſt $\Phi u + A'u$, on auroit donc (en ſuppoſant que ξ' demeure le même dans les deux cas)

$$\gamma\xi' \frac{\mathfrak{C}dx}{u} + \frac{\mathfrak{C}dx\Phi u}{u} + A'Bdx + \mathfrak{C}du$$

une différentielle complette; il faudra par cette condition déterminer $\mathfrak{C}$, & il faudra de plus que $\xi'' + \Phi u + A'u$ ſoit $=$ & identique à $\frac{1 + Au}{B + \mathfrak{C}}$.

42. Par les méthodes connues juſqu'ici, on ne peut gueres déterminer B en général dans le problème de l'art. 22. que lorsque l'équation $\gamma\xi' \frac{dx}{u} + \frac{dx\Phi u}{u} + du = 0$ peut être intégrée; cependant il eſt certain que ſi Φu eſt par exemple $= F + Du^2 + Eu$, (E n'étant pas $= 0$), l'équation dont il s'agit n'eſt point intégrable; & néanmoins on peut trouver dans ce cas la quantité B, comme on l'a vu ci-deſſus art. 23. Donc les méthodes pour trouver B, qui demandent que $\gamma\xi' \frac{dx}{u} + \frac{dx\Phi u}{u} + du = 0$, ſoit intégrable, ne ſont pas générales; auſſi eſt-il certain, comme nous pourrons le faire voir ailleurs, qu'on peut trouver B dans d'autres cas. Soit par exemple $\frac{d\eta}{dx} + \frac{X - \omega}{V} \times \frac{d\eta}{du} + \omega = 0$, X & V étant des fonctions de x & de u, & ω tout ce qu'on voudra, on

pourra trouver aiſément q, quoique l'équation $du + \frac{(X-\omega)\,dx}{V} = o$, ne ſoit pas aiſément intégrable; de même l'équation $\xi' + \Phi u = 1 + \frac{A\,u}{B}$, donne (en faiſant $A = \frac{dq}{dx}$; $B = \frac{dq}{du}$) $\frac{dq}{dx} - \left(\frac{\xi' + \Phi u}{u}\right)\frac{dq}{du} + \frac{1}{u} = o$; ce qui donneroit en comparant, $\frac{X - \frac{1}{u}}{V} = -\frac{\xi - \Phi u}{u}$; donc $V = nu$, & $\Phi u =$ à $\frac{b}{u}$; hypotheſe qui n'eſt point à la vérité dans la nature, mais qui fait voir qu'on peut trouver B quoique l'équation

$$\gamma\xi'\frac{dx}{u} + \frac{dx\,\Phi u}{u} + du = o,$$

ne ſoit pas intégrable. Mais en voilà aſſez ſur ce ſujet, que nous ne nous propoſons pas de traiter à fond quant à préſent.

43. Lorsque la courbe doit être tautochrone, la formule générale ou équation qui donne la valeur de k, devient, en faiſant $\lambda = o$, $k\zeta + \frac{d\,k}{dx} + \frac{u\,dk}{du} + \zeta\zeta + \frac{d\zeta}{dx} = o$; donc, ſi on fait $p = \xi'' + \Phi u$, on aura, à cauſe de $p = unk$, l'équation $k = \frac{\xi''}{u^2} + \frac{\Phi u}{u^2}$; d'où, en ſubſtituant, on aura une équation dans laquelle il n'y aura que ζ & ξ'' d'inconnues; & dans laquelle il ne ſe trouvera plus de du, or $\xi'' = \frac{g\,dy}{dx}$, en nommant y les abſciſſes de la courbe répondantes aux arcs x; par conſéquent, puisqu'on a l'équation

tion $kdx = -\frac{du}{u}$, on tirera de la premiere équation la valeur de u en x, ζ & ξ'', d'où, en ſubſtituant dans l'équation $kdx = -\frac{du}{u}$, ou $(\xi'' + \Phi u)\,dx + u\,du = 0$, on aura une équation en ξ'', ζ & x; il faut de plus que ζ ſoit tel que

$$\frac{\delta u}{u} = \frac{d\delta x}{dx} = \zeta e^{\int \zeta dx}\,\delta\omega = \zeta\,\delta x;$$

d'où l'on voit que u doit être une telle fonction de x, ξ'' & ζ, qu'en la différentiant & effaçant δx, elle ſoit $= u\zeta$; ce qui ſervira à faire évanouir ζ: ainſi il ne reſtera plus qu'une équation entre ξ'' & x, d'où l'on tirera ξ'' ou $\frac{dy}{dx}$. On voit donc qu'il n'eſt pas néceſſaire que l'équation $k\zeta + \frac{dk}{dx} + \frac{u\,dk}{du} + \zeta\zeta + \frac{d\zeta}{dx} = 0$ ſoit identique, comme la ſolution le ſuppoſe.

44. Cette réflexion peut ſervir à réſoudre l'objection ſuivante; en mettant dans l'équation $k\zeta + \frac{dk}{dx}$ &c. $= 0$, $-\frac{du}{u\,dx}$ à la place de k, & faiſant $dk = A\,dx + B\,du$, on auroit $-\zeta\frac{du}{u} + A\,dx + \zeta u B\,dx + \zeta\zeta dx + d\zeta = 0$, d'où $A\,dx = +\zeta\frac{du}{u} - \zeta u B\,dx - \zeta\zeta dx - d\zeta = 0$; donc, puiſque $A\,dx + B\,du$ eſt une différentielle complette, il s'enſuit que $\zeta\frac{du}{u}$ —

$-\zeta u\mathrm{B}dx - \zeta\zeta dx - d\zeta + \mathrm{B}du$ eſt une différentielle complette; donc auſſi $\zeta\frac{du}{u} - \zeta u\mathrm{B}dx + \mathrm{B}du$ doit être une différentielle complette; donc $\mathrm{B}c^{\int\zeta dx}d(uc^{\int-\zeta dx}) + \zeta\frac{du}{u}$ doit être une différentielle complette; donc, en faiſant $uc^{-\int\zeta dx} = t$, ce qui donne $u = tc^{\int\zeta dx}$, on aura $\mathrm{B}c^{\int\zeta dx}dt + \zeta\frac{dt}{t} + \zeta\zeta dx$ une différentielle complette; donc $\mathrm{B}c^{\int\zeta dx}dt + \zeta\frac{dt}{t}$ doit être une différentielle complette; donc cette différentielle doit avoir pour intégrale Φt; donc l'intégrale $\int\mathrm{A}dx + \mathrm{B}du$ eſt $\Phi t + \int\zeta\zeta dx - \int(\zeta\zeta dx + d\zeta) = \Phi t - \int\zeta = \Phi t - \zeta$; donc $k = \Phi(uc^{-\int\zeta dx}) - \zeta$, & par conſéquent $p = nuk = uu\Phi(uc^{-\int\zeta dx}) - uu\zeta$; ce qui differe de la valeur $uu\Phi\frac{(uc^{-\int\zeta dx})}{c^{\int\zeta dx}} - uu\zeta$ trouvée par la ſolution générale de l'article 6.

45. La réponſe à cette difficulté eſt que, quoique $\mathrm{A}dx + \mathrm{B}du$ doit être une différentielle complette, cependant ſi on a la quantité $\zeta\frac{du}{u} - \zeta u\mathrm{B}dx$ &c. $= \mathrm{A}dx$, cette quantité ou valeur de $\mathrm{A}dx$ étant ajoutée à $\mathrm{B}du$, ne doit pas donner pour cela une différentielle complette; parce que la quantité $\zeta\frac{du}{u} - \zeta u\mathrm{B}dx$ &c. n'eſt pas *identique* à $\mathrm{A}dx$, quoiqu'elle lui ſoit égale. Pour qu'on puiſſe ſubſtituer une valeur à $\mathrm{A}dx$ dans la différentielle complette $\mathrm{A}dx + \mathrm{B}du$, il

il faut que A ſoit égal (comme dans l'art. 22.) à une fonction de x & de u qui ne renferme point la différentielle du, comme il arrive ici.

46. Voilà les réflexions que m'a fait naître la formule dont M. de la Grange a bien voulu me faire part. Je ne doute point qu'on ne puiſſe pouſſer beaucoup plus loin cette théorie des tautochrones; mais je me contente d'avoir mis ſur la voie ceux qui croiront ma méthode aſſez ſimple & aſſez générale pour pouvoir en faire uſage, ſoit dans la ſolution complette de ce problème, ſoit dans pluſieurs autres recherches.

à Paris, ce 24 Avril 1767.

RECHERCHES DES FORCES

DONT LES CORPS CÉLESTES SONT SOLLICITÉS ENTANT QU'ILS NE SONT PAS SPHÉRIQUES.

PAR M. J. A. EULER.

Lorsqu'on détermine le mouvement progreſſif des corps céleſtes, on les regarde comme ſphériques; & on ſuppoſe qu'ils éprouvent de la gravité univerſelle les mêmes forces, que ſi toute leur maſſe étoit réunie dans leur centre d'inertie.

Mais, ſi un corps qui n'eſt pas ſphérique, eſt attiré vers un autre corps, ni la moyenne direction ne paſſe plus par ſon centre d'inertie, ni la force moyenne ne ſe trouve plus exactement en raiſon réciproque du quarré de la diſtance, quoique les forces dont chaque particule eſt ſolliçitée ſuivent cette loi.

Si la figure des corps céleſtes différoit énormement de la ſphérique, & qu'ils ne fuſſent pas extrémement éloignés entr'eux, l'aberration des forces ſollicitantes de cette loi pourroit devenir très conſidérable; mais, puisque les corps céleſtes ſont pour la plus-part aſſez exactement ſphériques, on ſe diſpenſe d'avoir égard à cette aberration, ſurtout lorsque les recherches ne roulent que ſur le mouvement progreſſif.

Mais, lorsqu'il s'agit de déterminer le mouvement de rotation de quelque planete, il eſt très eſſentiel de tenir compte de cette aberration; car, quelque petite qu'elle ſoit par rapport au mouvement progreſſif, ſon effet peut devenir très conſidérable à l'égard du mouvement de rotation.

C'eſt

C'eſt de là que tire ſon origine la préceſſion des équinoxes & la nutation de l'axe de la terre, comme M. d'Alembert l'a prouvé inconteſtablement; quoique l'aberration de la figure ſphérique ſoit à peine ſenſible dans la Terre.

Car, quelque petite qu'elle ſoit, la force dont la terre eſt pouſſée tant vers la lune que vers le ſoleil, en ſouffre toutefois une altération, d'où réſulte un *moment* par rapport à l'axe de la terre, lequel agiſſant ſans relâche produit avec le tems les phénomenes de la préceſſion des équinoxes & de la nutation de l'axe de la terre.

On n'a qu'à jetter les yeux ſur l'excellent ouvrage de M. d'Alembert pour voir combien de calculs penibles & embarraſſans cette recherche demande. Il falloit introduire la véritable figure de la terre, qu'il a ſuppoſée elliptique; & puisqu'il n'eſt pas probable qu'elle ſoit formée d'une matiere homogene, il l'a conſiderée comme compoſée d'une infinité de couches elliptiques, dont chacune ait une denſité particuliere.

Enſuite il a examiné les forces dont chaque élément eſt ſollicité, ou vers le centre de la lune, ou vers celui du ſoleil, pour en conclure les forces totales & leurs *momens* à l'égard de l'axe de rotation. Or on comprend aiſément, que la nature de cette infinité de couches elliptiques, & l'obliquité des forces qui y agiſſent, doivent rendre le calcul extrémement embarraſſé; & qu'il le deviendroit encore beaucoup plus, ſi au lieu de la figure elliptique on étoit obligé d'y introduire d'autres figures plus compliquées.

On voit donc qu'on eſt encore fort éloigné du probleme général, qu'on pourroit énoncer en ces termes.

La figure d'un corps & l'arrangement de la matiere dont il eſt compoſé étant quelconques; ſi toutes les particules de ce corps ſont pouſſées vers un point par des forces qui ſuivent une loi quelconque des diſtances; trouver la force totale dont le corps ſera ſollicité?

Cepen-

Cependant, quoique ce probleme paroiſſe ſurpaſſer bien loin les forces du calcul, la découverte des trois axes principaux dont chaque corps eſt néceſſairement doué me fournira même une méthode fort aiſée de le réſoudre.

I. De quelque maniere qu'un corps céleſte ſoit formé, je ſuppoſe qu'on ſache premierement tant ſa maſſe entière que ſon centre d'inertie. Enſuite, je regarde auſſi comme connus les trois axes principaux du corps, de même que les momens d'inertie à leur égard.

II. La méthode de déterminer ces deux derniers élémens pour chaque corps ſe trouve expliquée dans les différens Mémoires où mon pere a traité du mouvement de rotation des corps autour d'un axe variable & entr'autres dans ſa nouvelle Mécanique Chap. V. Or, quand même cette recherche auroit quelque difficulté, ſi on la vouloit appliquer aux corps céleſtes, cela ne regarde pas la force ſollicitante qu'on ſe propoſe de rechercher ici : & d'ailleurs, dès qu'on veut connoître le mouvement d'un tel corps, ces élémens doivent abſolument être connus.

III. Outre cela, au lieu d'attribuer au corps une certaine figure elliptique, compoſée de couches elliptiques d'une denſité différente, on lui peut ſuppoſer d'abord une certaine inégalité dans les momens d'inertie par rapport à ſes trois axes principaux ; ce qui s'étend infiniment plus loin & renferme toutes les figures poſſibles. La figure des corps peut varier à l'infini, mais cette différence n'entre ici en conſidération que par rapport à l'inégalité entre les trois momens principaux.

Planche IX. Fig. 1. IV. Cependant, ſi le corps eſt un ſphéroïde elliptique formé par la révolution d'une ellipſe A I B autour d'un de ſes axes I A, & qu'il ſoit compoſé des couches elliptiques quelconques concentriques P I Q, dont chacune ait ſa denſité particuliere, il eſt aiſé d'en déterminer ſes momens principaux. Car ſoient les demi-axes du corps entier I A = A ; I B = B, & la denſité par toute la ſurface

ſurface $=$ D. Enſuite, pour une couche quelconque engendrée par la révolution de l'ellipſe P I Q autour de l'axe commun I P, ſoient les demi-axes I P $=p$; I Q $=q$ & la denſité dans ſa ſurface $=r$, de ſorte que p & q puiſſent être regardés comme des fonctions quelconques de la variable r. Quand cette couche devient la derniere, on aura $p=$ A, $q=$ B & $r=$ D, & avant que d'y arriver ces quantités p, q, r, ſeront nos variables. Il eſt évident que ce cas s'étend plus loin qu'on ne l'a traité jusqu'ici. Le ſphéroïde elliptique étant déterminé en général, il eſt d'abord clair que ſon centre d'inertie ſe trouve dans le centre de la figure I; & poſant le rapport du diametre à la circonférence comme 1 à π, la maſſe de ce corps que je nomme M ſera $\frac{4}{3}\pi$ A B B D $-\frac{4}{3}\pi\int pqq\,dr$, en prenant cette intégrale par toute l'étendue du corps. Enſuite l'axe de révolution I A ſera un des axes principaux, & les deux autres tombent dans la ſection moyenne, perpendiculaire à l'axe I A, & auront leurs momens d'inertie égaux entr'eux. Si nous poſons le moment d'inertie par rapport à l'axe I A $=$ Maa & le moment d'inertie par rapport aux deux autres axes $=$ Mbb, on trouvera

$$\mathrm{M}aa = \tfrac{8}{15}\pi\,\mathrm{AB^4\,D} - \tfrac{8}{15}\pi\int p\,q^4\,dr$$

$$\mathrm{M}bb = \tfrac{4}{15}\pi\,\mathrm{ABB\,(AA+BB)\,D} - \tfrac{4}{15}\pi\int pqq\,(pp+qq)\,dr.$$

V. Faiſons quelques applications de ces formules générales; & d'abord, ſi la denſité eſt la même D par toute l'étendue du corps, on aura $r=$ D & $dr=0$; dont la Maſſe

M $\frac{4}{3}\pi$ A B B D, & les momens d'inertie

M$aa = \frac{8}{15}\pi$ A B^4 D;

M$bb = \frac{4}{15}\pi$ A B B (A A $+$ B B) D; par conſéquens

$aa = \frac{2}{5}$ B B & $bb = \frac{1}{5}$ (A A $+$ B B).

VI. Or, ſi l'inégalité des couches ſuit une loi quelconque des puiſſances, de ſorte que $p = \frac{A r^m}{D^m}$ & $q = \frac{B r^n}{D^n}$, en faiſant les ſubſtitutions, on obtiendra

$$M = \tfrac{4}{5}\pi ABBD - \tfrac{4}{5}\pi \frac{ABBD}{m+2n+1} = \tfrac{4}{5}\pi \times \frac{m+2n}{m+2n+1} ABBD$$

$$Maa = \tfrac{8}{15}\pi AB^4 D - \tfrac{8}{15}\pi \frac{AB^4 D}{m+4n+1} = \tfrac{8}{15}\pi \times \frac{m+4n}{m+4n+1} AB^4 D$$

$$Mbb = \tfrac{4}{15}\pi ABB(AA+BB)D - \tfrac{4}{15}\pi ABB\left(\frac{AA}{3m+2n+1} + \frac{BB}{m+4n+1}\right).D$$

ou

$$Mbb = \tfrac{4}{15}\pi ABBD\left(\frac{3m+2n}{3m+2n+1} AA + \frac{m+4n}{m+4n+1} BB\right)$$

& par conſéquent

$$aa = \tfrac{2}{3} \times \frac{(m+4n)(m+2n+1)}{(m+2n)(m+4n+1)} BB$$

&

$$bb = \tfrac{1}{5} \times \frac{m+2n+1}{m+2n}\left(\frac{3m+2n}{3m+2n+1} AA + \frac{m+4n}{m+4n+1} BB\right).$$

VII. Je remarque ici en paſſant, que ſi le corps eſt un ſphéroïde applati & homogene par toute ſon étendue, de ſorte que $A < B$, il y aura $aa - bb = \frac{1}{5}(BB - AA)$, & partant $aa > bb$.

Mais

Mais, ſi le corps n'eſt pas homogene, & qu'on poſe pour ſes couches $p = \frac{A r^m}{D^m}$ & $q = \frac{B r^n}{D^n}$, on aura

$$aa - bb = \tfrac{1}{5} \times \frac{m+2n+1}{m+2n} \left(\frac{m+4n}{m+4n+1} BB - \frac{3m+2n}{3m+2n+1} AA \right);$$

d'où il ne ſuit pas que $aa > bb$, quoiqu'il ſoit $BB > AA$. On voit qu'il pourroit même arriver qu'il fût $aa = bb$ ou $aa < bb$. Mais, ſi toutes les couches ſont ſemblables entr'elles, ou $m = n$, on aura $aa - bb = \frac{1}{5} \times \frac{3n+1}{5n+1} (BB - AA)$. On comprend de là que, quoiqu'on connoiſſe parfaitement la figure du corps, on n'en ſauroit rien conclure pour l'égalité ou l'inégalité de ſes momens principaux.

Je me tiendrai donc uniquement aux momens principaux, ſans avoir égard à la figure du corps.

VIII. Après ces remarques je retourne à notre probleme général. Soit donc propoſé un corps quelconque dont la maſſe ſoit $= M$, ſon centre d'inertie en I, & que ſes axes principaux ſoient IA, IB, IC & par rapport à eux les momens d'inertie Maa, Mbb, Mcc, que je ſuppoſe donnés. Qu'on conſidere un élément quelconque du corps en Z, dont la maſſe ſoit dM; & ayant tiré les lignes ZY perpendiculaire au plan AIB
& YZ perpendiculaire à l'axe IA, Fig. 2.
pour avoir ſes trois coordonnées orthogonales

$$IX = x ; \quad XY = y ; \quad \& \quad YZ = z$$

paralleles aux trois axes principaux.

IX. Maintenant, puiſque I eſt le centre d'inertie, on aura

$$\int x\,dM = 0 ; \quad \int y\,dM = 0 ; \quad \int z\,dM = 0$$

& la propriété des axes principaux donne

$$\int x\,y\,dM = 0; \qquad \int x\,z\,dM = 0; \qquad \int y\,z\,dM = 0.$$

Or, à cauſe des momens d'inertie donnés, nous avons les trois équations ſuivantes

$$Maa = \int (yy+zz)dM; \quad Mbb = \int (xx+zz)dM; \quad Mcc = \int (xx+yy)dM$$

d'où nous concluons les valeurs des intégrales

$$\int x\,x\,d\,M = \tfrac{1}{2}\,M\,(b\,b + c\,c - a\,a)$$
$$\int y\,y\,d\,M = \tfrac{1}{2}\,M\,(a\,a + c\,c - b\,b)$$
$$\int z\,z\,d\,M = \tfrac{1}{2}\,M\,(a\,a + b\,b - c\,c).$$

X. Soit R un point vers lequel tous les élémens du corps ſont pouſſés en raiſon réciproque du quarré des diſtances, dont la poſition ſoit déterminée par les coordonnées $IP = p$; $PQ = q$; $QR = r$; & ſa diſtance au centre d'inertie $IR = s$.

XI. Pour la grandeur abſolue de cette force, on la connoitra en poſant la diſtance au point R, à laquelle un élément de matiere eſt autant pouſſé vers R qu'il ſeroit pouſſé en bas ſur la terre $= e$. Et alors, ſi l'élément dM étoit éloigné du point R du même intervalle e, il y ſeroit pouſſé par la force dM, puiſqu'on ſe ſert de la même meſure pour les maſſes & les poids. Mais, puiſque ZR eſt la véritable diſtance de l'élément dM au point R, la force dont il y eſt pouſſé ſera $\frac{e\,e\,d\,M}{ZR^2}$.

XII. Si nous voulions que la loi d'attraction ſuivit une puiſſance quelconque de la diſtance ZR, cette force ſeroit $\frac{ZR^n}{e^n}\,dM$, en ſuppoſant l'attraction proportionelle à la puiſſance des diſtances dont l'expoſant $= n$, de ſorte qu'on auroit pour le cas dont il s'agit ici $n = -2$.

XIII.

XIII. Quant à la diſtance ZR, elle eſt exprimée en ſorte

$$ZR = V((p-x)^2 + (q-y)^2 + (r-z)^2)$$

ou, puisque $pp + qq + rr = IR^2 = ss$,

$$ZR = V(ss - 2qx - 2qy - 2rz + xx + yy + zz).$$

XIV. La force $\frac{ZR^n}{e^n} dM$ paſſant par le point R ſelon la direction ZR, pour en trouver la force totale, le moyen le plus propre ſera de la décompoſer au point R ſuivant les directions fixes Rp, Rq & Rr, paralleles aux axes principaux IA, IB & IC, d'où l'on tirera les forces élémentaires

$$\text{ſuivant } Rp = \frac{ZR^{n-1}(p-x)\,dM}{e^n}$$

$$\text{ſuivant } Rq = \frac{ZR^{n-1}.(q-y)\,dM}{e^n}$$

$$\text{ſuivant } Rr = \frac{ZR^{n-1}.(r-z)\,dM}{e^n}$$

dont il s'agit de chercher les intégrales pour toute l'étendue du corps propoſé.

XV. Dans l'application de ce probleme aux corps céleſtes, on peut regarder la diſtance $IR = s$ comme très grande à l'égard de l'étendue du corps propoſé, & partant *réciproquement* les variables x, y, z, comme très petites à l'égard de la diſtance s. Or ceci nous fournit la grande commodité d'exprimer la valeur de ZR^{n-1} par une ſérie dont il ſera permis de négliger les termes où les quantités x, y, k, ont plus de deux dimenſions.

XVI. De là nous obtiendrons

$$ZR^{n-1} = s^{n-1} - (n-1)\,s^{n-3}(px+qy+rz) + \tfrac{1}{2}(n-1)\,s^{n-3}(xx+yy+zz) + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-3)\,s^{n-5}(px+qy+rz)^2,$$

& en arrangeant ces termes

$$ZR^{n-1} = s^{n-1} - (n-1)s^{n-3}(px+qy+rz) + \tfrac{1}{2}(n-1)\,s^{n-3}(xx+yy+zz) + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-3)\,s^{n-5}(ppxx+qqyy+rrzz) + (n-1)(n-3)\,s^{n-5}(pqxy+prxz+qryz).$$

XVII. Multiplions cette formule ſucceſſivement par $p-x$, $q-y$, & $r-z$, & négligeant toujours les termes, où les variables x, y, z montent à plus de deux dimenſions; nous aurons

$$ZR^{n-1}(p-x) = s^{n-1}p - s^{n-3}(npp+qq+rr)x - (n-1)s^{n-3}p(qy+rz) + (n-1)s^{n-3}(qxy+rxz) + \tfrac{1}{2}(n-1)\,s^{n-3}(3pxx+pyy+pzz) + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-3)\,s^{n-5}p(ppxx+qqyy+rrzz) + (n-1)(n-3)\,s^{n-5}p(pqxy+prxz+qryz),$$

d'où l'on tire aiſément les deux autres formes $ZR^{n-1}(q-x)$ & $ZR^{n-1}(r-x)$.

XVIII. Comme donc $\int x\,dM = 0$; $\int y\,dM = 0$; $\int z\,dM = 0$, & de plus $\int xy\,dM = 0$; $\int xz\,dM = 0$; $\int yz\,dM = 0$; l'intégrale $\int ZR^{n-1}(p-x)\,dM$ s'exprimera très ſimplement de cette façon

$$\int ZR^{n-1}(p-x)\,dM = M s^{n-1}p + \tfrac{1}{2}(n-1)s^{n-3}p\int dM(3xx+yy+zz) + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-3)s^{n-5}p\int dM(ppxx+qqyy+rrzz).$$

Et

Et en y introduiſant les momens d'inertie principaux

$$\int ZR^{n-1}(p-x)\,dM = Ms^{n-1}p + \tfrac{1}{4}(n-1)Ms^{n-3}p(3bb+3cc-aa) + \tfrac{1}{4}(n-1)(n-3)Ms^{n-5}p(aa(ss-2pp)+bb(ss-2qq)+cc(ss-2rr))$$

ou bien

$$\int ZR^{n-1}(p-x)\,dM = Ms^{n-1}p + \tfrac{1}{4}(n-1)Ms^{n-3}p(n(bb+cc)+(n-4)aa) - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-3)Ms^{n-5}p(aapp+bbqq+ccrr);$$

& de la même maniere

$$\int ZR^{n-1}(q-y)\,dM = Ms^{n-1}q + \tfrac{1}{4}(n-1)Ms^{n-3}q(n(aa+cc)+(n-4)bb) - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-3)Ms^{n-5}q(aapp+bbqq+ccrr):$$

$$\int ZR^{n-1}(r-z)\,dM = Ms^{n-1}r + \tfrac{1}{4}(n-1)Ms^{n-3}r(n(aa+bb)+(n-4)cc) - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-3)Ms^{n-5}r(aapp+bbqq+ccrr).$$

XIX. Maintenant on n'a qu'à diviſer ces trois expreſſions par e^n pour avoir les trois forces totales Rp, Rq, & Rr, dont le corps ſera ſollicité. Or il eſt évident que ces trois forces ſe réduiſent premierement à une force qui agit ſuivant la direction IR & qui eſt

$$\frac{Ms^n}{e^n}\left(1+\tfrac{1}{4}n(n-1).\frac{aa+bb+cc}{ss} - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-3).\frac{aapp+bbqq+ccrr}{s^4}\right);$$

& outre cela à trois petites forces, qui ſont

$$\text{ſuivant } Rp = -\frac{(n-1)\,Ms^{n-3}\,aap}{e^n};$$

$$\text{ſuivant } Rq = -\frac{(n-1)\,Ms^{n-3}\,bbq}{e^n};$$

$$\text{ſuivant } Rr = -\frac{(n-1)\,Ms^{n-3}\,ccr}{e^n}.$$

XX.

XX. On peut encore repréſenter ces forces par une infinité d'autres manieres différentes, parmi leſquelles la ſuivante eſt ſurtout remarquable.

Les forces dont le corps eſt ſollicité du point R ſe réduiſent premierement à une force ſelon la direction IR, qui eſt

$$\frac{M.^{n}}{e^{n}}\left(1+\tfrac{1}{12}(n-1)(3n-4).\frac{aa+bb+cc}{ss}-\tfrac{1}{2}(n-1)(n-3)\frac{aapp+bbqq+ccrr}{s^{4}}\right),$$

& à ces trois petites forces appliquées au point R,

$$\text{ſuivant } Rp = \frac{(n-1)\,Ms^{n-3}\,p\,(bb+cc-2aa)}{3e^{n}},$$

$$\text{ſuivant } Rq = \frac{(n-1)\,Ms^{n-3}\,q\,(aa+cc-2bb)}{3e^{n}},$$

$$\text{ſuivant } Rr = \frac{(n-1)\,Ms^{n-3}\,r\,(aa+bb+2cc)}{3e^{n}}.$$

XXI. On voit donc que ces trois petites forces évanouiſſent au cas que les trois momens principaux du corps ſoient égaux entr'eux, & alors la force ſelon M devient,

$$\frac{Ms^{n}}{e^{n}}\left(1+\frac{(n-1)\,(n+2)}{4}.\frac{aa}{ss}\right)$$

laquelle ne convient avec celle que le corps éprouveroit, ſi toute ſa maſſe étoit réunie au point I, que lorsque ou $n = 1$, ou $n = -2$.

XXII. Au lieu des lignes p, q, r, introduiſons plutôt les angles que la direction IR fait avec les trois axes principaux du corps: poſons pour cet effet ces angles

$$AIR = \zeta; \qquad BIR = \eta; \qquad CIR = \theta,$$

&

& puisqu'on aura $p = s \cos\zeta$; $q = s \cos\eta$; $r = s \cos\theta$, de ſorte que $\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\theta^2 = 1$, les forces dont le corps eſt ſollicité au centre de forces R ſeront premierement la force ſelon IR, qui eſt

$$\frac{Ms^n}{e^n}\left(1 + \tfrac{1}{4}n(n-1).\frac{aa+bb+cc}{ss} - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-3).\frac{aa\cos\zeta^2 + bb\cos\eta^2 + cc\cos\theta^2}{ss}\right);$$

& enſuite les trois petites forces

$$\text{ſuivant } Rp = -\frac{(n-1)\,Ms^{n-2}\,aa\cos\zeta}{e^n};$$

$$\text{ſuivant } Rq = -\frac{(n-1)\,Ms^{n-2}\,bb\cos\eta}{e^n};$$

$$\text{ſuivant } Rr = -\frac{(n-1)\,Ms^{n-2}\,cc\cos\theta}{e^n}.$$

XXIII. Ou bien, ſi nous aimons mieux nous ſervir de l'autre repréſentation, les forces ſollicitantes ſe réduiſent premierement à la force principale ſelon la direction IR,

$$\frac{Ms^n}{e^n}\left(1 + \tfrac{1}{12}(n-1)(3n-4).\frac{aa+bb+cc}{ss} - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-3).\frac{aa\cos\zeta^2 + bb\cos\eta^2 + cc\cos\theta^2}{ss}\right),$$

& aux trois petites forces

$$\text{ſuivant } Rp = \frac{(n-1)\,Ms^{n-2}\,(bb + cc - 2aa)\cos\zeta}{3e^n},$$

$$\text{ſuivant } Rq = \frac{(n-1)\,Ms^{n-2}\,(aa + cc - 2bb\cos\eta}{3e^n},$$

$$\text{ſuivant } Rr = \frac{(n-1)\,Ms^{n-2}\,(aa + bb - 2cc)\cos\theta}{3e^n}.$$

Cette derniere repréſentation eſt plus propre que la précédente, quand les trois momens principaux ſont presque égaux entr'eux,

comme cela arrive à peu près dans la terre & les autres corps céleſtes, auxquels on voudroit faire l'application.

XXIV. Poſons maintenant, comme il arrive en effet dans le ſyſteme du monde, que les corps ſoient attirés vers le point R en raiſon réciproque du quarré des diſtances, ou bien ſoit $n = -2$, & la premiere repréſentation nous donnera ces forces

premierement la force ſuivant la direction IR

$$\frac{Mee}{ss}\left(1+\tfrac{3}{2}\cdot\frac{aa+bb+cc}{ss}-\tfrac{15}{2}\cdot\frac{aa\cos\zeta^2+bb\cos\eta^2+cc\cos\theta^2}{ss}\right),$$

& enſuite les trois petites forces

$$\text{ſuivant } Rp = \frac{3Meeaa\cos\zeta}{s^4},$$

$$\text{ſuivant } Rq = \frac{3Meebb\cos\eta}{s^4},$$

$$\text{ſuivant } Rr = \frac{3Meecc\cos\theta}{s^4}.$$

XXV. L'autre repréſentation donnera la force principale ſuivant

$$IR = \frac{Mee}{ss}\left(1+\tfrac{5}{2}\cdot\frac{aa+bb+cc}{ss}-\tfrac{15}{2}\cdot\frac{aa\cos\zeta^2+bb\cos\eta^2+cc\cos\theta^2}{ss}\right),$$

avec ces trois petites forces

$$\text{ſuivant } Rp = \frac{Mee}{s^4}(2aa-bb-cc)\cos\zeta,$$

$$\text{ſuivant } Rq = \frac{Mee}{s^4}(2bb-aa-cc)\cos\eta,$$

$$\text{ſuivant } Rr = \frac{Mee}{s^4}(2cc-aa-bb)\cos\theta,$$

XXVI.

XXVI. J'ai ſuppoſé dans la détermination préſente que les quantités aa, bb, cc, qui dépendent de l'étendue du corps, ſont très petites par rapport à la diſtance $1R = s$, ou plutôt à ſon quarré ss; & c'eſt par cette raiſon qu'il m'a été permis de négliger les termes, où de plus hautes puiſſances de a, b, c, ſeroient diviſées par les ſemblables puiſſances de la diſtance s.

XXVII. En effet, ſi le corps propoſé, étoit la terre & le point R le centre de la lune, ce qui eſt le cas le moins favorable à cette approximation, les fractions $\frac{a}{s}$, $\frac{b}{s}$, $\frac{c}{s}$ ſeroient moindres que $\frac{1}{60}$ & partant leurs quarrés moindres que $\frac{1}{3600}$, d'où il eſt clair que les plus hautes puiſſances peuvent être regardées comme évanouiſſantes.

Outre cela, il faut encore conſidérer que les petites quantités, qui ſe trouvent dans nos formules dépendent de l'inégalité entre les quantités aa, bb, cc, de ſorte que, ſi elles étoient égales entr'elles, les aberrations évanouiroient entierement.

XXVIII. Après avoir déterminé les forces dont un corps propoſé quelconque eſt ſollicité vers un centre d'attraction R; leur effet ſe réduit à deux queſtions, dont l'une roule ſur le mouvement progreſſif du corps, & l'autre ſur ſon mouvement de rotation.

XXIX. Quand il s'agit ſeulement du mouvement progreſſif, on conçoit toutes ces forces comme compliquées au centre d'inertie I, & toute la maſſe du corps comme réunie au même point, de ſorte que la queſtion revient à déterminer le mouvement du point I, auquel eſt réunie la maſſe M, qui ſoit ſollicitée par les forces ſuivantes,

premierement vers le point d'attraction R, ou dans la direction IR, par la force

$$\frac{Mee}{ss}\left(1+\frac{5aa}{2ss}(1-3\cos\zeta^2)+\frac{5bb}{2ss}(1-3\cos\eta^2)+\frac{5cc}{2ss}(1-3\cos\vartheta^2)\right),$$

& enſuite par les trois petites forces

$$\text{ſuivant IA} = \frac{Mee}{s^4}(2aa - bb - cc)\cos\zeta,$$

$$\text{ſuivant IB} = \frac{Mee}{s^4}(2bb - aa - cc)\cos\eta,$$

$$\text{ſuivant IC} = \frac{Mee}{s^4}(2cc - aa - bb)\cos\theta,$$

XXX. Faiſons quelques réflexions ſur ces forces qui déterminent le mouvement progreſſif du corps, & remarquons d'abord, que s'il étoit permis de négliger les fractions $\frac{aa}{ss}$, $\frac{bb}{ss}$, $\frac{cc}{ss}$, on n'auroit qu'une ſeule force ſelon la direction IR, qui ſeroit $= \frac{Mee}{ss}$. Ou bien le corps ſeroit ſollicité vers le point R, préciſément dans la raiſon réciproque du quarré de ſa diſtance à ce point, de même que ſi toute ſa maſſe étoit effectivement réunie au centre d'inertie I. C'eſt auſſi cette ſeule force qu'on conſidere dans la Théorie de l'Aſtronomie, quand on veut déterminer le mouvement progreſſif des corps céleſtes; & on ne s'eſt pas encore aviſé de rechercher les petites inégalités qui pourroient réſulter des petites aberrations des forces ſollicitantes que nous venons de trouver.

XXXI. Mais, quoique les fractions $\frac{aa}{ss}$, $\frac{bb}{ss}$, $\frac{cc}{ss}$, ne ſoient pas évanouiſſantes, il y a encore un autre cas, où toutes les forces ſe réduiſent à la ſeule force $\frac{Mee}{ss}$ & qui a lieu lorsque $aa = bb = cc$; ou bien lorsque le corps a une telle figure, que tous ſes momens d'inertie ſoient égaux entr'eux.

XXXII. Donc, puisque la terre & la plûpart des autres corps céleſtes que nous connoiſſons, ont cette propriété, que leurs momens

momens d'inertie ſont à peu près égaux entr'eux, on eſt d'autant plus autoriſé de ne conſidérer que la ſeule force $\frac{Mee}{ss}$, & de négliger les petites aberrations que nos formules renferment.

XXXIII. Car, poſant

$$aa = (1 - \alpha)kk; \quad bb = (1 + \varepsilon)kk; \quad cc = (1 + \gamma)kk;$$

de ſorte que α, ε, γ, ſoient des fractions extrémement petites, outre que $\frac{kk}{ss}$ ſoit déjà très petit, les forces trouvées ſeront exprimées en ſorte

Premierement, la force dans la direction IR ſera

$$\frac{Mee}{ss} + \frac{5Meekk}{2s^4}(\alpha(1-3\cos\zeta^2) + \varepsilon(1-3\cos\eta^2) + \gamma(1-3\cos\theta^2)),$$

& enſuite les trois autres forces

$$\text{ſuivant IA} = \frac{Meekk}{s^4}(2\alpha - \varepsilon - \gamma)\cos\zeta,$$

$$\text{ſuivant IB} = \frac{Meekk}{s^4}(2\varepsilon - \alpha - \gamma)\cos\eta,$$

$$\text{ſuivant IC} = \frac{Meekk}{s^4}(2\gamma - \alpha - \varepsilon)\cos\theta,$$

XXXIV. Il eſt bon de prendre ici kk en ſorte qu'il devienne $\alpha + \varepsilon + \gamma = 0$; ou bien $kk = \frac{1}{3}(aa + bb + cc)$, donc

$$\alpha = \frac{2aa - bb - cc}{aa + bb + cc}; \quad \varepsilon = \frac{2bb - aa - cc}{aa + bb + cc}; \quad \gamma = \frac{2cc - aa - bb}{aa + bb + cc};$$

car α, ε. γ deviennent de cette façon les plus petites qu'il ſoit poſſible, eu égard à l'inégalité qui regne entre les momens d'inertie principaux du corps Maa, Mbb, Mcc.

XXXV. Cela posé, les forces qui agissent sur le corps proposé seront; premierement, la force principale suivant la direction

$$IR = \frac{Mee}{ss} - \frac{15Meekk}{2s^4}(\alpha \cos\zeta^2 + \mathfrak{G}\cos\eta^2 + \gamma\cos\theta^2),$$

& ensuite les trois petites forces

$$\text{suivant } IA = \frac{3Meekk}{s^4}\alpha\cos\zeta;$$

$$\text{suivant } IB = \frac{3Meekk}{s^4}\mathfrak{G}\cos\eta;$$

$$\text{suivant } IC = \frac{3Meekk}{s^4}\gamma\cos\theta;$$

XXXVI. Donc, s'il y avoit des cas, où tant les nombres $\alpha, \mathfrak{G}, \gamma$ que $\frac{kk}{ss}$ seroient encore assez considérables, pour qu'on ne les pût négliger; alors, en ne considérant que la force principale, qui agit selon la direction IR, elle ne seroit plus exactement proportionelle au quarré renversé de la distance, mais elle renfermeroit encore une particule réciproquement proportionelle au quarré-quarré de la distance. Encore dépendroit-elle outre cela de la situation des axes principaux du corps par rapport à la ligne IR, de sorte qu'à cause du mouvement de rotation, il pourroit arriver que cette particule devint tantôt plus grande tantôt plus petite; tantôt positive, tantôt négative. Une semblable circonstance auroit aussi lieu dans les trois autres forces suivant les directions IA, IB, IC: par cette raison, on pourroit assurer hardiment, qu'on ne sauroit jamais déterminer le mouvement d'un tel corps, à moins que l'Analyse ne soit portée à un beaucoup plus haut degré de perfection. Mais peut-être qu'un tel cas n'existe pas dans le monde.

XXXVII. Quoique ces aberrations soient en effet si petites, qu'on les puisse tout à fait négliger dans la détermination du mouvement progressif; il n'en est pas de même dans la détermination du mou-

mouvement de rotation. Car ici il ne s'agit pas tant des forces mêmes, que de leurs momens par rapport aux axes principaux; & puisque les forces Rp, Rq, Rr, ſont appliquées fort loin, & qu'elles agiſſent par des leviers fort longs, elles en acquierent un accroiſſement très conſidérable. Outre cela, une force quelque petite qu'elle ſoit, ſi elle agit ſur le mouvement de rotation d'un corps, peut y produire avec le tems un effet très conſidérable. En effet la préceſſion des équinoxes & la nutation de l'axe de la terre, qui eſt cauſée par les forces de la lune & du ſoleil, eſt un phénomene aſſez ſenſible, quoique les mêmes inégalités qui ſe trouvent dans les forces dont la terre eſt ſollicitée vers la lune & le ſoleil, ne produiſent aucun effet ſenſible dans le mouvement progreſſif ou annuel.

XXXVIII. Or, pour déterminer le mouvement de rotation, il faut chercher les momens des forces ſollicitantes par rapport aux trois axes principaux du corps.

Ici il eſt d'abord clair que la premiere force IR, dont la direction paſſe par le centre d'inertie du corps I, ne produit aucun moment; ces momens ne réſultent donc que des petites forces ſuivant les directions Rp, Rq, Rr, paralleles aux axes principaux.

XXXIX. De là nait un moment par rapport à l'axe IA dans le ſens BC qui ſera = force $Rr \times PQ$ — force $Rq \times QR$; le quel à cauſe de $PQ = q = s \cos\eta$, & $QR = s \cos\theta$, ſe réduit à $\frac{3Mee}{s^3}(cc - bb)\cos\eta.\cos\theta$.

De la même maniere, on trouve le moment par rapport à l'axe IB dans le ſens CA $\frac{3Mee}{s^3}(aa - cc)\cos\zeta.\cos\theta$, & le moment par rapport à l'axe IC dans le ſens AB,

$$\frac{3Mee}{s^3}(bb - aa)\cos\zeta.\cos\eta.$$

XL.

XL. Donc, quoique dans les expreſſions précédentes, qui regardent le mouvement progreſſif du corps, on n'ait pu négliger les termes diviſés par le quarré-quarré s^4, la même raiſon n'a plus lieu pour le mouvement de rotation, puisque nos formules ne ſont diviſées que par le cube de la diſtance $IR = s$.

XLI. A cet égard nous avons trois momens de forces à conſidérer, qui ſont

I. Le moment des forces par rapport à l'axe principal IA dans le ſens $BC = \frac{3Mee}{s^3}(cc - bb)\cos\eta.\cos\theta$.

II. Le moment des forces par rapport à l'axe principal IB dans le ſens $CA = \frac{3Mee}{s^3}(aa - cc)\cos\zeta.\cos\theta$.

III. Le moment de forces par rapport à l'axe principal IC dans le ſens $AB = \frac{3Mee}{s^3}(bb - aa)\cos\zeta.\cos\eta$.

XLII. De là il eſt clair, que tous ces momens évanouiroient, ſi les trois momens principaux de matiere du corps étoient égaux entr'eux; ou $aa = bb = cc$; & dans ce cas le mouvement de rotation du corps ne ſeroit point troublé, mais il demeureroit uniforme.

Ce n'eſt donc qu'entant que les momens d'inertie ſont inégaux, que le mouvement de rotation eſt aſſujetti à des dérangemens, qui peuvent changer tant la viteſſe que l'axe de rotation même.

Mais c'eſt encore un probleme bien difficile que de déterminer ces dérangemens: & quand on a réuſſi à l'égard de l'axe de la terre, ce n'eſt qu'à une circonſtance très particuliere que l'on eſt redevable de ce ſuccès.

MÉMOI-

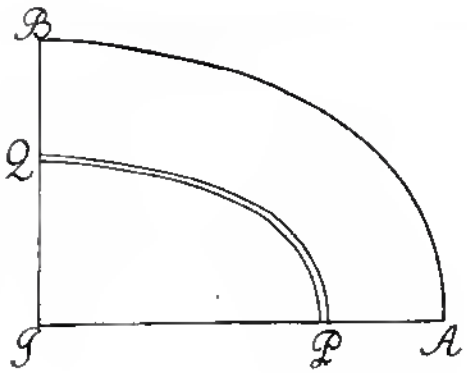


Fig. 1.

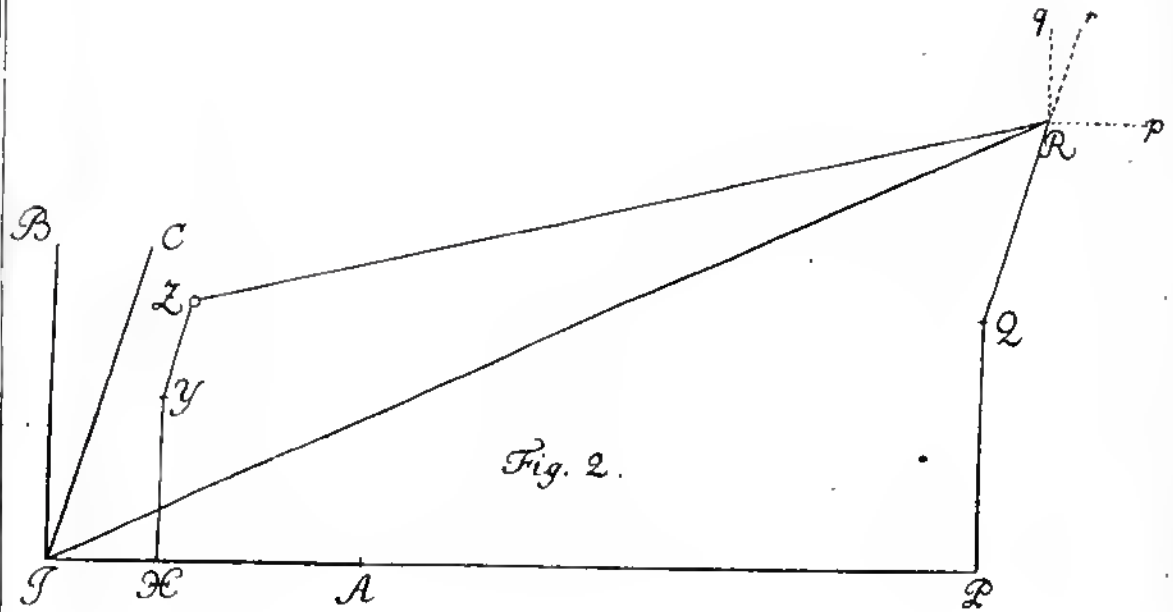


Fig. 2.

Mem. de l'acad. Tome XXI. 1765. Pl. IX. pag. 432.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.

* *
*

DISCOURS

SUR CES QUESTIONS:

Quel eſt le degré de certitude dont ſont ſuſceptibles les preuves tirées de la conſidération de cet Univers pour demontrer l'exiſtence d'une Divinité?

Et quelle eſt la meilleure maniere de faire uſage de ces Argumens a poſteriori, *pour établir cette importante Vérité?*

PAR M. FORMEY.

On a raiſon d'appeller la Nature un Livre; c'eſt le plus grand de tous, & celui dont les caracteres ſont le plus liſibles. Mais il en eſt comme des Livres ordinaires; tout le monde n'eſt pas en état d'y lire: il faut avoir certaines connoiſſances élémentaires, qui rendent d'abord la choſe poſſible, & enſuite facile. Les degrés de facilité varient à l'infini, & dépendent de la juſteſſe des principes, de l'habitude d'en faire l'application, & de cette force d'eſprit & de raiſonnement qui pouſſe l'application auſſi loin qu'elle peut aller.

Lorsqu'on demande donc: *Quel eſt le degré de certitude dont ſont ſuſceptibles les preuves tirées de la contemplation de l'Univers, pour démontrer l'exiſtence d'une Divinité?* cette Queſtion peut être priſe dans un ſens rélatif ou abſolu. Si on l'entend rélativement, c'eſt comme ſi l'on demandoit: De quelle façon s'offre à la vue de l'eſprit, dans chaque individu raiſonnable qui promene ſes regards ſur

le monde, & ſur les ouvrages de la Nature, cette vérité: Il y a un Dieu. Inconteſtablement à cet égard, comme à celui des objets viſibles, il y a autant de points de vue que de ſpectateurs; chacun, ſuivant la force naturelle de ſon génie, ſuivant les ſecours acquis qu'il joint à cette force, ſuivant l'attention qu'il apporte à conſidérer ces objets, & la réflexion qu'il y joint; enfin & malheureuſement, ſuivant le plus & le moins d'influence qu'ont ſur lui une foule de préjugés & de paſſions; chacun, dis-je, lit la grande vérité de l'Exiſtence d'un Dieu en caracteres plus ou moins ſaillans, ſi je puis ainſi dire, plus ou moins propres à opérer cette conviction, de laquelle dépend la certitude. Ainſi, comme il ſeroit manifeſtement impoſſible de déterminer le nombre infini des degrés de cette certitude par rapport à tous ceux qui, depuis que le ſpectacle de la Nature eſt étalé aux yeux de l'homme, ont ſçu s'élever des Créatures au Créateur; & que c'eſt proprement à l'Hiſtoire philoſophique à nous inſtruire de cette immenſité d'opinions, qui ont régné là deſſus dans la Théologie & dans la Philoſophie de toutes les Nations & de toutes les Sectes: il faut prendre la Queſtion dans le ſens abſolu, & examiner, juſqu'où peut aller dans l'homme qui a reçu le meilleur génie de la Nature, qui en fait le meilleur uſage, & qui eſt placé le mieux à portée de connoître tous les objets qui apartiennent à cette doctrine, le degré de certitude ſur lequel il fonde le Dogme de l'Exiſtence d'un Dieu? Ces conditions ſont abſolument requiſes pour poſer le véritable état de la Queſtion: tout défaut, auquel de ces trois égards que ce ſoit, change le cas & rend la diſcuſſion inutile, auſſi bien que la déciſion.

Mais ne ſeroit ce point ici un fait d'expérience? Ne faudroit-il point chercher un Génie ſupérieur, & dont la force fût inconteſtable; un Génie qui eût tourné ſes vues, ſes recherches, ſes méditations de ce côté-là; un Génie enfin, qui eût trouvé pour réſultat de tous ſes travaux, la Vérité de l'Exiſtence d'un Dieu, & qui l'eût hautement profeſſée, & conſtamment ramenée à la pratique? Ce ſeroit là, ce me ſemble, une Démonſtration vivante & parlante; un ſujet de honte, de confuſion & de ſilence, pour ces petits eſprits, toujours occupés

pés à harceler, à faire des eſcarmouches, à tirer leur coup en fuyant; mais qui n'ont ni théorie, ni juſteſſe d'eſprit, ni droiture & ſincérité dans leurs objections, ni ſurtout deſir ardent de trouver la vérité, qu'ils craignent au contraire & fuyent avec une averſion mêlée de frayeur. Le grand Philoſophe que l'Angleterre a révéré, & que toute l'Europe admire, ſeroit bien propre à fournir ce bel exemple. Un *Newton* religieux permettroit-il d'écouter un * & un ** impies?

Mais, comme dans de ſemblables matieres, & en général dans toutes celles qui ſont du reſſort de la Philoſophie, on doit éviter les moindres apparences du préjugé de l'autorité, & que d'ailleurs les Libertins ſe plaignent, quoique le plus injuſtement du monde, qu'on ne veut point entrer en lice avec eux, & qu'on cherche à les opprimer & à les accabler, plutôt qu'à les convaincre, voyons ſi l'on ne pourroit point aſſigner le degré de certitude en queſtion, celui qui réſulte des preuves tirées de la contemplation de cet Univers pour démontrer l'Exiſtence d'un Dieu, d'une maniere qui mette ce Dogme à l'abri de toute attaque, & qui ôte tout prétexte aux adverſaires de la Divinité.

Je vois quatre routes à ſuivre pour arriver à ce but; une route *Phyſique*, une route *Phyſico-mathématique*, une route *Mathématico-métaphyſique*, & une route *Métaphyſique*.

La premiere conſiſte dans la ſimple intuition des objets, dans la revue des différentes parties de l'univers, dans un examen, ſoit général, ſoit approfondi & détaillé, de ce qu'on nomme à bon droit les merveilles de la Nature. De cette intuition, de cet examen, on tire immédiatement la conſéquence. Il y a un Monde rempli de choſes grandes, magnifiques, belles, utiles, & ſurtout diſpoſées de maniere qu'il en réſulte un ſyſteme régulier, & accommodé à l'état & aux beſoins des Etres qui ſont partie de ce ſyſteme. Donc il y a un Etre, Auteur du Monde, Ordonnateur de ſes parties, Conſervateur & Directeur des individus & du Tout. C'eſt l'argument de David: *Les Cieux racontent la gloire de Dieu;* c'eſt celui de S. Paul: *Les choſes inviſibles de Dieu, ſavoir tant ſa puiſſance éternelle que ſa Divinité,*

ſe voyent comme à l'œil par la création du monde, étant conſidérées dans ſes ouvrages. C'eſt celui de pluſieurs Sages du Paganiſme, qui ont vu & reconnu Dieu dans l'Univers. Il eſt certain en effet, que c'eſt de toutes les preuves la plus frappante & la plus à portée de tous les hommes. Et quand ils n'ont pas le malheur d'être étourdis & embarraſſés par les Sophiſmes de l'Incrédulité, cette ſeule contemplation de la Nature ſuffit pour leur donner une perſuaſion inébranlable de l'Exiſtence de Dieu, & leur inſpirer des ſentimens de reſpect, d'amour & de confiance, d'où dépendent uniquement le repos & la joye de l'ame. Mais on s'éleve avec force contre cet Argument, on le traite de préjugé puérile & d'illuſion vulgaire; la Fatalité, ou le Hazard paroiſſent des principes bien plus propres à rendre raiſon des choſes; on met tout en œuvre pour arracher l'Empire de l'Univers à l'Etre ſouverainement parfait, & le ſoumettre à ces cauſes aveugles. Ce qui acheve d'ébranler aujourdhui la certitude que j'ai cru pouvoir nommer *phyſique* de l'Exiſtence de Dieu, c'eſt que des Philoſophes qui veulent paſſer pour Théiſtes & religieux, rejettent hautement les preuves d'où naît cette certitude, en parlent avec un mépris déclaré, & renferment ſous une même condamnation les Ouvrages que l'on a nommés *Théologies phyſiques*. Pour nous, nous laiſſons ici la choſe indéciſe, juſqu'à ce que nous ayons fait l'énumération des autres routes qu'on a ſubſtituées à cette premiere.

La ſeconde eſt celle que nous avons nommée *phyſico-mathématique*. Elle conſiſte à s'aſſurer que Dieu a non ſeulement fait de grandes & belles choſes, mais qu'il les a faites avec poids & meſure; que tous les rapports, toutes les proportions, toutes les combinaiſons, ſont autant de chefs-d'œuvre où la Géométrie & la Méchanique ſe trouvent portées au plus haut degré de perfection. Dans le fond cette route ne differe de la précédente, qu'en ce qu'elle embraſſe un nouvel ordre d'idées, un plus grand nombre de détails. La baſe ſur laquelle repoſe la certitude eſt toujours la même. J'avois admiré, en ſimple Phyſicien, ou même en ſimple Citoyen du Globe terreſtre, ces Aſtres éclatans qui décrivent fidélement leurs révolutions autour

de

de moi; j'avois adoré le Dieu qui les a allumés & ſuſpendus dans le Firmament; mais on m'abſorbe dans de nouveaux ſujets d'admiration bien plus puiſſans, quand on me donne les notions de la grandeur de ces maſſes, de leurs diſtances, des proportions entre ces maſſes & ces diſtances; quand, au lieu d'une Terre environnée de la voûte étoilée, on offre à mes yeux étonnés des Mondes, des Tourbillons, des Eſpaces immenſes où tout flêchit ſous la Loi du Très-haut. Cependant ce ſont les mêmes faits qui avoient occupé le Phyſicien, vus ſeulement ſous une toute autre face, & avec une toute autre préciſion. Par conſéquent les mêmes doutes reviennent. Cette Fatalité, ce Hazard, qui ont pu faire l'oeil & l'oreille, l'Homme & la Terre, le Soleil & les Aſtres, ont ſaiſi, à la faveur d'une infinité d'eſſais infiniment réitérés, cette aptitude & cette exactitude, que nous croyons l'ouvrage d'un moment, & d'un ſeul mot ſorti de la bouche de Dieu. On fait valoir ces ſuppoſitions, on pouſſe ces idées auſſi loin qu'elles peuvent aller; il ſemble que, pour certains Philoſophes, il y ait quelque choſe à gagner en ſe défaiſant de la notion d'une Intelligence, aux vues de laquelle ſont dues les perfections de l'Univers, tant celles qui ſe remarquent dans le Tout, que celles dont chaque partie eſt pourvue. Il y a des chimeres mathématiques, autant & peut-être plus que de chimeres métaphyſiques, malgré le penchant qui porte à regarder cette derniere ſcience comme leur région, leur véritable élément. Une tête remplie de figures & de calculs croit pouvoir tout évaluer & compaſſer: partant de principes abſtraits dont l'exiſtence réelle eſt entierement contradictoire, le Phyſico-mathématicien croit analyſer la Nature, & il ne fait que jouer, pour ainſi dire, aux problemes; il tourne & retourne, faſſe & reſaſſe, des propoſitions, des définitions, des ſuppoſitions qui lui en impoſent par l'extreme ſimplicité & la parfaite netteté avec leſquelles elles s'offrent à ſon eſprit, mais qui par là même devroient le convaincre qu'elles ne ſont point repréſentatives de la Nature, dont les opérations ſont également ſecretes & compliquées.

La troiſieme route que j'ai indiquée pour arriver aux preuves de l'Exiſtence de Dieu, c'eſt celle que je nomme *Mathématico-métaphy-*

phyſique ; & voici en quoi je la fais conſiſter. Des Génies diſtingués ſe ſont apperçus que la Matiere & le Mouvement, les Loix de la Méchanique, de la Dynamique, de la Statique, & des autres Sciences de ce genre, ne ſuffiſoient pas pour dévoiler le Dieu qui ſe cache dans la Nature, & qu'il reſtoit toujours un azyle à ſes adverſaires dans l'aſſertion des combinaiſons néceſſaires ou fortuites. Il s'agit donc de mettre au deſſus de ces combinaiſons & de leurs loix un Principe d'un autre ordre, d'où elles dépendent, & qui ne pouvant ſe trouver dans des Créatures purement paſſives & aveugles, dérive inconteſtablement d'une Intelligence ſuprême, qui a tout fait de la maniere la plus conforme à ſes perfections infinies. L'idée eſt ſans contredit vraye en ſoi; les phénomenes du Monde matériel vont ſe réſoudre dans les réalités du Monde intelligible; & celles ci ont entr'elles une liaiſon dont la ſource ſe trouve dans les vérités du Monde rationel, qui ſont les vrais principes univerſels, & qui coïncident avec les idées mêmes de Dieu. Mais que des Intelligences finies, & en particulier des Intelligences humaines, qui paroiſſent placées aſſez bas dans l'échelle des Etres ſpirituels; que de telles Intelligences puiſſent aſſigner le Principe métaphyſique, qui fait en même tems la Loi générale de l'Univers, & la Démonſtration unique de l'Exiſtence de Dieu, c'eſt ce qui paroit tout à fait impoſſible. Nous ne nous récrions point contre cette entrepriſe, comme quelques uns l'ont fait, en diſant que la Démonſtration de l'Exiſtence de Dieu ne ſauroit dépendre de calculs & de ſignes algébriques, qu'elle doit être à la portée de tout le monde, & qu'il ſeroit ſingulier qu'on fût obligé de faire main baſſe ſur toutes les preuves ordinaires que les Catéchiſmes & les Cours de Théologie renferment pour y ſubſtituer un Principe tel que celui de la moindre Action, ou tout autre du même genre, qu'on voudroit ériger en Principe primitif à cet égard. Ces objections me paroiſſent peu concluantes. Quiconque a de ſaines idées de la Démonſtration, ne ſçauroit douter qu'en général elle n'eſt pas faite pour le peuple, & qu'on ne la trouve point dans les Ouvrages ordinaires des Philoſophes & des Théologiens. Ces Ouvrages ne ſont gueres qu'un tiſſu de propoſitions,

liées

liées le plus ſouvent dans la mémoire & dans l'imagination de leurs Auteurs ſans l'être entr'elles par aucune force réelle de raiſonnement. L'éloquence, ou l'érudition, qui ſe trouvent mêlées dans l'expoſition de ces Vérités, achevent d'énerver entierement ce qui pourroit s'y trouver de ſolide & de concluant; & l'on ne remporte de ſemblables lectures que des probabilités vagues, dont l'eſprit eſt plus ou moins affecté, ſuivant que certaines cauſes externes y contribuent. Voilà, pour dire les choſes comme elles ſont, l'état où ſe trouve non ſeulement le Vulgaire, mais le très-grand nombre de ceux qui ont des connoiſſances acquiſes, par rapport aux Vérités ſuſceptibles de démonſtration. Rien donc ne ſeroit plus heureux & plus deſirable qu'une Démonſtration nette, conciſe, & à l'abri de toute conteſtation, qui établiroit l'exiſtence de Dieu ſur un fondement unique & inébranlable.

Il ſeroit inutile de ſe plaindre de l'*inintelligibilité* d'une ſemblable Démonſtration pour le peuple. Qui dit Démonſtration, dit une choſe néceſſairement inintelligible au peuple, à tous ceux qui n'ont pas étudié les regles du raiſonnement, & même à ceux qui les ayant étudiées ont négligé d'acquérir l'habitude de les réduire en pratique. On ne doit pas s'en laiſſer impoſer par l'abus perpétuel qu'on fait du terme de démontrer dans la Converſation, en Chaire, ou dans les Ouvrages. C'eſt cet abus qui eſt la principale cauſe du Pyrrhoniſme auquel ſe livrent ceux qui ont l'eſprit aſſez pénétrant pour appercevoir le ridicule des Dogmatiques téméraires; mais qui, ſoit par découragement, ſoit par quelque pente ſecrete à ſe débarraſſer des Vérités en général, à cauſe de quelques Vérités particulieres qui les importunent, ne ſçavent pas démêler parmi toutes ces aſſertions vagues & hazardées celles qui peuvent être conduites à l'évidence.

Après avoir ainſi rendu, ſi je ne me trompe, la plus exacte juſtice au deſſein de ceux que j'ai appellé *Mathématico-Métaphyſiciens*, je demeure toujours perſuadé qu'ils prennent un vol d'Icare, & que l'entrepriſe qu'ils n'ont pas ſimplement conçue, mais que quelques uns croyent avoir pleinement exécutée, eſt au deſſus de toutes les

forces humaines réunies, si tant eſt, comme je l'ai inſinué, qu'elle ne ſurpaſſe pas celles de toute Intelligence finie. Découvrir la Loi générale de l'Univers, c'eſt voir d'un coup d'oeil l'exiſtence de la Cauſe dans tous les effets; c'eſt ſe placer au centre de l'Univers, & ſaiſir tout à la fois le point où chaque rayon part de ce centre, & celui où il aboutit à un point donné de la circonférence.

Paſſons donc à une quatrieme & derniere claſſe de preuves, que j'appelle ſimplement *métaphyſiques*. Je vais tâcher d'en donner une idée bien préciſe. Peu de gens connoiſſent la Métaphyſique; pluſieurs la craignent. Certaines difficultés apparentes rebutent d'en acquérir la connoiſſance; dès-lors on ſe tire d'affaire en décriant cette Science comme inutile & chimérique. J'ai vu des gens qui avoient blanchi dans la Théologie & dans la Littérature, ſe glorifier fort ſérieuſement, ſe féliciter hautement, de ne connoître point la Métaphyſique, de ne l'avoir jamais étudiée, & de s'être par conſéquent toujours préſervés de ſes influences tant dans leurs Diſcours que dans leurs Ecrits. On l'auroit deviné ſans qu'ils s'en vantaſſent. D'un autre côté, les écarts où de prétendus Métaphyſiciens ſe jettent, produiſent auſſi un mauvais effet; quand on entend déraiſonner d'une maniere ſi étrange des gens qui ont paſſé toute leur vie à ſpéculer, & qui ſe piquent d'être de profonds Métaphyſiciens, on ſe perſuade que la ſcience qu'ils étudient eſt auſſi embarraſſée que leur cerveau, & auſſi découſue que leurs productions. Mais un Philoſophe judicieux ne s'arrête point à tous ces acceſſoires; on parle d'une Science, il travaille à la connoître, & ne l'apprécie qu'après en avoir acquis de juſtes idées.

La Métaphyſique eſt la Science des notions générales, qui ſe forment par abſtraction, à meſure que nous avançons dans la comparaiſon d'abord des différens individus, enſuite des eſpeces, & enfin des genres, juſqu'à ce que nous nous élevions à la notion la plus abſtraite, la plus univerſelle, au genre le plus éminent auquel nous puiſſions atteindre. Les opérations par leſquelles ſe forme la théorie des notions, ſont préciſément les mêmes qui font l'objet de la Logique,

que; il faut commencer par une intuition exacte & attentive des objets, paſſer de là à la réflexion pour les comparer & en juger, & combiner enſuite ces jugemens d'une maniere qui en forme des raiſonnemens concluans, & des ſuites de raiſonnement qui ayent le caractere de la Démonſtration. Ce n'eſt pas ici le lieu d'enſeigner plus au long comment on procede à cet égard, & ce qu'exige la conſtruction d'un Syſteme de Métaphyſique: mon but eſt uniquement de faire ſentir que toute certitude, de quelque genre qu'elle ſoit, dépend des premieres notions de la Métaphyſique. Il ſuffit, pour s'en convaincre, de remarquer que toutes les Sciences particulieres n'étant que des Théories d'Etres individuels, ſpécifiques, ou génériques, renfermés ſous quelque notion commune, il faut que ces Théories ſoyent ſubordonnées à celle de l'Etre en général, qu'elles en tirent leur vérité, & pour ainſi dire, leur légitimité; en ſorte que la ruine de la Certitude métaphyſique emporte celle de toutes les autres.

Pour me rapprocher après cela du but de ce Diſcours, je dis, & je ne vois pas comment on pourroit le nier, que toute Démonſtration de l'Exiſtence de Dieu, *phyſique*, *phyſico-mathématique*, ou *mathématico-métaphyſique*, n'eſt vraye qu'autant qu'elle eſt métaphyſiquement certaine & démontrée; d'où j'infere que la route la plus ſûre, ou même l'unique, pour arriver à une Démonſtration quelconque, & par là même à celle de l'Exiſtence de Dieu, c'eſt de réſoudre les preuves ſur leſquelles on l'appuye par une analyſe qui remonte juſqu'à ces notions communes où gît toute certitude. Sans cela vous retombez inévitablement dans quelcune des difficultés auxquelles nous avons vû que les routes précédentes étoient expoſées, & vous n'avez aucun moyen de vous délivrer de toutes ces difficultés; parce qu'en effet elles ſont irréſolubles, tant que vous ne fondez que ſur des principes *phyſiques*, *mathématiques*, ou en général ſur les principes de quelque Science particuliere que ce ſoit. J'oſe dire que voilà pourquoi il y a tant d'Ouvrages manqués ſur cet important ſujet. Les Incrédules ſentent fort bien leurs avantages & en profitent; ils font une vigoureuſe réſiſtance, tant qu'on ne leur oppoſe que les merveilles,

ou les Loix de la Nature ; ils ne ſont véritablement ſerrés, & pourſuivis jusques dans leurs derniers retranchemens, que quand on les force d'opter entre les maximes du bon ſens, (car voilà à quoi ſe réduiſent les notions communes de la Métaphyſique,) ou les paradoxes inſoutenables qu'ils ont l'art de pallier, dès qu'on les laiſſe maîtres de choiſir le terrain à leur avantage.

Ici donc commence la diſcuſſion du ſecond Article compris dans la Queſtion propoſée, ſçavoir, *quelle eſt la meilleure maniere de faire uſage de ces argumens* à poſteriori, *pour établir l'exiſtence de Dieu ?* Si je voulois y répondre pleinement, il faudroit m'acquitter moi-même de la tâche preſcrite ; mais ce ſeroit faire un Livre au lieu d'un Diſcours. Je crois donc qu'on trouvera que j'ai rempli le plan de celui-ci, pourvu que je poſe des regles, à l'aide desquelles on puiſſe faire uſage de ces argumens *à poſteriori*, ou juger ſi ceux qui les mettent en œuvre, le font avec ſuccès. L'eſſentiel des quatre routes précédentes ſe trouve compris dans ces regles ; & les inconvéniens attachés à chacune d'elles en particulier diſparoîtront.

I. On doit commencer par une expoſition des faits de la Nature, auſſi étendue que l'état préſent des connoiſſances naturelles le permet, auſſi liée que les divers rapports des parties de l'Univers qui s'offrent à nos regards, ou à nos recherches, en fourniſſent les moyens, auſſi nette & dégagée de toute fauſſe merveille, de tous ces récits fabuleux dont on a chargé de tout tems l'Hiſtoire naturelle, que le génie obſervateur & l'eſprit philoſophique, qui ont fait tant de progrès dans ces derniers ſiecles, peuvent y contribuer ; en un mot, où l'Expérience & le Raiſonnement agiſſent toujours de concert, & ne faſſent pas un pas ſans s'être bien aſſuré de la ſolidité du terrain. Il eſt aiſé de ſentir que l'exiſtence & les perfections de Dieu ne ſçauroient être déduites d'un amas d'idées confuſes, & en partie chimériques ; c'eſt comme ſi l'on vouloit tirer l'Eloge d'un grand Prince de quelque Roman qui auroit paru ſur ſon ſujet. Cette premiere partie de la tâche dont nous preſcrivons ici les regles, eſt immenſe, priſe

ſous

ſous un certain point de vue, & entant qu'on voudroit articuler tous les faits de détail, ou bien dans la ſuppoſition qu'on voudroit faire par ſoi-même toutes les Obſervations & toutes les Expériences; mais ce n'eſt pas là notre penſée. D'un côté, on peut réduire cette immenſité de faits à un certain combre de claſſes, & y rapporter ce qu'il y a de certain, d'avéré, d'inconteſtable dans chaque genre, en Aſtronomie, en Chymie, en Botanique, &c. & de l'autre, il eſt permis de regarder comme prouvé & démontré en matiere de fait tout ce qui a pour baſe des Obſervations & des Expériences exactes, réitérées, faites par des Philoſophes dont perſonne ne conteſte l'habileté & la véracité. C'étoit là ce qu'on ſe promettoit du grand Ouvrage, auquel deux célébres Modernes ont donné le nom d'*Hiſtoire Naturelle*. Mais, quelques preuves qu'on y trouve de leur génie & de leur ſçavoir, ils n'ont pourtant pas rempli l'idée que je viens de fournir; ils ont perdu trop ſouvent de vue la Nature; & ſe laſſant du pénible métier d'obſerver & de décrire, ils ont donné l'eſſor à leur imagination, & par des hypotheſes ſingulieres, & presque entierement précaires, ils ont ébranlé cette certitude qui devoit être le réſultat de leur travail, & à laquelle nous voudrions mettre en état de parvenir ceux qui s'occuperont déſormais d'un pareil travail.

II. Pour cet effet, après qu'ils auront accompli la premiere regle que nous venons d'indiquer, nous les invitons à ne point s'arrêter à des concluſions de détail, de l'ordre de celles qui ſe trouvent dans les différentes Théologies Phyſiques, à ne point tirer encore immédiatement l'idée du premier Etre, de la grandeur & de la magnificence des Cieux, de la ſtructure admirable de l'oeil & de l'oreille, de la ſagacité & des diverſes manoeuvres induſtrieuſes des Animaux, des Inſectes, & en général de conſéquences quelconques dérivées de l'Hiſtoire Naturelle, ſans aucune notion intermédiaire, ſans aucun principe métaphyſique, qui mette en évidence que ces concluſions ſont juſtes, & à l'abri de toute exception. Or je ne connois d'autre notion, d'autre principe, qui puiſſe produire cet effet, que la contingence de ces divers Etres individuels dont on a appris à connoître, par l'étude de

l'Hiſtoire Naturelle, l'exiſtence, les propriétés, les rélations, l'ordre & l'enchaînement. Il eſt inutile de s'écrier d'abord: O merveille! O puiſſance! O ſageſſe! O bonté! L'Incrédule ne prendra jamais cela que pour de vaines figures, de froides déclamations; il ſe cantonnera dans le fort inexpugnable, (au moins à de pareilles batteries,) de la Fatalité, du Hazard, du Spinoſiſme. Pour le déloger de là, il faut le convaincre que ces choſes ſi nombreuſes, ſi belles, ſi variées, ont pu ne point être, & pourroient être autrement qu'elles ne ſont. Dès-là il eſt impoſſible qu'aucune partie conſidérée en particulier, ni que le Tout formé de l'aſſemblage de ces parties, renferme en ſoi le principe de ſon exiſtence, poſſede cette *aſéité* qu'on voudroit lui attribuer pour ſe paſſer de l'idée d'un autre Etre, diſtinct du Monde & de la Matiere, qui ait ſeul la prérogative d'exiſter néceſſairement.

Cette preuve bien maniée eſt aſſurément la plus forte de toutes; elle eſt la ſeule démonſtrative. Obſervez, meſurez, peſez, calculez, tant que vous voudrez; vous n'avancerez abſolument rien, avant que d'avoir rompu la redoutable barriere de la néceſſité abſolue. Mais, dès-que ce pas eſt franchi, l'Univers rentre, pour ainſi dire, dans le néant, & ne peut plus en ſortir qu'à la voix de l'Etre véritablement infini, de cet Infini réel, que ſi peu de Philoſophes ont ſçu connoître & définir. Cette idée mérite que nous nous y arrêtions un moment. Les hommes en général, & preſque tous les Philoſophes, ont confondu l'Infini avec l'Incommenſurable, avec ce qui ſurpaſſe les bornes de nos conceptions. Trouvant enſuite dans la Nature des objets dont les uns ont une immenſité en grandeur, & les autres en petiteſſe, qui échappe à notre imagination; ils ont cru avoir ſaiſi la vraye notion de l'Infini; & l'appliquant à l'Univers, où ces différens objets ſe rencontrent, ils ont été portés à en faire un Tout infini; idée purement négative, qui ne ſignifie autre choſe que l'impuiſſance où nous ſommes d'embraſſer la connoiſſance de ce Tout. *Des-Cartes*, embarraſſé par les conſéquences qu'il découvroit dans cette aſſer-

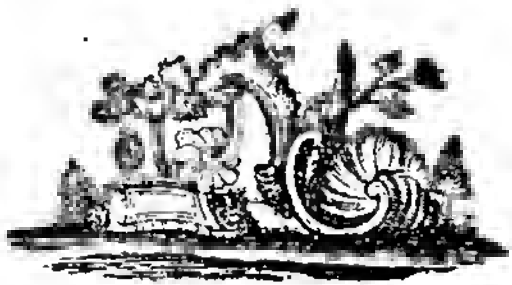
aſſertion, la déguiſa en quelque ſorte, & voulut ſe tirer d'affaire en ſubſtituant le terme d'Indéfini à celui d'Infini. Mais on apperçoit aſſez que les idées abſtraites de l'Etendu & de l'Eſpace, qu'il tranſportoit des Mathématiques à la Phyſique, l'induiſoient à croire que le Monde ne ſçauroit avoir de limites. Une erreur en entraîne une autre. Ceux qui étoient mal intentionnés contre l'Exiſtence de Dieu, ont prétendu que l'Infini étant une fois trouvé dans le Monde, il étoit ſuperflu de le chercher ailleurs; que le Monde avoit tous les caracteres & toutes les perfections de l'Etre exiſtant par ſoi même, & que le principe de tous ſes états, paſſés, préſens & à venir, ſe trouvoit dans la force eſſentielle, tant repréſentative que motrice, dont il étoit doué. On ne ſçauroit détruire ces ſuppoſitions, qu'en faiſant voir que l'Infini imaginaire n'a aucun rapport avec l'Infini réel, & qu'un aſſemblage quelconque d'Etres ſucceſſifs, ou ſimultanés, ne ſçauroit produire une ſubſtance vrayement infinie; parce que tout nombre eſt fini; & qu'il implique contradiction qu'il ne le ſoit pas; enſuite, parce que chaque chaînon de cette chaîne pouvant être détaché, anéanti, il ne réſultera jamais de ſemblables parties un Tout néceſſaire; enfin, & ſurtout, parce que l'Infini réel emporte un acte unique, ſimple, indiviſible, où les modifications, altérations & ſucceſſions, qui forment les décorations perpétuelles de ce Monde, ne ſçauroient ſubſiſter. C'eſt, ſi je ne me trompe, dans le développement de ces notions que conſiſte la véritable force des Argumens *à poſteriori* au ſujet de l'Exiſtence de Dieu. Tous ces Argumens ſe réduiſent alors à un ſeul. Après avoir avancé l'Enthymeme; Il y a des Etres: Donc il y a un Dieu; on tire de la conſidération de ces Etres la démonſtration de la Theſe qu'on ſe propoſe d'établir, non d'une conſidération phyſique, qui ſe borne à expoſer leur nombre, leur ordre, leurs rapports, & leurs perfections; mais d'une conſidération métaphyſique, qui pénetre l'écorce de ces êtres pour en ſaiſir le fond & l'eſſence, & pour dévoiler ſurtout cette contingence,

ce, qu'on peut appeller à juſte titre le miroir de l'Exiſtence néceſſaire de Dieu.

111. Quand on eſt juſques-là, le reſte s'exécute en quelque ſorte de ſoi-même. Ces Créatures, qui ne ſont que parce qu'il y a un Dieu, commencent à annoncer la gloire de leur Auteur, elles entonnent un hymne à l'honneur de toutes ſes perfections; il ne s'agit plus que de rendre leurs voix diſtinctes & concordantes. C'eſt alors qu'on peut parler d'ordre, de fins, de vues, de moyens & de but, de ſageſſe & de bonté; c'eſt alors que chaque Créature étalant ce qu'elle a de réalités & de beautés, devient un miroir des perfections divines avec leſquelles elle a quelque analogie. Ici le Livre de la Nature s'ouvre véritablement, & chaque page devient liſible & lumineuſe. Quelques lacunes qui y reſtent encore, ſont ſi peu de choſe au prix de tout ce qui eſt écrit en caracteres diſtincts & ineffaçables, qu'il n'y a qu'un aveuglement volontaire qui puiſſe empêcher d'y trouver ce que nous cherchons, les preuves les plus frappantes de toutes les perfections ſouveraines, liées inſéparablement entr'elles, & agiſſant avec une conſtante harmonie. C'eſt une conſidération ſur laquelle il faut principalement inſiſter, que celle qui eſt priſe de cette liaiſon des perfections divines, en vertu de laquelle chaque détermination des choſes exiſtentes eſt un réſultat de toutes ces perfections réunies, & ne devient pleinement intelligible, qu'entant qu'on connoit comment & combien chacune de ces perfections a influé ſur la détermination actuelle. On trouve dans cette notion la vraye Théodicée, l'unique ſource des réponſes aux objections priſes des déſordres & des imperfections dont le Monde paroit rempli. La ſuppoſition d'une Puiſſance qui feroit tout à la fois tout ce qu'elle peut faire, ou d'une Bonté qui combleroit toutes ſortes d'êtres de toutes ſortes de biens portés au plus haut degré, eſt incompatible avec la ſouveraine perfection, qui ne laiſſe agir aucune perfection particuliere, ſeule & ſans le concours de toutes les autres. Ou bien, s'il y en a une qui doive préſider à leur exer-

exercice, & ſe trouver, pour ainſi dire, au timon, c'eſt la Sageſſe, qui eſt l'ame de toutes les opérations divines.

Je ne fais que montrer les différens chefs qui doivent entrer dans une tractation complette du ſujet propoſé. Chacun après cela, ſuivant le tour d'eſprit qui lui eſt propre, ou les études particulieres dont il a fait ſon objet, peut varier & modifier en bien des manieres ce plan général, ſans porter atteinte à la certitude deſirée. Il ſuffit de ne point perdre de vue les diſtinctions que j'ai poſées, & les regles que j'ai preſcrites, pour arriver à la conviction, & pour y conduire tous ceux qui n'ont pas adopté les égaremens du Pyrrhoniſme univerſel, derniere reſſource du Libertinage d'eſprit & de coeur. Après avoir ainſi fortifié le terrain que nous défendons, rien n'eſt plus aiſé que de faire des excurſions ſur celui des Adverſaires, & de leur montrer avec l'évidence la plus victorieuſe, que tous ces reproches de crédulité, toutes ces railleries dont ils accablent les partiſans des dogmes de la Religion, retombent ſur eux à plomb, n'y ayant rien de plus gratuit & de plus abſurde que les ſuppoſitions qu'ils ſont obligés de faire pour ſe ſouſtraire à ces dogmes.



DISCOURS

SUR LA MÉTAPHYSIQUE *).

PAR M. MERIAN.

Comme toutes nos connoiſſances tirent leur origine des ſens; il falloit que les êtres ſenſibles, les corps qui nous environnent, le ſpectacle du monde matériel fuſſent les premiers objets de la curioſité de l'homme. Elle ne s'exerça d'abord que ſur des choſes individuelles: enſuite l'on compara ces choſes; l'on remarqua leurs différences, leurs rapports, les changemens qu'elles ſubiſſent. Après avoir recueilli un grand nombre d'obſervations, on eſſaya de les lier; & l'on parvint à des analogies, à des hypotheſes, à des points de vue généraux. C'eſt ainſi que la Phyſique, groſſiere dans ſes commencemens, ſe perfectionna par degrés, s'aſſujettit tous les phénomenes dont l'eſpace & le tems ſont remplis, & travaillant ſur le fonds immenſe de la Nature, devint inépuiſable comme elle.

La matiere & le mouvement ſont les plus hauts points où l'on puiſſe remonter dans la recherche des cauſes naturelles; mais qu'eſt-ce que la matiere & le mouvement? Ici s'ouvre une nouvelle perſpective. Ce ne ſont plus ces corps que l'on voyoit, que l'on touchoit, dont on meſuroit la grandeur, déterminoit la figure, calculoit la vîteſſe; mais des atomes, des élémens, des êtres ſimples, des forces, des repréſentations; c'eſt un Monde tranſcendant, gouverné par de nouvelles loix, qui ſont le précis ſublime des loix de la Phyſique. Là ſe cachent à nos ſens les machines & les premiers reſſorts du théatre mobile de l'univers.

Mais

*) Lû dans l'Aſſemblée publique du 6. Juin 1765.

Mais tôt ou tard ces contemplations doivent ramener le contemplateur à lui-même. Il arrivera un moment où il ſe dira avec ſurpriſe: que ſuis-je donc moi qui me tourmente pour ſavoir ce que ſont les autres êtres? Quelle eſt cette toile animée où la Nature vient peindre ſes merveilles, & qui réagit ſur ces tableaux en tant de manieres différentes? Alors il deſcendra dans l'abîme de ſon être, il s'occupera de l'analyſe de ſes facultés, il méditera ſur ſa propre nature. Quelle foule de ſujets dans un ſujet ſi ſimple? Perceptions, idées, ſouvenir, réflexion, goût, ſentiment, raiſon & folie, plaiſir & douleur, nous ſommes tour à tour tout cela; c'eſt toujours nous, mais ſous des faces infiniment variées. Par quel mécaniſme, ou par quelle magie la penſée s'unit-elle à l'étendue, & la volonté au mouvement? Comment diſcerner ce fond de notre être qui ſe déguiſe ſous tant de formes? Qu'eſt-il? D'où vient-il? Que doit-il devenir? Il faut avouer que nous ſommes un probleme bien curieux & bien difficile.

Enfin c'eſt en réfléchiſſant ſur l'origine commune des eſprits & des corps, que nous nous élevons à la ſouveraine cauſe, à cet être infini, éternel, indépendant, la ſource des intelligences, le premier moteur de la matiere. Quels ſont ſes attributs? En quelle relation eſt-il avec le monde? Que devons nous en craindre ou en eſpérer? Ce ſont autant de queſtions que notre eſprit, trop téméraire peut-être, a hazardé d'approfondir & de réſoudre.

Mais en effet, comment cet eſprit eſt-il parvenu juſque-là? En retournant ſur ſes pas, il voit qu'il a eu continuellement à lutter contre ſa foibleſſe. Son étroite capacité ne lui permettant ni d'embraſſer ni de retenir au delà d'un certain nombre d'idées, il ne lui reſta d'autre reſſource que de ranger ſes idées en claſſes, d'attacher à chacune de ces claſſes un ſigne qui la fît reconnoître, en un mot, de créer les eſpeces & les genres, frêles mais utiles échaffaudages de nos connoiſſances. De ces abſtractions, fondues en un ſeul corps, on a fait une ſcience à part, qui contient les élémens, & raſſemble les matériaux de toutes les ſciences.

C'eſt par cette raiſon qu'elle fut nommée la ſcience premiere, quoiqu'elle n'ait pû ſe former qu'après les autres. Du tems d'Ariſtote elle faiſoit encore partie de la *Zétuméné*, ou de la ſcience qui reſtoit à chercher. C'eſt à elle que les philoſophes de l'École donnerent le nom de Métaphyſique. Nous ſuivrons ici l'uſage reçu. La Métaphyſique commence là où la Phyſique finit: elle comprend l'Ontologie, la Coſmologie, la Pſychologie, & la Théologie naturelle. Tout ce que nous allons propoſer regarde ces quatre ſciences. Je ne les enviſagerai aujourd'hui que ſous un aſpect général: je tâcherai d'en fixer la valeur, tant abſolue que relative: je parlerai de leurs avantages auſſi-bien que de leurs inconvéniens; & je ne diſſimulerai pas les défauts de ceux qui les cultivent.

Ce n'eſt point outrer l'éloge de la Métaphyſique que de dire qu'elle eſt la plus ſublime & la plus excellente de toutes les ſciences. Quels ſont les ſujets qu'elle traite? c'eſt ce qu'il y a de plus noble & de plus grand; ce qu'il y a de plus digne de nos recherches, ce qui nous touche de plus près, le monde des eſprits, notre propre être, l'être ſuprême, les principes des choſes, l'origine des notions. Si nous réfléchiſſons ſur le but de nos connoiſſances, nous verrons que la vraie étude de l'homme eſt l'homme, & que les autres ne ſont intéreſſantes qu'autant qu'elles ſe rapportent à cette grande fin. La Pſychologie nous apprend à nous connoître, ou du moins à nous chercher; & la Morale tient, d'une façon particuliere, à preſque toute la Métaphyſique. Peut on mieux employer ſes lumieres & ſes talens qu'à examiner ſur quoi portent les devoirs qui nous attachent à Dieu, à nos ſemblables, à l'univers, à nous mêmes? Etrangers chez nous, de quoi nous ſert de meſurer les cieux, & de ſonder les abîmes?

Mais ces connoiſſances elles-mêmes dépendent de la Métaphyſique. Depuis Ariſtote juſques à Leibnitz tous les grands hommes ont reconnu qu'elle verſe ſes influences heureuſes ſur toutes les ſciences, qu'elle leur fournit des principes juſtes, des notions directrices, des vues ſaines, & la vraie méthode.

Il eſt un ſentiment du vrai, une ſagacité, qui rapproche les rapports éloignés, ſaiſit le chemin le plus court, voit la Nature en grand, & va tout d'un coup où l'aſſiduité & le travail ne ſe traînent qu'avec lenteur. Ce ſens philoſophique fait germer & fructifier toutes nos idées: c'eſt lui qui éleve le phyſicien au deſſus du ſimple obſervateur, qui organiſe, pour ainſi dire, la maſſe peſante de l'érudition, & qui dans tous les genres diſtingue l'homme de génie du ſavant laborieux. Ce ſentiment, je l'avoue, eſt un don précieux de la nature, mais qui demande à être cultivé; & ce n'eſt qu'en le nourriſſant des premiers principes, ou de ce qu'il y a de métaphyſique dans les ſciences, qu'on le développe, & qu'on lui donne de l'activité.

A quoi ſervent les ſciences? Dans un ſiecle éclairé, & chez des nations civiliſées, cette queſtion ne devroit jamais être faite. Cependant c'eſt l'aſſaut éternel que l'ignorance livre au ſavoir; il n'eſt point d'homme de lettres qui ne l'ait eſſuyé. Le Phyſicien n'eſt guere embarraſſé dans cette rencontre: il peut indiquer des uſages qui ſe font ſentir aux eſprits les plus matériels & les plus ſtupides. La Géographie conduit le voyageur; l'Aſtronomie diviſe les tems & les ſaiſons; la Mécanique, l'Hydroſtatique, l'Optique fourniſſent ſoit aux beſoins, ſoit aux commodités de la vie; la Médecine guérit nos maux, & retarde l'inſtant fatal de la mort. Mais la Métaphyſique ne fait rien de tout cela: elle eſt donc, à cet égard, dans un cas extrémement défavorable; & c'eſt-ce qui la dégrade aux yeux du vulgaire, qui ne juge que par les yeux.

Il eſt une autre eſpece d'hommes, qui donnent à l'eſprit humain les bornes du leur: ils ne prétendent point que la ſcience ſoit inutile; mais ce qu'ils ne ſavent pas ne peut pas être ſû, ou n'eſt pas digne de l'être. Vous les verrez traiter de chimere & de viſion toutes les recherches qui paſſent leur capacité, ou qui peſeroient trop à leur indoience. Ils reſſemblent à ces anciens Géographes qui, après avoir deſſiné les régions qu'ils connoiſſoient, écrivoient ſur les bords de

leurs cartes, „au delà il n'y a plus qu'un Océan ſans fin, des déſerts „impénétrables, & les monts inacceſſibles de la Scythie."

Ce qui ſurprend davantage, c'eſt de voir de vrais ſavans, abſorbés dans leur genre, mépriſer tous ceux qu'ils n'ont point cultivés, ou qu'ils n'ont cultivés que ſuperficiellement. A conſidérer la choſe ſans prévention, il me ſemble qu'on ne ſauroit déprimer une ſcience qu'aux dépens de toutes les autres. Si elles ſont inutiles, abandonnons-les toutes: ſi elles ſont utiles, n'en abandonnons aucune; & que chacun ſuive ſon goût, ou ſe laiſſe entrainer à l'aſcendant de ſon génie. On riſque de perdre l'eſtime publique en ſe la diſputant: partageons-la, & ne fruſtrons perſonne de la portion qui lui revient.

C'eſt un ſpectacle étrange que des philoſophes qui ſe font la guerre ſur un frivole point d'honneur. Tandis que le Métaphyſicien ne voit rien au deſſus de la Métaphyſique; le Phyſicien & le Géometre regardent ſes prétentions avec mépris, & ſoutiennent, avec auſſi peu de fondement, qu'il n'y a de vraie ſcience que la leur. Je ne m'arroge pas le droit de régler les rangs; mais je me permettrai quelques réflexions

Le prix de chaque Science me paroît être en raiſon compoſée du but où elle tend, & de la faculté d'y atteindre. Or, ſi je ne me trompe, ces deux points étant compenſés l'un par l'autre, la valeur comparative de toutes les ſciences humaines ſe réduira à une eſpece d'égalité. L'une travaille ſur des ſujets plus importans, l'autre avec plus de facilité: celle-ci eſt plus ſublime dans ſes vues, celle-là plus ſûre dans ſes opérations.

Il ne faut qu'être de bonne foi pour convenir que la Métaphyſique s'attache à de plus hauts objets que les ſciences naturelles. Elle pénetre dans l'intérieur des choſes dont la Phyſique ne fait qu'entamer l'écorce. Qui ne préféreroit, ſi le choix étoit en ſon pouvoir, à la connoiſſance des phénomenes naturels, & des cauſes qui les produiſent, la connoiſſance de ſoi même, de ſon origine, de ſa deſtination? La Phyſique

ſique ne tire-t-elle pas ſon plus grand luſtre du jour qu'elle répand ſur la Théologie naturelle? N'eſt-ce pas là le lieu-commun que ſes panégyriſtes ont le plus ſouvent rebattu? Mais la Phyſique, à cet égard, ne donne que des faits; c'eſt à la Méraphyſique à les convertir en preuves.

On peut dire en général que chaque partie de la Phyſique aboutit à un terme où s'ouvre un nouveau champ pour le ſpéculateur; il y a même telles parties de Phyſique qui ont beſoin d'être rectifiées par la ſpéculation. Quand la doctrine des ſens a paſſé par les mains du phyſicien, nous ſommes encore fort éloignés de connoître les limites de nos différentes ſenſations: nous confondons la vûe & le toucher; & l'erreur eſt inévitable, ſi nous n'avons recours à une ſcience plus relevée. L'Optique nous fait voir, par des lignes, & par des angles inviſibles, des diſtances, des figures, des grandeurs qui ne ſauroient être l'objet de la vue. Ce ne ſont ni les Phyſiciens, ni les Géometres; ce ſont les Méraphyſiciens qui nous ont enſeigné la vraie Théorie des ſenſations.

Je veux que nous ſoyons parvenus à analyſer tous les phénomenes naturels dans leurs principes les plus ſimples, ou les plus généraux: notre curioſité ſera-t-elle ſatisfaite? Ne reſtera-t-il rien à déſirer? Vous croyez toucher au premier chaînon; mais ce chaînon dépend d'une infinité d'autres, qui échappent à votre vue. Vos loix les plus univerſelles ne ſont peut-être que des loix très ſpéciales; peut-être même ne ſont-elles que des exceptions. Qu'eſt-ce par rapport à l'immenſité que ce coin du monde où nous obſervons? S'il y a donc une ſcience qui reprenne la chaîne où vous l'avez laiſſée, & qui s'efforce de la ſuivre juſqu'au bout; quel qu'en puiſſe être le ſuccès, on ne ſauroit au moins conteſter la grandeur de l'entrepriſe.

Non-ſeulement le parfait Méraphyſicien poſſéderoit des connoiſſances plus utiles, plus profondes, plus curieuſes que ne le ſeroit la Phyſique dans ſon plus haut période; il ſeroit parfait Phyſicien à ſon

ſon tour. Les élémens des corps ſeroient à découvert devant lui; il verroit, comme ſous ſes yeux, les phénomenes éclorre de leurs principes, & les cauſes ſecondes ſortir des cauſes premieres. Il ſuivroit, dans ſes moindres détails, le vaſte plan que l'éternel Géometre a conçu & exécuté. L'univers n'auroit point de prodige pour lui, la Nature point de voile, la Phyſique point de myſtere.

Mettons à préſent dans la balance l'eſpoir qu'il y a de part & d'autre: peſons les progrès que l'on peut raiſonnablement ſe promettre dans ces deux ſciences: examinons pour cet effet, & ſur quoi elles ſont fondées, & par quels moyens on peut les perfectionner.

L'obſervation & l'expérience ſont la baſe commune de la ſcience des corps, & de celle des êtres immatériels: mais on ne ſauroit ſe déguiſer que le phyſicien n'ait ici un avantage conſidérable ſur le ſpéculateur.

Les objets de la Métaphyſique ſont d'une ſubtilité, d'une fineſſe qui met en défaut les génies les plus pénétrans, & les plus exercés à la méditation. Tantôt ils s'échappent lors même qu'on croit les avoir fixés; tantôt ils ſont obſcurcis les uns par les autres; ſouvent il n'y a qu'un inſtant propre à les ſaiſir, & cet inſtant manqué ne ſe retrouve point: rarement on eſt maître de répéter ſes obſervations; & quand on y revient, le ſujet a changé. Avec une patience à toute épreuve, avec une extrême contention d'eſprit, on ne ſurmonte pas toujours de ſi puiſſans obſtacles.

„Rien ne nous eſt mieux connu que l'ame, dit Leibnitz, parce „qu'elle nous eſt intime, c'eſt à dire intime à elle même.“ Mais ne faut-il point à l'eſprit, comme à l'oeil, une certaine diſtance pour appercevoir diſtinctement? Quelle peine ne ſent-il pas à ſe replier ſur lui-même? Ces ſortes de contemplations ne ſont ſi difficiles & ſi incertaines que parce qu'elles ſe font ſur le ſujet même qui contemple, parce que nous ſommes, tout à la fois, les obſervateurs & la choſe à obſerver. La Pſychologie n'opere pas par des projections artificielles;

pour

pour voir au dedans de nous, il faut, pour ainſi dire, nous placer hors de nous: quelque acte de notre ame que nous contemplions, ce n'eſt jamais dans l'inſtant qu'il s'exécute; c'eſt toujours dans le paſſé; & après les plus grands efforts, eſt-on bien ſûr que les objets ne ſe ſoient pas dénaturés par des nuances imperceptibles? Il n'eſt point de Méraphyſicien qui ne me comprenne, parce qu'il n'en eſt point qui ne l'ait éprouvé.

La Phyſique n'a aucun de ces déſavantages. Les corps, les phénomenes ſe prêtent à nos ſens preſque autant de fois que nous le déſirons. Ce ſont ou des choſes permanentes, ou des choſes qui reviennent fréquemment. Nous ſommes entourés d'une infinité de corps formés ſur le même modele; leurs propriétés ont quelque choſe de frappant; on les manie à ſon aiſe; on marque exactement & leurs différences & leurs rapports; il ne faut qu'une attention médiocre pour éviter les mépriſes. Dans les phénomenes plus rares ou plus compliqués, on peut au moins eſpérer de réuſſir par un travail opiniâtre; au lieu que le Métaphyſicien paſſe ſouvent ſa vie à méditer en pure perte.

Loin de rencontrer des écueils dans les objets de ſes recherches, le Phyſicien y trouve de nouveaux ſecours: non content d'interroger la Nature, il la force à répondre. Qu'on porte la vue ſur le nombre prodigieux d'artifices qu'il employe pour lui arracher ſes ſecrets, ſur ces inſtrumens qui pénétrent dans les corps, étendent la ſphere des ſens, les fortifient, & ſemblent même les multiplier. Le Chymiſte, par la vertu de ſes diſſolvans, & par l'action puiſſante du feu, diviſe la matiere juſqu'en ſes moindres molécules. L'Anatomiſte examine la ſtructure intérieure de l'animal, creuſe dans les canaux où circulent les liqueurs diſpenſatrices de la vie, & ſuit le jeu de l'organiſation. Ici un petit verre nous dévoile les merveilles du Microcoſme; là un Aſtronome dreſſe ſa lunette contre le firmament, obſerve la poſition & la marche de ces vaſtes corps qui roulent dans l'immenſité, voit briller de nouveaux ſoleils dans de nouveaux cieux, un univers

inconnu ſemble naître à ſes regards. Ce fluide qui entoure notre globe, eſt peſé dans le barometre, eſt condenſé ou raréfié dans la machine pneumatique. Un fluide infiniment plus ſubtil, dont tous les corps ſont plus ou moins imprégnés, obéit à l'électriſation. Le priſme décompoſe ces faiſceaux lumineux que l'aſtre du jour darde juſqu'à nous, & y découvre la naiſſance des différentes couleurs dont la Nature ſe pare. Je n'aurois jamais fait ſi je voulois détailler toutes les reſſources de cette Science. Qu'eſt-ce que la Métaphyſique peut y oppoſer? Ce n'eſt que par des ſpéculations qu'elle s'aide dans ſes ſpéculations.

Les ſecours-même qu'elle partage avec la Phyſique, ne ſont pour elle ni auſſi ſûrs ni auſſi étendus. Je ne décide point ſi le monde immatériel eſt plus ou moins varié que celui des corps; mais ce que perſonne n'ignore, c'eſt que ce dernier offre des analogies plus ſaillantes & mieux caractériſées. De là vient que les claſſes y ſont plus exactement diſtribuées, & les inductions moins ſujettes à l'erreur.

Enfin, c'eſt ſurtout dans les ſciences auxiliaires que la Phyſique triomphe: on ſent que je veux parler de tout ce qui eſt compris ſous le nom général de Mathématiques.

Les Mathématiques ſont la ſcience de la Quantité, tant continue que diſcrete, ſcience idéale & qui ne roule que ſur des abſtractions. Les Mathématiques ne ſont qu'une branche de l'Ontologie, elles ne ſont, à proprement parler, que la Métaphyſique de la Quantité.

Mais cette branche s'eſt ſi fort éloignée du tronc, qu'elle en paroît ſéparée. Le Métaphyſicien ſe contente de voir comment les notions d'étendue, de figure, & de nombre ſe forment dans notre eſprit; le Géometre en ſuit les propriétés & les rapports. C'eſt ainſi qu'il tire du ſein de la Métaphyſique une ſcience qui devient la rivale

de

de la Métaphyſique, & qui l'éclipſe par la vive lumiere dont elle rayonne de tout côté.

L'évidence mathématique réſulte de la préciſion & de l'exacte détermination des idées: chacune de ces idées a ſes propres traits, qui ne ſe mêlent jamais avec les traits des autres: tout eſt bien diſtingué, & une Logique rigoureuſe lie toujours les prémiſſes avec la concluſion. Mais d'où vient cette éminente prérogative? N'eſt-ce pas principalement de ce que toutes les notions géométriques, repréſentables par des caracteres, peuvent être peintes aux yeux & à l'imagination? Par là chaque pas du Mathématicien eſt aſſuré; ce ſont autant de ſignaux qui le guident, par une route toujours ſûre, à travers le vaſte champ de ſes combinaiſons. La Géometrie & l'Analyſe ſont deux langues dans leſquelles on peut traduire toutes les conceptions abſtraites qui concernent la Quantité, & qui de plus ont l'avantage de pouvoir être traduites l'une dans l'autre. Ces langues n'ont point de ſynonime, point d'expreſſion vague, aucun des défauts de celles que nous parlons. Si le Mathématicien étoit borné à des conceptions purement intellectuelles, ſa ſcience ſeroit encore à naître. Pourquoi a-t-elle plus de clarté, plus d'évidence que le reſte de l'Ontologie? C'eſt préciſément parce qu'elle eſt moins abſtraite, ou parce que ſes abſtractions prennent une forme que l'on peut toucher, voir, imaginer.

Mais on ſe vante d'avoir des démonſtrations en Métaphyſique: il y a des philoſophes qui vont juſqu'à prétendre que toute la Métaphyſique eſt démontrée, comme le ſont les Elémens d'Euclide. Diſtinguons. La Métaphyſique renferme trois ſciences analogues à la Phyſique, & que l'on pourroit nommer la Phyſique des êtres immatériels: elle en renferme une quatrieme analogue aux Mathématiques, & dont nous avons vû que les Mathématiques ſont une portion détachée. Dans les Sciences naturelles on démontre quelquefois d'après des hypotheſes; mais ces hypotheſes, quand elles auroient le plus haut degré de vraiſemblance, ne ſont point ſuſceptibles de démonſtra-

tion. Il en eſt de même des trois ſciences tranſcendantes qui répondent à la Phyſique: elles ne ſauroient être démontrables à la rigueur, parce que la nature des ſujets y répugne.

Mais au moins, dira-t-on, l'évidence de l'Ontologie peut faire face à l'évidence Géométrique. Cela n'eſt point impoſſible, & cela ſe pourra en effet lorsque cette Science ſera pouſſée auſſi loin que celle des Quantités, lorsqu'elle aura trouvé le moyen de démêler & de fixer, avec préciſion, nos idées; ou lorsqu'elle aura inventé cette Caractériſtique univerſelle qui eſt en Métaphyſique ce qu'en Chymie eſt le grand-oeuvre. Alors elle marchera de pair avec l'altiere Géometrie; diſons plus, la Géometrie baiſſera ſon compas devant elle, & la reconnoîtra pour la Reine des ſciences. Mais en ſommes nous là? & peut-on s'aveugler au point de le croire?

Je demande, non aux démonſtrateurs ivres de leurs ſyſtemes, mais à tous ceux qui les liſent de ſang froid, ſi cette lecture produit en eux la même conviction que celle d'un livre de Géométrie ou d'Algebre. Si vous démontrez comme un Euclide, pourquoi ne me convainquez-vous pas comme un Euclide? En Mathématiques il n'y a qu'une ſecte, ou plutôt il n'y en a point; mais qui compteroit les ſectes & les ſyſtemes philoſophiques que la nuit de l'oubli a déjà engloutis? & combien n'en voyons nous pas encore qui ſubiſſent, ou qui ſont prêts à ſubir la même deſtinée?

Cette affectation de la méthode géométrique a fait un tort infini aux ſciences ſpéculatives: elle a ſouvent répandu du ridicule ſur les vérités les plus reſpectables. Et en effet un grand nombre de ces preuves démonſtratives, ne tirant leur force que du preſtige des définitions, ne démontrent que l'orgueilleuſe foibleſſe de l'entendement humain. On rendroit un ſervice eſſentiel à la Raiſon, ſi l'on pouvoit guérir les philoſophes de cette maladie, en leur perſuadant qu'il y a infiniment plus de ſcience à ſavoir ignorer ce qu'on ignore, qu'à ſavoir le démontrer. Quel eſt le vrai ſage? Cette queſtion a été décidée

cidée ſur le trépied de Delphes, & jamais oracle plus ſûr n'eſt ſorti de la bouche d'Apollon.

Je crois avoir donné, dans cette diſcuſſion, des preuves de mon impartialité. Mais, après tout, ſi la Métaphyſique a ſes côtés obſcurs; les autres ſciences n'ont-elles pas les leurs? La Phyſique, en raſſemblant autour d'elle tout ſon appareil, peut-elle ſe vanter d'avoir deviné toutes les énigmes de la Nature? A-t-elle éclairci tous les doutes, expliqué tous les phénomenes? Connoiſſons-nous, avec une entiere certitude, les cauſes du reſſort, de la force magnétique, de la lumiere, de l'électricité, de la génération des animaux, le ſubtil mécaniſme des corps organiſés, le grand mécaniſme de l'univers? En parcourant l'hiſtoire de cette ſcience, on trouve partout des hypotheſes détruites par des hypotheſes, & ſouvent des erreurs modernes ſubſtituées aux erreurs anciennes. La Géométrie même, qui lui prête ſon ſecourable flambeau, la Géométrie dont les progrès ont été ſi prodigieuſement accélérés depuis un ſiecle, eſt encore environnée de hauteurs où elle ne ſauroit atteindre.

On peut faire ici une remarque très curieuſe. Si nous recherchons pourquoi il y a ſi peu de clarté dans la Métaphyſique, il ſe trouvera que c'eſt, en grande partie, parce qu'elle remonte aux principes des autres ſciences, & que ces principes ne ſont pas clairs. Le Géometre & le Phyſicien, en paſſant ſur les premieres notions, ſe mettent d'abord au large, & laiſſent le doute & l'obſcurité derriere eux. Le premier ſuppoſe des points, des lignes, des ſurfaces, des unités: le ſecond prend les corps pour des êtres étendus, impénétrables, diviſibles à l'infini; il parle d'eſpace, de durée, d'action, de cauſe, de force, de mouvement. Si l'on met ces idées au creuſet de la ſpéculation, on les trouve remplies de difficultés; mais c'eſt de quoi ils ne s'embarraſſent pas. Pouſſez-les, de propoſition en propoſition, juſques aux confins de leurs Sciences: ils ſeront obligés d'en demeurer là, ou de ſe ſauver dans les bras de la Métaphyſique.

Tant que la Géométrie ſe ſoutient ſur ſes propres ailes, c'eſt un aigle audacieux, qui plane dans le haut des airs, le regard toujours fixé vers le Soleil de l'Evidence. Mais voyez-la dans ces problemes mixtes où, gênée par des matieres hétérogenes, elle n'eſt pas entierement à elle-même Les loix du mouvement ſont-elles contingentes ou néceſſaires? Eſt-ce la maſſe multipliée par la viteſſe, ou par le quarré de la viteſſe, qui meſure la force motrice? Eſt-ce la même ſomme de mouvement, ou la même ſomme de force vive qui ſe conſerve inaltérable? ou n'eſt-ce ni l'une ni l'autre? Les plus célébres Géometres diſputent ſur ces points: ils ne ſont pas plus d'accord ſur les principes métaphyſiques de cet admirable calcul qui a l'Infini pour objet, quoiqu'ils le ſoient dans les conſéquences. En un mot, tous ces grands eſprits, dont les noms ſeuls ſont des éloges, les Newton & les Leibnitz, les Bernoulli & les Euler, dès qu'ils ſont des excurſions dans les Sciences ſpéculatives, ne voyent pas plus clair que nous: le compas leur tombe des mains, le flambeau d'Uranie ceſſe d'éclairer leur marche; ils ſont réduits, comme nous, à chercher la vérité en tâtonnant, ou à la ſuivre à la lueur d'un foible crépuſcule. „Les „extrémités des Sciences, dit Montaigne, tombent dans l'éblouiſ„ſement."

Mais n'y a-t-il donc qu'obſcurités dans la Métaphyſique? Elle a, ſans doute, ſes faces lumineuſes; il ne s'agit que de les diſtinguer de celles qui ne le ſont pas, & de celles qui renvoyent un faux jour. Chaque ſcience a ſon genre de clarté: la Métaphyſique, qui contient éminemment toutes les ſciences, en a de tous les genres. C'eſt un travers de la croire toute démontrable; c'en eſt un autre de la croire toute incompatible avec l'évidence géométrique; c'en eſt un plus grand de s'imaginer qu'il n'y a point de certitude ſans démonſtration. Le vrai philoſophe diſcerne les différens degrès de cette lumiere qui brille dans les ténebres de la Métaphyſique; il en recueille les rayons épars, il tâche de la répandre, & de diſſiper une partie du brouillard qui en occupe les bords.

Veut-

Veut-on juger du mérite des ſciences d'après la réputation de ceux qui y ont excellé? Tournons les yeux vers ces illuſtres Métaphyſiciens, nos avant-coureurs, & nos modeles. Leurs noms ſont placés, dans le temple de la Renommée, parmi les noms les plus diſtingués. Tous les âges répetent celui d'Ariſtote: la gloire du maître jette un éclat auſſi vif que celle du diſciple; l'un s'occupe à dompter le monde, l'autre à l'inſtruire & à le corriger. Voyez le courageux Des-Cartes, terraſſant les erreurs, refondant nos opinions, & donnant, pour ainſi dire, un nouvel être à nos connoiſſances. Si l'Angleterre s'enorgueillit du Mauſolée où repoſe, parmi les rois & les héros, ce grand homme qui devina le plan du ſuprême architecte; elle ne ſe glorifie pas moins de cet excellent philoſophe qui développa les premiers reſſorts de l'intelligence humaine, & fut le ſage précepteur des nations. Par qui notre Académie fut-elle formée? Par ce vaſte, profond, & ſublime eſprit, qui étoit en effet ce qu'il prétend que ſont tous les eſprits, une concentration, un miroir vivant de l'univers. Son ſucceſſeur dans cette même Académie, où il étoit ſi digne de le remplacer, n'a pas cueilli dans les champs de la Métaphyſique des lauriers moins beaux que ceux qu'il rapporta des froides & ſtériles régions du Nord.

Il n'eſt aucun de ces hommes célebres qui n'ait vaincu des préjugés, établi des vérités utiles, ouvert de nouvelles routes, ou applani les anciennes. Pluſieurs d'entr'eux ont imaginé de brillantes hypotheſes, qui ne cedent en rien à celles que la Phyſique nous étale. Le livre des Méditations, la Recherche de la vérité, l'Eſſai ſur l'entendement humain, les divers ouvrages philoſophiques de Leibnitz ſont remplis des plus ingénieuſes découvertes, non de découvertes amenées par le hazard, mais puiſées dans la profondeur du génie.

Après les philoſophes du premier rang paroiſſent, avec honneur, ceux qui nourris de leurs leçons, animés par leur exemple, ont commenté, affermi, appliqué, étendu leurs doctrines, & ceux qui avec une noble audace ont oſé s'en écarter, & ſe frayer des ſentiers juſque-

juſque-là inconnus. Par cette fermentation des eſprits, les découvertes ſe ſont accumulées, les vérités ſe ſont enchainées les unes aux autres, la maſſe de lumiere s'eſt accrue, le jour a pénétré dans les régions ſombres de la Métaphyſique, & ſi la raiſon humaine n'a pû tout éclaircir, elle a du moins appris à connoitre ſa portée & ſes limites.

C'eſt ainſi que Platon ſortit de l'école de Socrate, qu'Ariſtote peupla de ſa Secte la Grece, l'Italie, & l'Europe entiere, que Malebranche marcha ſur les traces de Des-Cartes, & Wolff ſur celles de Leibnitz. C'eſt ainſi que Locke donna le ton à la philoſophie Angloiſe, qui ſemble être devenue la philoſophie de l'Europe. Il poſa le premier ces fondemens ſolides ſur leſquels on a bâti depuis tant de théories diverſes, mais dont la diverſité a le mérite de nous préſenter les matieres abſtraites ſous tous les points de vûe dont elles ſont ſuſceptibles. C'eſt en partant des principes mêmes de Locke que l'Evêque de Cloyne, ce hardi deſtructeur des corps & de la matiere, déploya cette force de raiſonnement qui étonne ceux-même qu'elle ne perſuade pas. C'eſt encore à ces principes que notre ſiecle doit une connoiſſance plus exacte de l'homme, l'anatomie de ſes facultés, tant de beaux ouvrages où tous les actes de l'ame ſont réduits à un ſeul acte, ces Pygmalions nouveaux qui, en animant la ſtatue humaine, ont dreſſé des ſtatues à la Métaphyſique.

Où eſt la ſcience que la Métaphyſique n'ait enrichie & fertiliſée? car ce n'eſt pas ſeulement ſur ſes propres progrès qu'il faut la juger; il eſt juſte de lui tenir compte de cet eſprit philoſophique qu'elle a répandu dans toutes les recherches de l'eſprit humain, dans la Littérature, dans la Morale, dans la Politique, & juſques dans la vie commune. Si ce ſiecle eſt moins ſuperſtitieux, plus éclairé, plus philoſophe que les ſiecles précédens; c'eſt à elle principalement qu'on en eſt redevable.

Et que ſait-on ce qu'elle pourra devenir un jour? Si pendant des ſiecles entiers elle a fait peu de chemin, c'eſt que la tâche eſt grande,

grande, & les obſtacles ſans nombre. Elle nous eſt parvenue hériſſée de ronces & d'épines: il a fallu la tirer de la fange de ces tems ténébreux où le jargon le plus abſurde tenoit lieu de ſcience, où l'on expliquoit le langage de l'Ecriture même par le langage des Sophiſtes, où ſoûtenues par le pouvoir eccléſiaſtique, l'ignorance & la ſuperſtition, fille de l'ignorance, dominoient ſur l'eſprit crédule des peuples. Que ne ſouffrit point Des-Cartes, lorsqu'il oſa lever la banniere contre le fantôme de l'Ecole? C'eſt dans ce triſte état que les ſciences ſpéculatives ſont arrivées juſqu'à nous. Mais un nouveau jour s'eſt lévé ſur elles: la Théologie moderne eſt moins impérieuſe, parce qu'elle eſt plus pure: la Métaphyſique jouit d'une pleine liberté ſous des Souverains qui la protegent, & dans des Sociétés ſavantes qui ſe ſont ouvertes pour l'accueillir. Il ſeroit étonnant qu'elle ne profitât pas de la réunion de tant de conjectures qui la favoriſent.

Le dirai-je? Si cette ſcience n'a pas encore tous les ſuccès qu'elle pourroit avoir; ſi elle n'eſt pas conſidérée, comme elle devroit l'être; s'il reſte contre elle des impreſſions fâcheuſes; c'eſt moins à elle qu'à ceux qui la cultivent qu'il faur s'en prendre.

N'eſt-il pas ſingulier que des études qui ſemblent toutes faites pour humilier l'eſprit humain, lui inſpirent de la ſuffiſance, de l'orgueil, de la dureté? Si le ſentiment de notre perfection peut nous enfler, le ſentiment contraire, que l'étude réfléchie des premiers élémens de nos connoiſſances fait naître ſans ceſſe, ne devroit-il pas abattre les fumées de l'amour propre, & nous rendre modeſtes? Quel eſt donc le vice caché qui étouffe ce fruit ſalutaire de la Philoſophie? Quel eſt ce germe corrompu & corrupteur qui infecte l'eſprit du Métaphyſicien au point de lui faire prendre ſa foibleſſe pour de la force, ſon ignorance pour du ſavoir, ſes ténebres pour de la lumiere?

En initiant les jeunes gens dans les ſpéculations métaphyſiques, on commence par les jetter dans un ſyſteme. Cette méthode, ſi l'on n'en uſe avec prudence, peut entraîner des ſuites pernicieuſes. Dans

un certain âge, l'eſprit ſe prend à tous les points d'appui qu'on lui préſente, & qui dès-lors, en ſoulageant ſa pareſſe, fixent ſa vûe, captivent ſon jugement, rétréciſſent ſa conception. Lorsqu'une fois il a pris ſon pli, ſes penſées, ne ſauroient plus, pour ainſi dire, couler que dans le même ſens: il a perdu ſa liberté, il a quitté les ſentiers de la Nature, il eſt devenu roide, opiniâtre, hautain. Bientôt, identifié avec ſes dogmes, ce fier eſclave appéſantira ſes chaînes ſur tous les hommes libres, qui refuſeront d'être eſclaves comme lui.

Un jeune homme qui vient de faire ſon cours, & qui a tranſporté ſur ſes cahiers les opinions de ſon maître, croit poſſéder la ſageſſe univerſelle. Ce n'eſt que d'après ces feuilles de la Sybille qu'il juge du vrai & du faux: les ſentimens des autres philoſophes ne lui ſont connus que par d'infideles rapports: il a appris à mépriſer les plus grands hommes, avant d'être digne de les lire. Devenu maître à ſon tour, il devient, à ſon tour, le fléau de la Raiſon. C'eſt ainſi que le mal ſe perpétue; & voilà pourquoi il y a tant de Docteurs, & ſi peu de philoſophes.

C'eſt peut-être une témérité exceſſive à l'homme que de fabriquer des ſyſtemes. Atomes dans l'immenſe cité de l'univers, notre ſphere n'eſt qu'un point; & nous voulons tout ſoumettre à l'empire de nos idées. Je connois cependant le reſpect dû aux génies créateurs qui ont propoſé ces grandes vûes, compaſſé ces vaſtes plans. Quand leurs ſyſtemes ne ſeroient que de belles tentatives, ils mériteroient, à ce ſeul titre, toute notre admiration. Ces grands hommes en ont, ſans doute, connu le foible comme le fort; ce ſont des hommes médiocres qui leur ont attribué une infaillibilité où ils ne prétendoient pas. Si dans le champ de la Philoſophie on voit, de loin à loin, quelques cedres majeſtueuſement élevés; combien n'y trouve-t-on point de plantes paraſites, qui n'ayant pas de quoi végéter par elles-mêmes, ſe nourriſſent d'une ſeve étrangere. Quelquefois des hommes illuſtres ont laiſſé tomber un rayon propice ſur leurs diſciples & leurs commentateurs: de là cet empreſſement à s'envelop-

per

per dans leur réputation: de là tant de corps opaques qui tournent autour de ces grands aſtres, pour en être illuminés.

La Métaphyſique, cette ſcience qui ſemble prêter ſi peu à l'imagination, eſt peut-être de toutes les ſciences la plus fertile en enthouſiaſtes. Quels hommages les anciens philoſophes ne rendirent-ils point à leurs chefs? Des ſtatues, des trônes, & des autels leur paroiſſent trop peu de choſe pour les récompenſer. Sous le regne de l'Ecole il ſuffiſoit d'avoir inventé un ſophiſme pour s'entendre appeller Docteur invincible, ſublime, angélique, ſource de vie, lumiere du monde. Ce n'eſt que depuis peu que cet enthouſiaſme commence à paſſer: nous avons vû encore des chefs de ſecte, ſemblables à des rois puiſſans entourés d'un peuple d'adorateurs. Il eſt, à la vérité, de jour en jour plus difficile de monter à ce haut rang. Les premieres places ſont priſes: il ne reſte à occuper que les places ſubalternes; & ici l'on étouffe dans la foule des prétendans.

Ce zele pour des opinions, & pour des autorités, que l'éducation ſyſtématique inſpire, remplit, pour l'ordinaire, l'eſprit de fiel, & d'aigreur, & allume le tiſon de la Diſcorde. Comment un homme qui toute ſa vie n'a fait que démontrer, & qui n'a jamais ſû douter, ſouffrira-t-il qu'on le contrediſe, ou qu'on balance à adopter ſes aſſertions? Quelque ſyſteme que vous embraſſiez, vous avez pour ennemis tous ceux qui ſuivent d'autres étendarts; & ſi vous n'en embraſſez aucun, les forces réunies de tous les ſyſtemes vont fondre ſur vous. Où ſommes-nous? Dans une république de Sages, dont les lettres épurent & adouciſſent les mœurs? ou dans une anarchie de ſauvages, dans un état de guerre de tous contre tous? Je ne reconnois plus ces Divinités aſſemblées pour peſer la Nature & les deſtins; je ne vois que ces Dieux ſoldats qui pêle-mêle avec les hommes ſe battent autour des murs de Troye. Le nom ſacré de la Vérité eſt, dans leur bouche profane, le ſignal du combat; les invectives ſont les armes des combattans.

N'eſt-ce pas une choſe déplorable que ce qui devroit réunir les hommes, ſoit préciſément ce qui en ſait d'irréconciliables ennemis? Les ſciences en ſont une preuve, la Religion en eſt une autre, & je tranche le mot, elles ſont compriſes toutes deux dans la Métaphyſique.

Toutes les diſputes de Religion ont été, à proprement parler, des diſputes de Métaphyſique, & les Métaphyſiciens ſcholaſtiques ſont la cauſe principale de tous les maux que cette fille du Ciel a occaſionnés ſur la terre. Pourquoi ces Conciles, ces guerres, ces perſécutions, ces fleuves de ſang qui ont coulé dans le monde Chrétien? Ce n'étoit aſſurément pas pour établir la morale de l'Evangile, cette morale qui nous ordonne d'aimer juſqu'à nos ennemis. Quels ſurent donc les ſujets de ces fameuſes querelles? L'eſſence divine, les Décrets éternels, la nature du corps & celle de l'ame, la perſonnalité, l'état après la mort. Et qu'eſt-ce là autre choſe que de la Métaphyſique? C'eſt pour de pareilles queſtions que les princes & les peuples, échauffés par des docteurs à ſyſtemes, ont expoſé leur ſceptre, leur fortune, & leur vie; queſtions où ſouvent ni les princes, ni les peuples, ni les docteurs ne comprenoient rien.

S'en ſallut-il beaucoup, dans le douzieme ſiecle, & dans les ſiecles ſuivans, que pour un ſujet bien moins intéreſſant on ne vît les mêmes ſcenes? On avoit déjà ſubſtitué les voyes de ſait aux argumens: des gladiateurs métaphyſiciens étoient deſcendus dans l'arene: Louis XI. avoit pris part à ces démêlés. Un grain de fanatiſme de plus, & la mémorable diſpute ſur les *Univerſaux* mettoit l'Europe en combuſtion.

Si aujourd'hui le vernis des bienſéances farde les paſſions, & déguiſe les inimitiés; ce n'eſt pas que beaucoup de prétendus philoſophes ne viſſent encore avec plaiſir la terre armée pour défendre les ſonges creux qu'ils ont enfantés dans la pouſſiere de leur cabinet. Il eſt des occaſions où l'on voit aſſez quel eſprit les anime, & à quels excès ils

ſe

ſe porteroient, ſi la ſageſſe du Légiſlateur n'avoit pris ſoin de réprimer leurs ſaillies, ou de les confiner entre les murs des écoles.

N'en dourons point, l'étude de la Métaphyſique, mal dirigée, peut ſe convertir en poiſon. Ce n'eſt pas aſſez qu'elle nous rempliſſe de préjugés ſavans, pires que les préjugés populaires; elle ajoute les vices du coeur aux erreurs de l'eſprit. Mais le vrai philoſophe évite ces écueils. Il vogue tranquillement ſur cette mer orageuſe. Il voit, d'un oeil indifférent, naître & mourir les opinions. Il prend le vrai & le bon par tout où il le trouve; les grands noms, les partis puiſſans ne lui impoſent jamais au point de lui faire digérer le faux & le chimérique. Toujours libre, toujours maître de lui-même, humain, équitable, ami de la paix & de la vertu, les Sciences tranſcendantes embelliſſent ſon caractere, au lieu de le corrompre. Dans cette parfaite égalité d'ame qui fait la récompenſe & le triomphe du Sage, il goûte, tour à tour, les douceurs de la vie ſociale, & les agrémens de la vie contemplative.

C'eſt de ces agrémens qu'il me reſte à parler. On les croit incompatibles avec des études auſſi ſeches; & c'eſt un des grands préjugés contre la Métaphyſique. Une ſcience auſſi mélancolique, dit-on, n'eſt point faite pour ce ſiecle. Il faut abandonner ces ſpéculations auſteres & arides aux eſprits noirs & atrabilaires, qui fuyent la Société, abhorrent les plaiſirs de la vie, & ne trouvent de ſatisfaction qu'à ſe concentrer en eux-mêmes, & qu'à vivre de leur propre ſubſtance.

Je crains preſque d'abaiſſer la dignité de la Métaphyſique, en entreprenant de la diſculper de ce reproche. Qu'importe qu'elle ſoit dénuée d'attraits; pourvû qu'elle ſoit ſolide, utile, digne d'occuper une ame raiſonnable? Elle ne flatte ni les ſens, ni l'imagination. Mais l'homme n'eſt-il donc fait que pour ſentir & pour imaginer.

Et qu'eſt-ce après tout que ce Beau dont le ſiecle eſt idolâtre? Ce ne ſont, pour la plûpart, que des ornemens faux & recherchés, que la vraie ſcience dédaigne, que ſouvent on n'achete qu'aux dépens de la juſteſſe, de la préciſion, de la vérité même, & qui toujours font perdre en profondeur plus qu'on ne gagne en ſurface. Ce n'eſt pas aſſurément par cette voye que ſe ſont acquiſes les réputations illuſtres. Ces éclairs dont le vulgaire eſt ébloui, ne ſont faits que pour briller & diſparoître: la durée de ces frivolités eſt attachée au ton éphémere qui les met en vogue. Les grands noms paſſent par-deſſus ces futiles écrivains, & vont triomphans à la poſtérité.

Quand la Métaphyſique ne ſeroit pas ſuſceptible d'agrémens apprêtés, s'enſuivroit-il qu'elle n'eût rien de ſatisfaiſant elle-même? L'exercice de nos facultés, l'eſſai des forces de notre eſprit, la découverte de la vérité, ne ſont-ce donc pas là des plaiſirs? C'en ſont, & de très ſolides ſans doute; mais incorporés, pour ainſi parler, dans la Science, on ne les en tire que par l'application & le travail. Placés, comme la Vertu, ſur le ſommet d'une montagne eſcarpée, ce n'eſt qu'à force de fatigue qu'on en obtient la jouiſſance.

Voyons cependant ſi les Sciences ſpéculatives n'offrent point de plaiſirs qui ſe rapprochent d'avantage de la portée commune. Cette diverſité même de ſentimens, ce flux & reflux d'opinions, inconvéniens à certains égards, ne forment-ils pas, à d'autres égards, un ſpectacle des plus agréables? Ces dogmes, ces hypotheſes, ces théories différentes, en paſſant ſucceſſivement ſous nos yeux, nous ſurprennent par leur nouveauté, nous amuſent par leur contraſte, nous piquent par leur ſingularité. C'eſt une vaſte galerie, qui s'étend d'Orient en Occident, du Midi au Septentrion. Tantôt notre eſprit ſe plait à ſuivre l'ordonnance de ſes tableaux, tantôt il aime à s'égarer dans leur variété. Et que pourroit-il y avoir pour lui de plus intéreſſant? C'eſt ſa propre hiſtoire; c'eſt le fidelle mi-

miroir où il peut contempler ſa petiteſſe & ſa grandeur, ſon élévation & ſes chûtes.

Mais enfin, la Métaphyſique a vû, plus d'une fois, ſes déſerts, cultivés par d'habiles mains, ſe transformer en de riantes contrées. Athenes & Rome nous ont laiſſé dans ce genre, comme dans tous les autres, des modeles applaudis, & ces modeles ont trouvé des imitateurs. Dans la grande abondance des exemples, je n'en choiſirai que quelques-uns des plus frappans.

Le dialecte le plus gracieux de la plus belle des langues déploye toute ſon élégance dans les écrits de Platon. Son ſtyle eſt plûtôt d'un poëte que d'un philoſophe. C'eſt véritablement l'abeille Attique, & le miel qu'elle diſtille eſt extrait de l'élite des fleurs qui croiſſent ſur l'Hélicon.

Toutes les Muſes ſemblent inſpirer le chantre d'Epicure. Son ſtyle pompeux, le charme de ſes vers lui font presque pardonner le faux de ces raiſonnemens. Quelle force, quelle nobleſſe dans ſa diction, quel ſel dans ſes ironies, quelle vérité, quel coloris dans ſes peintures! On revoit toujours avec un nouveau plaiſir ces admirables morceaux qu'il entrelace, avec tant d'art, dans la philoſophie du Vuide & des Atomes. Ici c'eſt la mere d'Enée qui répand la fécondité dans le ſein des élémens. Là c'eſt l'apothéoſe de ce fameux mortel qui arracha le trident à Neptune, & la foudre à Jupiter. Plus loin c'eſt la vie bienheureuſe des oiſifs habitans de l'Olympe. Des deſcriptions magnifiques, des réflexions ingénieuſes, des beautés de toute eſpece ſortent, à la voix de cet enchanteur, d'un fond qui paroit ſi ingrat.

Après avoir vu l'Orateur Romain protéger le citoyen, foudroyer les Catilina & les Antoine, on aime à le retrouver dans les campagnes fortunées de Cume & de Tuſcule, qui ſe changent, tour à tour, en Lycée, en Portique, en Académie, & dans

dans les jardins du philoſophe de Garguette. Dans le Sénat, à la Tribune, Cicéron eſt un torrent impétueux, qui entraîne tout dans ſa courſe rapide; ici c'eſt un doux ruiſſeau, qui roule, dans ſes ondes paiſibles, l'or le plus pur de la docte Antiquité. Tantôt il ſe promene par toutes les ſectes, en ſaiſit l'eſprit, & n'en épouſe aucune: tantôt il parle au coeur, rend la vertu aimable, rajeunit la vieilleſſe, diviniſe l'amitié. Les ſoucis rongeurs viennent-ils troubler ſes méditations? Lui échappe-t-il quelque ſoupir pour ſon ingrate partie? Un ſonge ſublime le tranſporte dans cette république céleſte où le grand Scipion, & tous les Demidieux de Rome entendent l'harmonie des Spheres, & contemplent, dans l'ordre immuable des choſes, la ſageſſe de l'eſprit univerſel.

Dans les ouvrages de Séneque, le philoſophe, l'orateur, le courtiſan ſe diſputent la palme. Il eſt vrai que ſon ſtyle, hériſſé de pointes & d'antitheſes, ſe reſſent déjà de la corruption du goût, & de la décadence des Lettres. Mais ces fautes ne ſont-elles pas ce que l'on nomme de l'eſprit?

Je paſſe ſur pluſieurs anciens qui mériteroient d'être cités avec diſtinction; ſur Pline, Plutarque, Lucien, Sextus, Maxime de Tyr, Marc Aurele, ſur les philoſophes de l'Ecole Eclectique, ſur tous ces Métaphyſiciens lettrés que l'Egliſe a nourris dans ſon ſein, & qui ne dédaignerent pas de mêler l'érudition profane à tout ce que la Philoſophie a de plus profond, la Religion de plus vénérable.

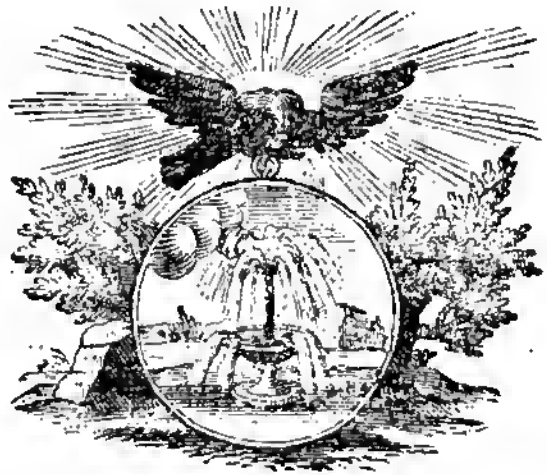
Si de là nous nous tranſportons à la renaiſſance de Lettres, qui précéda de beaucoup la naiſſance de la vraie Philoſophie, nous verrons que cette derniere, avant même d'être ſortie du berceau, enfanta déjà de très beaux écrivains, & dont la lecture eſt délicieuſe pour les agrémens du ſtyle autant que pour le fond des choſes. Je n'en veux pour preuve qu'Eraſme & Bacon, qui ont

tous

tous deux préparé la grande révolution de l'eſprit humain, l'un en aiguiſant les traits de la Satyre contre la barbare Ecole, l'autre en faiſant briller l'aurore de toutes les ſciences au milieu de la nuit qui les couvroit. Noms à jamais révérés & chéris, Hercules Libérateurs, que ne leur doivent point la Raiſon, dont ils ont vangé les droits, les Sciences, qu'ils commencerent à épurer & à ennoblir, le genre humain qui jouit de leurs bienfaits!

A meſure que j'approche de nos tems, quel beau ſpectacle ſe préſente à ma vue! Je vois partout les nourriſſons de la Philoſophie s'abreuver dans les eaux d'Hippocrene, & les nourriſſons des Muſes puiſer leurs regles dans les Sciences abſtraites, l'érudition aſſaiſonnée de l'eſprit philoſophique, les ſpéculations parées par les mains des Graces. Parcourrai-je la liſte de tous ces beaux-eſprits philoſophes dont les uns illuſtrent le ſiecle paſſé, & les autres font la gloire & les délices du nôtre? Peindrai-je l'éloquente ſubtilité de Huet, le brillant enthouſiaſme de Malebranche, le ſéduiſant Pyrrhoniſme de Bayle, l'énergie & le feu du Lord Shaftesbury, ſoit qu'il ſe perde avec Platon dans les nues, ſoit que monté ſur le ton ironique il eſſaye la Vérité ſur la pierre de touche du Ridicule? Parlerai-je du poëme métaphyſique de Pope, ou de l'immortelle Théodicée, ou de tant de chef-d'oeuvres de nos philoſophes modernes, trop connus & trop admirés pour avoir beſoin de mes louanges? Que de grands noms la France, l'Angleterre, l'Italie, l'Allemagne ne me fourniroient-elles pas? J'y apperçois de nouveaux Platons, des Cicérons, des Lucreces, des Plines. C'eſt à notre ſiecle que la poſtérité devra l'édifice immenſe de l'Encyclopédie; ouvrage vraiment métaphyſique, parce que toutes les connoiſſances humaines y ſont ramenées à leurs premiers principes; ouvrage élégant, parce qu'il a la ſorte d'élégance, la noble & décente parure qui ſeule lui convient.

J'aurois pû, ſans ſortir du lieu où j'ai l'honneur de parler, trouver des preuves vivantes de tout ce que j'ai dit à l'avantage de la Métaphyſique. C'eſt par vos ſoins, Meſſieurs, qu'elle pouſſera ſes rameaux féconds dans l'avenir. Pour achever ſon éloge, je n'aurois qu'à la montrer dans ce ſanctuaire des Muſes, placée au foyer commun des Sciences & des Lettres, échauffée par cette lumiere bienfaiſante qui environne le trône de FE'DE'RIC. Quels ſont les ſuccès où nous ne puiſſions aſpirer ſous de ſi glorieux auſpices? Son regne n'eſt-il pas fait pour élever tous les eſprits, & pour porter tout à la perfection?



DE L'ENERGIE *)
DANS LES OUVRAGES DES BEAUX-ARTS.

PAR M. SULZER.

Pour bien déterminer le ſujet de ce Mémoire, je dois commencer par quelques obſervations préliminaires ſur le but & le premier principe des Beaux-arts. On dit ordinairement que le but de ces arts eſt de plaire; d'amuſer avec eſprit; de toucher agréablement: que le premier principe eſt l'imitation de la belle nature. Pour moi, je penſe que c'eſt dégrader les Beaux-arts que de n'y reconnoître d'autre but, que celui de plaire; & le principe de l'imitation me paroit auſſi gratuit dans ſon origine que ſtérile dans ſon application.

Si l'on veut ôter les Beaux-arts de la claſſe des choſes frivoles & les lier au ſyſteme général des inventions utiles, il faut leur fixer un autre but; & ſi l'on veut être vraiment utile aux artiſtes, il faut leur donner un autre principe pour guide. J'enviſage les Beaux-arts d'une façon qui me les fait voir dans toute leur dignité.

Je ne vois en général que trois grands objets qui renferment tout ce qu'il y a d'utile dans les inſtitutions humaines: ce ſont la Politique, la Philoſophie & les Beaux-arts, tous les trois également néceſſaires au bonheur. Si l'homme doit parvenir au degré de bonheur dont il eſt capable, il lui faut trois choſes. Des arrangemens qui lui aſſurent la poſſeſſion & la jouiſſance paiſible de tout ce qui appartient à

*) Je ſuis obligé, faute d'autre terme, de me ſervir de ce mot pour exprimer en général certaine force ſupérieure, non ſeulement dans la parole, mais dans tout autre objet de gout, ou ce qu'*Horace* appelle *acer ſpiritus & vis in verbis & rebus.* (Serm. I. 4.)

ſes beſoins phyſiques; des connoiſſances & des lumieres qui l'éclairent ſur ſes beſoins moraux, ſur le degré de bonheur dont il eſt ſuſceptible & ſur la route qui y conduit; enfin des diſpoſitions pour profiter de ces lumieres, & les forces pour en agir en conſéquence. La Politique pourvoit au premier de ces beſoins, la Philoſophie au ſecond, & les Beaux-arts au troiſieme. C'eſt à eux d'imprimer à l'eſprit les lumieres de la Philoſophie avec une force que la vérité nue n'a jamais; c'eſt à eux de s'emparer de l'imagination & du coeur de l'homme, pour les diriger vers le grand but fixé par la philoſophie. Voilà le véritable emploi que l'artiſte doit faire de ſes talens.

De là réſulte le premier principe des Beaux-arts, ou le précepte fondamental qui renferme tout ce que l'artiſte doit faire pour réuſſir. Qu'il choiſiſſe un objet utile, qu'il le rende avec toute la force & toute l'énergie dont il eſt ſuſceptible afin qu'il produiſe un effet permanant ſur l'eſprit & le coeur de l'homme: ou en deux mots; que l'artiſte donne toute l'énergie poſſible à un objet utile.

A'enviſager les choſes de cette façon, ce que je nomme énergie devient une notion fondamentale dans la Théorie des Beaux-arts, & elle mérite d'être bien développée. C'eſt-ce que je me propoſe de faire ici.

Dans le dernier Mémoire que j'ai eu l'honneur de lire à l'Académie, j'ai fait voir, que l'ame, toutes les fois qu'elle ſe livre aux impreſſions que font ſur elle les objets, entre dans un des trois états que j'ai nommés *état de méditation*, *état de contemplation*, & *état d'émotion.* C'eſt la perfection que nous découvrons dans les objets qui nous engage dans la méditation; la beauté nous entraine dans la contemplation, & l'énergie produit l'émotion. Si nous pouvons découvrir les cauſes de l'émotion, nous connoitrons par là les divers genres de l'énergie.

Les recherches que j'ai faites ſur ce ſujet, m'ont fait connoitre trois cauſes de l'émotion. La premiere eſt l'interruption ſubite du

cours

cours de nos perceptions; la ſeconde une nouvelle force que reçoivent nos perceptions actuelles, & la troiſieme une irritation ſenſible qui vient d'un objet qui ſe rapporte immédiatement à nos ſentimens & à nos paſſions. J'ignore s'il y en a encore d'autres.

Je dis que la premiere cauſe de l'émotion eſt l'interruption ſubite du cours de nos perceptions. Pour bien connoitre cette cauſe, il faut ſe rappeller ces heureux momens où l'ame, livrée à une douce diſtraction, produit ſans gêne & ſans effort une ſuite d'idées amuſantes. Semblable dans cet état à une riviere dont les eaux coulent inſenſiblement, elle ne ſent pas ſa propre activité; elle s'oublie elle-même en donnant toute ſon attention au tableau varié que forme la ſuite de ſes perceptions. Ordinairement cet état n'eſt pas de longue durée, la plus petite cauſe diſſipe la douce illuſion. Alors l'ame rappelle ſes yeux du tableau pour les diriger ſur elle-même, ſur ſon état, ſur ſa façon d'exiſter dans le moment préſent. Ce changement eſt toujours accompagné de quelque ſaiſiſſement qui produit de l'émotion. Un homme accablé de chagrins, a quelque fois le bonheur de les oublier pour quelques momens, & de ſe diſtraire par un objet amuſant: cependant une idée rélative à ſes chagrins ſe préſente; cette heureuſe diſtraction ceſſe ſubitement, il eſt réveillé comme en ſurſaut, il rentre en lui-même, & tous ſes chagrins reparoiſſent. C'eſt ainſi qu'il nous arrive aſſez ſouvent d'oublier en quelque façon notre exiſtence & notre perſonalité, lorsque tout d'un coup une perception particuliere nous reveille, nous fait penſer à nous mêmes & à la ſituation dans laquelle nous nous trouvons. Ce changement ſubit ne peut arriver ſans quelque émotion. Voilà comment l'émotion peut être produite par l'interruption ſubite du cours de nos perceptions. Les cauſes qui produiſent cette interruption, conſtituent la premiere claſſe des objets énergiques.

Je range dans cette claſſe les objets qui frappent ou par leur nouveauté, ou par leur ſingularité, ou par le ſurprenant, ou par le merveilleux qu'on y découvre. On voit très ſouvent qu'un objet

fort indifférent, privé de toute énergie devient remarquable par accident. La choſe la plus indifférente qui arrive contre notre attente, ſurprend agréablement ou dèsagréablement ſelon les circonſtances. Il y a même des cauſes négatives, qui ſurprennent. On a obſervé que ceux qui ſont accoutumés à dormir ſous un grand bruit ſont reveillés dès qu'il ceſſe.

Diſons donc que tout ce qui eſt nouveau, inattendu, extraordinaire, merveilleux, ce qui interrompt l'uniformité, ce qui releve l'attention, appartient à ce genre d'énergie. Dans l'art de la parole le ton de voix hauſſé ou baiſſé à propos, une tranſition inattendue, une phraſe d'une conſtruction, qui quoique fort bonne n'eſt pas trop ordinaire, des expreſſions neuves, des tours frappans & quantité d'autres petits artifices employés à propos, donnent au ſtyle l'énergie dont il s'agit ici. Dans la Muſique on obtient ce genre d'énergie par les *piano* & les *forté*, par les grands intervalles, par des pauſes, par des changemens du mode, par une harmonie neuve ou ſinguliere, par des *uniſſons*, par des progreſſions par octaves & par nombre d'autres moyens qui relevent de tems en tems le ton dominant de la piece.

Ce genre d'énergie eſt le moins important de tous; car il n'aboutit qu'à donner à un ouvrage ce gout piquant qui le rend agréable ou amuſant, quel que ſoit d'ailleurs le mérite de la matiere; ſon effet eſt tranſitoire, il n'opere rien de permanent dans l'ame, rien qui tende à la perfectionner. Un ouvrage qui n'a d'autre mérite que celui que peut donner ce genre d'énergie, peut être très amuſant, mais il n'atteint pas au grand but des Beaux-arts. C'eſt le cas de tous les ouvrages qui ne ſont qu'amuſants; ils peuvent être excellens dans leur genre mais ce genre eſt le moindre de tous.

Cependant ce genre d'énergie peut être très utilement employé, & devenir même très néceſſaire. Toutes les fois que la matiere que l'artiſte traite eſt bien importante, il faut qu'il lui donne tous les attraits poſſibles, afin qu'elle faſſe une plus grande impreſſion; & qu'il

qu'il employe tous les reſſorts de l'art, pour renouveller l'attention dans les endroits les plus eſſentiels. L'Odyſſée d'Homere eſt un modele dans ce genre. Il y a de l'énergie d'un genre relevé renfermé dans le caractere & dans l'entrepriſe d'Ulyſſe; presque tout le reſte de ce ſingulier poëme roule ſur des avantures ſurprenantes & merveilleuſes, qui, en donnant des attraits au poëme en général, ſont avantageuſes à la matiere principale. C'eſt par un employ ſage & utile de ce genre d'énergie que l'artiſte devient imitateur de la nature, qui attache presque toujours un agrément accidentel aux choſes utiles.

Je viens au genre d'énergie qui eſt la ſeconde cauſe de l'émotion. Ce genre tire ſon origine de la force ſupérieure d'une qualité agréable ou désagréable par ſa nature, qui pourtant, ſans ce ſecours extraordinaire, ſeroit ſans énergie ſenſible. Ce que j'ai à dire pour expliquer l'effet de ce genre étant rélatif à *l'état de contemplation*, il eſt à propos de donner ici une idée de cet état. Au premier moment qu'une ſcene d'objets agréables s'ouvre devant nous, l'ame ſe ſent émue par ſa beauté; bientôt elle ſe livre à la contemplation des divers objets qui ſe préſentent ſur la ſcene. A' la premiere émotion ſuccede peu à peu une tranquillité parfaite mêlée de ſérénité, enſuite une agréable langueur, un état qui plait, que l'on voudroit voir permenent, quoiqu'il n'ait plus rien de piquant; l'ame ne ſe rend plus compte de ce qu'elle ſent; elle ne prend plus d'eſſor pour ſentir vivement. Cependant, lorsque dans cet état l'oeil découvre un objet qui ſe diſtingue des autres par quelque beauté ſupérieure, l'ame reprend tout d'un coup ſa premiere vivacité; ce qui plaiſoit ſimplement commence à charmer & à émouvoir. Voilà le paſſage de l'état de contemplation à celui d'émotion, & voilà un genre d'énergie qui réſulte d'une perfection ſupérieure.

Dans les objets donc qui, par leur nature, nous ſont agréables, comme le régulier, le beau & le vrai, il faut diſtinguer cette premiere qualité, qui ne produit que le contentement de l'autre qui émeut. On comprendra mieux ce que je veux dire, après qu'on aura obſervé, que

que ce qui eſt vrai, ce qui eſt beau, ce qui eſt clair plaît ſimplement, & que ce qui eſt ſupérieurement vrai, ou beau, ou clair charme & ravit. Nous approuvons un mot ou une phraſe qui exprime aſſez bien ce qu'elle doit exprimer, mais ces mots tranchans qu'on n'oublie jamais, ces expreſſions brillantes qui donnent la vie aux objets qu'elles peignent, nous raviſſent. Nous nous contentons de rejetter ſimplement ce qui nous paroit faux, pendant que nous nous fâchons ou que nous rions, de ce qui eſt abſurde. Nous detournons l'oeil de ce qui, n'étant pas beau, nous déplait, mais une grande difformité nous cauſe quelquefois de l'horreur. Tel tableau qui imite aſſez bien les couleurs & le ton de la nature nous plait par ſon coloris, mais nous ſommes frappés d'étonnement en voyant les meilleurs païſages de *Rembrandt*, qui ſemblent nous tranſporter dans les lieux-mêmes qu'ils repréſentent; nous ſentons dans les organes du corps la fraicheur des ombres.

Obſervons donc en général, qu'il y a une façon ſupérieure de frapper l'imagination par des objets ſenſibles. Elle eſt propre aux plus grands artiſtes, & cauſe une eſpece de ſenſation dans les organes, fort analogue à celle que produiroient les objets mêmes. Tels ſont pluſieurs tableaux d'*Homere*. Ici l'oeil eſt ébloui de l'éclat des armes, là nous entendons le bruit qu'elles font lorsque le heros tombe. Toute perfection d'un degré conſidérablement ſupérieur à celui auquel nous ſommes accoutumés, doit produire un pareil effet, ſoit que nous la trouvions dans la Nature, ſoit qu'on nous la préſente dans les ouvrages des Beaux-arts.

J'ai déjà remarqué que les objets auquels l'artiſte peut donner cette eſpece d'énergie, ſont ceux qui par leur nature ſont agréables à l'eſprit & à l'imagination, & qui par conſéquent ont déjà quelque perfection ou beauté naturelle. La matiere mérite que nous entrions là deſſus dans quelque détail. Les objets rélatifs à l'eſprit, que l'on comprend ordinairement ſous la dénomination générale de penſées, ſont ſuſceptibles de pluſieurs eſpeces de perfections. Une penſée peut

peut avoir de la perfection rélativement à la vérité, à la clarté, à la naïveté, à la ſimplicité, à la force, à la brieveté, à la richeſſe &c. Dans les objets rélatifs à l'imagination dont la perfection eſt déſignée ſous le nom de Beauté, il peut y avoir de la vérité dans l'imitation d'un objet ſenſible, de la juſteſſe & de la richeſſe dans les images & dans les comparaiſons & dans les tableaux, de la régularité, de l'ordre & de l'harmonie dans l'arrangement des parties, de la beauté & de la grace dans les formes.

L'artiſte qui ne donneroit à ſon ouvrage qu'un degré ordinaire de ces perfections, auroit fait un ouvrage agréable, auquel manqueroit pourtant la vraye énergie; il pourroit amuſer, mais il ne frapperoit pas fortement. Veut-il atteindre au grand but des Beaux arts? qu'il y ajoute la vraye énergie. L'orateur ou le poëte peu content d'avoir dit des choſes vrayes & agréables, doit faire ſon poſſible pour donner aux endroits importans de ſon ouvrage cette ſupériorité de perfection qui ſeule peut faire des impreſſions ineffaçables.

Ce genre d'énergie eſt d'une grande importance, & il produit des effets précieux ſur l'eſprit. Comme il conſiſte en général dans une perfection ſupérieure à la façon de concevoir & d'imaginer qui nous eſt familiere, l'étude de pareils ouvrages doit néceſſairement perfectionner l'eſprit & l'imagination. D'abord nous ſommes frappés des beautés que l'artiſte a ſu nous préſenter; enſuite nous conſidérons plus attentivement l'objet qui a produit cette ſurpriſe mêlée d'admiration; nous travaillons à concevoir ce degré de perfection, que nous venons d'admirer; nous nous efforçons à nous approprier une perception auſſi parfaite, & nous y réuſſiſſons. Degoutés enſuite de tout ce qui eſt médioere, nous cherchons toujours le plus parfait. Voilà donc la faculté repréſentative *cultée* par les Beaux-arts. Remarquons à cette occaſion, que ces heureuſes révolutions, commencées il y a trois ſiecles, qui devinrent ſi avantageuſes aux moeurs, aux progrès de la raiſon, aux ſciences & à la religion, ſont une belle preuve de ce que je viens de dire. Ce n'eſt pas

aux Grecs, chaſſés de Conſtantinople, que nous devons le rétabliſſement des lettres; ni aux *Medicis* que nous devons les arts, ni aux *Calvins*, ou aux *Luthers*, qu'une partie de l'Europe doit ſa liberté ſpirituelle. Ce ſont les *Platons*, les *Xenophons*, les *Demoſthenes*, les *Cicérons*, les *Phidias*, les *Polycletes*, qui ont opéré ces heureux changemens. C'eſt aux perfections ſupérieures qui brillent dans leurs ouvrages qu'on doit le génie d'un Eraſme, d'un Calvin, d'un Raphaël, & de tous ces grands hommes qui acheverent cette heureuſe révolution. Voilà quel effet peuvent produire les ouvrages des Beaux-arts s'ils brillent par ce ſecond genre d'énergie.

Ce n'eſt pas le tout encore. Outre cet eſſor général que l'eſprit prend par l'étude des meilleurs ouvrages de gout, on en tire encore des avantages particuliers. Commençons à la conſidérer dans les objets rélatifs à l'eſprit ou à l'entendement. Ces objets tendent à nous éclairer & à augmenter nos connoiſſances. C'eſt au philoſophe de tirer les vérités de la carriere immenſe ouverte à l'eſprit, & c'eſt encore à lui à les apprécier; mais c'eſt à l'homme de gout, à l'artiſte, de les préſenter dans tout leur jour, de leur donner de la matiere. Le philoſophe les rend intelligibles, l'orateur les rend ſenſibles, & ſans les ôter à l'entendement, il les fait paſſer dans l'imagination & dans le coeur, en les liant aux différens reſſorts de l'ame. C'eſt par là qu'elles deviennent vrayement utiles. Le Philoſophe nous démontre qu'il faut être juſte & revérer la divinité. Nous ne pouvons pas refuſer notre approbation à cette vérité qu'il démontre clairement. Cependant, comme elle ne ſe lie qu'à l'entendement, elle ne nous frappe pas, nous ne ſommes pas même ſûrs qu'elle nous ſoit bien préſente dans l'occaſion où elle devroit influer ſur nos actions, cette vérité ſi importante devient preſque inutile. Le poëte s'y prend d'une autre façon, il repréſente à votre imagination les ſuites affreuſes de l'injuſtice & de l'irréligion par des tableaux ſenſibles & ineffaçables à cauſe de leur grande vivacité. Après avoir frappé l'imagination, il s'adreſſe à l'eſprit

l'eſprit & lui préſente la vérité moyennant cette expreſſion frappante, qui eſt comme l'épigraphe du tableau.

Diſcite juſtitiam, moniti, nec temnere Divos!

Voilà de l'énergie que l'artiſte ſeul peut donner aux vérités de ſpéculation.

Il ſeroit hors de propos d'entrer ici dans un plus grand détail ſur les divers moyens dont les orateurs & les poëtes peuvent ſe ſervir pour donner la plus grande énergie aux penſées, ſoit du côté de la vérité, ou de la clarté, ou de la naïveté &c. ſoit par le moyen des images, ou des tours heureux. J'ajoute une ſeule remarque à cet article. Il y a un nombre de vérités qui devroient ſervir aux hommes de principes de conduite. Or il ne ſuffit pas de s'être une fois convaincu de ces vérités, il faut les voir dans toute la clarté poſſible, les avoir toujours préſentes à l'eſprit, ou les lui rendre ſi familieres, qu'on ſoit ſûr de ſe les rappeller d'une maniere convaincante, dans les occaſions où elles peuvent ſervir. C'eſt ce que nos ancêtres ont eu en vue, par rapport à ces vérités qu'ils ont propoſées en proverbes. L'entendement ne fournit aucune force active à l'ame: il faut donc qu'en ſe rappellant ces vérités l'imagination & le coeur y ſoyent intéreſſés. C'eſt alors qu'elles deviennent triomphantes. C'eſt aux artiſtes de faire l'un & l'autre, de les dire d'une façon ſi ſupérieure qu'on ne les oublie jamais, ou d'y ajouter des beautés ſenſibles & des ſentimens qui les lient à l'imagination & au coeur.

Les autres objets qui appartiennent à cette claſſe, ſe diſtinguent par un gout & une beauté ſupérieure.

Le Beau de toute eſpece dont on remplit l'imagination, augmente en nous la faculté d'être touché agréablement. C'eſt de cette faculté que dépendent en grande partie les agrémens de la vie. L'homme barbare ne jouit que des plaiſirs les plus groſſiers, qui accompagnent les actions par leſquelles on ſatisfait aux beſoins les plus preſſans de la nature; l'homme inſtruit jouit d'une infinité d'agrémens

que le goût ſeul peut donner. Mais, comme de l'autre côté un grand nombre de déſagrémens & de degoûts, ſont inſéparablement attachés à cette ſenſibilité que le goût donne, on paye ces agrémens tout ce qu'ils valent. Quoiqu'il en ſoit, cette ſenſibilité produit des biens plus réels. Elle rend l'homme plus capable d'être perfectionné par une bonne inſtitution. Comme il eſt impoſſible de corriger un homme ſtupide ou hébété, parce qu'il ne ſent ni la force des repréſentations qu'on lui fait, ni le poids des corrections dont on ſe ſert; l'homme inſtruit, rendu plus ſenſible par les beaux-arts, devient par là plus traitable. Souvent un ſeul mot bien énergique, dont il ſent toute la force, ſuffit pour le faire rentrer en lui-même, après une ſuite d'égaremens. Plus ſenſible qu'un autre à la honte & à l'honneur, il facilite par là les moyens de le perfectionner. Le ſeul exemple des Groenlandois, peuple le plus miſérable de la terre, qui lutte continuellement contre les maux les plus cruels, nous montre quel obſtacle l'inſenſibilité met à la perfection de l'eſpece humaine. Ces pauvres barbares ſentent ſi peu la différence qu'il y a entre leur miſere & l'aiſance des Européens, qu'ils n'adoptent pas les uſages même les plus innocens, qui remédieroient à leur état.

Ces remarques nous aideront à apprécier le mérite & l'importance des différens ouvrages de goût, & les eſpeces d'énergie compriſes ſous ce ſecond genre que nous venons d'examiner. Les ouvrages des Orateurs & des Poëtes, qui brillent par des ſentences graves énoncées d'une maniere bien frappante, par des vérités triomphantes, par des images riches, qui donnent de la lumiere à l'eſprit & rendent ineffaçables les idées importantes qu'elles renferment *); ces ouvrages, dis je, méritent d'être mis à la tête de ceux qui appartiennent à cette claſſe; viennent enſuite ceux où regne un gout mâle & ſolide, qui, en ſe communiquant à ceux qui étudient ces ouvrages, les degoûte des frivolités & de tout ce qui eſt au deſſous d'un certain degré d'importance. Les ouvrages exécutés dans le beau tems des arts en

*) Si je ne fais pas mention ici des autres mérites de ce genre d'ouvrages, c'eſt qu'ils n'appartiennent pas à ce genre, mais au troiſieme dont nous parlerons d'abord.

en Grece & à Rome, outre les autres genres de mérite, ont auſſi celui-ci; parmi les modernes, les peintres de l'école romaine & ceux de l'école des Carraches, l'ont donné à leurs ouvrages. La derniere place ſera aſſignée à ces beaux-eſprits & artiſtes qui ont préférablement réuſſi dans le gracieux, dans le beau délicat & recherché, dans ce qui pique & qui chatouille finement l'imagination. C'eſt principalement à ceux-ci que l'homme doit cette ſenſibilité de l'imagination, qui cauſe autant de degoûts que d'agrémens, autant de peine que de plaiſir. Mais en voilà aſſez ſur le ſecond genre d'énergie; je viens au troiſieme.

Les objets qui ont ce genre d'énergie ſe rapportent immédiatement aux ſentimens moraux & aux paſſions, ou, pour m'exprimer dans le langage des philoſophes, aux facultés inférieures de l'ame, en y produiſant le deſir ou l'averſion. On a pû remarquer que les objets énergiques dont nous avons parlé juſqu'ici, ſont tous rélatifs à la façon de voir ou de concevoir les choſes, c. à d. aux facultés ſupérieures de l'ame. Or, comme chaque individu a reçu de la nature ou contracté par l'habitude un certain goût, qui regle ſes facultés ſupérieures de façon qu'il aime à voir & à concevoir les choſes d'une certaine façon plutôt que d'une autre; il y a de même un goût qui domine dans la partie inférieure de l'ame, & qui fait que certains objets y excitent le deſir, d'autres l'averſion. Chaque objet qui, en ſe préſentant à l'ame, y produit l'un ou l'autre de ces effets, a une énergie de ce troiſieme genre.

L'émotion paroit ſi immédiatement à la vue de ces objets, que quelques philoſophes ne voyant rien d'intermédiaire qui fit concevoir ſon origine, ont hardiment aſſuré qu'on ne pouvoit chercher d'autre explication à cela que la volonté de l'auteur de la nature qui, à ce qu'ils diſent, a donné à l'ame des ſens, comme au corps. Le plaiſir donc & la peine, le deſir & l'averſion, ſont ſelon eux des effets immédiats & inexplicables de ces ſens intérieurs. Ayant réfuté dans un

autre endroit *) cette opinion, ſi peu digne des lumieres actuelles de la philoſophie, je puis me diſpenſer d'entrer ici dans un plus grand détail. Il me ſuffit de remarquer, que l'énergie dont nous parlons ici, produit les vrayes forces motrices de l'ame, & la fait paſſer du ſentiment à l'action, ſi les circonſtances le permettent. Car il eſt viſible que le deſir & l'averſion ſont les deux premiers reſſorts de l'ame.

Cela prouve l'importance ſupérieure de ce genre d'énergie, qui, par conſéquent, mérite bien d'être approfondi, tant du côté de ſa nature que de celui de l'emploi que l'artiſte en peut faire. C'eſt ce qui nous reſte à faire ici

Le ſentiment agréable ou déſagréable qui accompagne certaines perceptions, eſt la ſource de nos goûts, de nos inclinations, des ſentimens moraux & de toutes les paſſions. La vue ou la jouiſſance réitérée des objets agréables ou déſagréables les fait naitre & les entretient. Après avoir pris racine dans l'ame, ces paſſions ſe font ſentir ou opérent, toutes les fois qu'une des perceptions qui les avoient fait naitre, revient dans l'eſprit. De ces objets de nos goûts les uns produiſent leur effet ſans aucune apparence de cauſes intermédiaires, comme il arrive dans les ſenſations; d'autres au contraire ſuppoſent des idées confuſes, moyennant leſquelles ils acquierent leur énergie, comme les objets de l'ambition ou de l'avarice. Ceux-ci n'ont d'énergie que par le ſecours d'un nombre d'idées préexiſtentes, par leſquelles on ſaiſit le rapport qu'ils ont à nos paſſions. Leur effet dépend du caractere, des moeurs, de l'humeur, de la ſituation actuelle des perſonnes que l'on veut émouvoir. Je raſſemble ici toutes ces obſervations, quoique fort connues, parce qu'il eſt néceſſaire de les avoir ſous les yeux pour bien ſaiſir ce que j'ai à dire ſur les différens objets doués de ce genre d'énergie.

Conſidérons d'abord ceux qui agiſſent ſur les ſens. Outre le plaiſir & la douleur cauſés uniquement par l'ébranlement des nerfs, il y a dans ces objets une très forte énergie, que les artiſtes ne ſauroient aſſez

*) Dans la Théorie des ſentimens agréables & déſagréables.

aſſez étudier *). Ceux qui frappent l'ouie, ont dans leur ſimplicité une force que rien ne peut égaler. Un ſeul ton de voix, un cri inarticulé, peut percer le coeur & le remplir dans un inſtant de triſteſſe, de commiſération ou d'effroy. Il y a certains ſons ſi déſagréables, & ſi révoltans, que ce ſeroit un très grand tourment que d'être obligé de les entendre pendant quelque tems, & d'un autre côté des tons ſi doux, ſi flatteurs, qu'il n'y a rien au monde qui mette l'ame dans des ſentimens auſſi agréables que ceux que ces tons produiſent. Ajoutons à cela, qu'il n'y a aucune eſpece d'émotion, aucun mouvement de l'ame, qu'on ne puiſſe exprimer & rendre ſenſible par la ſucceſſion des tons. Le Muſicien, qui ſait combiner l'énergie des ſons caracteriſés & celle des harmonies avec celle qui réſulte de la ſucceſſion des tons, eſt capable de produire les plus grands effets ſur le coeur.

Les objets viſibles ont une énergie qui a un peu moins d'intenſité que celle dont nous venons de parler; mais comme ils peuvent être plus particulierement caractériſés, ils gagnent en étendue ce qui leur manque en intenſité. Encore celle-ci eſt elle très grande. Il y a des objets ſi ſouverainement hideux que perſonne n'en peut ſoutenir la vue. Je me borne à conſidérer ici l'énergie qu'on peut obſerver dans la forme, dans les traits, dans les attitudes & mouvemens du corps humain. C'eſt de cette énergie que les arts du deſſein tirent leurs plus grands avantages.

D'abord il n'y a rien de touchant, de reſpectable, de grand ou de ſublime, dans les ſentimens ou dans les caracteres des êtres penſans, qu'on ne puiſſe rendre viſible par les traits du viſage; il en eſt de même des qualités oppoſées, ce qu'il y a de mépriſable, d'odieux, d'effrayant dans les ſentimens & les caracteres peut être exprimé dans le viſage & par les geſtes du corps. Le petit nombre d'Antiques du meilleur tems de l'art, & quelques ouvrages de Raphael prouvent la vé-

*) Il eſt très eſſentiel pour bien comprendre cela, d'avoir ici devant les yeux la comparaiſon des ſentimens, qui ſe trouve à la fin de mon troiſieme Mémoire ſur l'origine des ſentimens &c.

vérité de ce que j'avance ici. Rien n'égale l'impreſſion que fait la frayeur & le déſeſpoir exprimés dans une des filles de Niobé. Ce que les Anciens nous diſent de la ſublimité de caractere du Jupiter Olympien de Phidias, nous fait concevoir qu'il n'y a aucun ſentiment que l'habile deſſinateur ne puiſſe inſpirer, par le moyen de l'expreſſion dont ſon ouvrage eſt ſuſceptible.

Les traits du viſage ont ſans doute la plus grande énergie de tous les objets viſibles. Cependant celle qu'on peut mettre dans les attitudes & les mouvemens eſt encore bien forte. Le *Laocoon* antique, le poſſédé dans la transfiguration de *Raphael*, ou l'*Ananias* mourant dans un des ſept cartons de *Hamptoncourt*, font les plus grands effets par les attitudes & les mouvemens.

Les peintres & les ſculpteurs ne ſont pas les ſeuls artiſtes qui doivent employer ces eſpeces d'énergie. L'Acteur du théatre doit en faire ſa principale étude; car c'eſt par là qu'il peut achever ce que le poëte a ébauché dans le drame. Quelque grande que ſoit l'énergie du poëme, celle que l'acteur ſeul peut y ajouter par ſon action, la ſurpaſſera toujours. Les Danſeurs même, s'ils vouloient bien étudier cette matiere, pourroient parvenir à diſputer le rang à tout autre artiſte. Leur art eſt ſuſceptible de la plus haute énergie, de ſorte que ce n'eſt pas la faute de l'art, mais de ceux qui l'exercent, s'il tombe dans l'aviliſſement. Il eſt à ſouhaiter qu'un danſeur, qui, outre le génie de ſon métier, ait la profondeur d'un philoſophe, acheve ce que *Noverre* a commencé *) pour la perfection de cet art, dont certainement on pourroit tirer un très grand parti.

Il y a encore une eſpece d'énergie dans les objets viſibles, que l'on pourroit nommer le *Pathos* de la nature inanimée. Dans la variété infinie de *coups d'oeil*, de vues & d'endroits caractériſés qu'on voit dans la nature, il s'en trouve de tels qu'on ne peut les contempler ſans être ſaiſi de quelque paſſion, ou de quelque ſentiment qui approche de la paſſion. Tel endroit ſombre inſpire je ne ſai quelle ſainte hor-

*) Dans ſes lettres ſur la Danſe.

horreur dont les prêtres de pluſieurs Nations ont fort bien profité pour nourrir la ſuperſtition; tel autre endroit paroit propre à inſpirer des réveries amoureuſes. En général la nature a viſiblement imprimé à de certains endroits les caracteres de gayeté, de triſteſſe, de reſpect, de dévotion, de peur ou d'horreur. C'eſt à l'habile artiſte d'en profiter. Le peintre des païſages en choiſiſſant de pareils endroits & en y plaçant quelque action convenable au caractere du lieu, eſt ſûr de toucher le coeur. Tel eſt le tableau *du Pouſſin* dont parle l'Abbé du *Bos*, où dans un païſage délicieux on voit le tombeau d'une jeune fille avec l'inſcription: *& ego in Arcadia.* Les poëtes & les auteurs des Romans ont tiré bon parti de tels endroits. L'architecture même, qui de tous les Beaux-arts paroit la moins ſuſceptible d'énergie, peut s'approprier cette eſpece. L'habile architecte, s'il veut étudier la nature, trouvera le ſecret de l'imiter en cela, & de donner l'énergie convenable aux temples, aux Baſiliques, aux tombeaux & à d'autres fabriques caractériſées.

Voilà les eſpeces d'énergie propres aux arts qui travaillent pour les ſens. Il ſemble d'abord que ces arts ayent en cela un grand avantage ſur l'éloquence & la poeſie. Car les idées des choſes ſenſibles que l'ame reçoit par le miniſtere de la parole ne ſont que les ombres des objets mêmes, de ſorte que leur force doit être très inférieure à celle des ſenſations. Cependant les arts de la parole ont dequoi ſe dédommager de ce qu'ils perdent de ce côté-là. Car d'abord ces arts ſemblables à la chymie, qui tire des matieres terreſtres ce qu'elles ont d'efficace & de ſpiritueux, concentrent l'eſprit qui eſt dans les choſes ſenſibles & rendent par là leur énergie plus forte; en ſecond lieu, l'orateur ou le poëte ayant le ſentiment plus délicat, que le gros des hommes, voit dans les objets viſibles beaucoup plus qu'eux: il nous rend ces objets non ſeulement tels qu'ils paroiſſent aux ſens, mais tels que la délicateſſe de ſon imagination & de ſon coeur l'ont apperçu & ſenti; il eſt l'abeille qui rend les ſucs recueillis des plantes convertis en miel. C'eſt par ces moyens que les objets ſenſibles gagnent une nouvelle énergie. D'ailleurs il y a ſou-

vent dans les choſes purement intellectuelles, qui ſont propres aux arts de la parole, une énergie qui ſurpaſſe la force des ſenſations. Quelquefois un ſeul mot laché bien à propos, ſemblable à une étincelle jettée dans la poudre, excite un tumulte affreux dans l'ame, en la forçant de renoncer à une longue ſuite d'idées agréables & de leur ſubſtituer des idées infiniment pénibles *). Des mots triomphans tels que *Ciceron* en lançoit quelquefois contre ſes ennemis, ont une énergie à laquelle rien ne peut réſiſter. Ceux donc qui poſſédent ces arts dans leur perfection, tiennent le coeur de l'homme dans leurs mains. Ils font trembler les plus courageux, & donnent de la fermeté aux plus foibles; ils ſont capables d'humilier les plus fiers & de donner de la fierté à l'humilité même.

C'eſt donc dans les ouvrages des orateurs & des poëtes que ce genre d'énergie comme tous les autres, a lieu dans toute ſon étendue. Les richeſſes du monde matériel & toute l'immenſité du monde intellectuel ſont les fonds où ils puiſent. On ne peut pas douter que le but que la nature (c. à d. ſon auteur) s'eſt propoſée en mettant cette énergie ſoit dans la matiere ſoit dans les objets immatériels, n'ait été de ſe rendre maitreſſe des réſolutions & des forces du monde intellectuel. Cela eſt viſible aux moins clairvoyans. Le poëte & l'orateur, Miniſtres de la Nature, cherchent à l'imiter en cela. Ils choiſiſſent les objets tantôt du monde matériel, tantôt du monde moral; & ils les peignent avec les couleurs les plus vives, toujours dans l'intention de produire du bien dans le monde intellectuel, ſoit en excitant, ſoit en détruiſant des ſentimens & des paſſions.

*) Je n'allégueraï qu'un ſeul exemple par ſequel on comprendra juſqu'où peut aller l'énergie d'un mot. *Annibal* étant à la cour du Roi *Antiochus*, ce Prince, pour faire parade de la puiſſance avec laquelle il ſe propoſoit d'attaquer les Romains, fit la revue de ſon armée. Après avoir fait remarquer au Général Carthaginois la richeſſe des enſeignes d'or & d'argent, le nombre des chars armés de faux, des Elephans portans des tours, ſa cavalerie enfin extrémement brillante par la richeſſe des harnois & de tout l'équipage; il demanda avec beaucoup de faſte à Annibal, s'il croyoit tout cela ſuffiſant pour les Romains. A' quoi celui-ci répondit. *Quoique de tous les peuples de la terre les Romains ſoyent les plus avares, je crois qu'ils s'en contenteront.* Rex contemplatione tanti tamque ornati exercitus gloriabundus Annibalem aſpicit &: putaſne inquit, ſatis eſſe Romanis hæc omnia. Tunc Pœnus - - - plane inquit ſatis eſſe credo Romanis hæc, etſi avariſſimi ſunt. V. Macrobe dans les Saturnales Liv. II. Ch. 2.

paſſions. Ils répandent dans les ames tantôt la ſérenité & le repos, tantôt la triſteſſe & le trouble, l'un & l'autre pour ſoutenir les vues de la Nature.

Je n'ai pas beſoin de prouver que cette énergie qui agit immédiatement ſur le coeur eſt le genre le plus important, & que les ouvrages des arts ne ſont reſpectables qu'à proportion du bon employ que l'artiſte y fait de ce genre d'énergie. Cela eſt très clair par ſoi-même. L'artiſte qui ne travaille que pour égayer l'imagination n'eſt pas l'imitateur de la Nature, mais le ſinge qui, faiſant ſemblant d'imiter l'homme ne fait que jouer en bête, incapable de vues & d'intentions réfléchies. Je conçois combien un pareil jugement heurte de front les opinions reçues: mais je n'y ſaurois rien changer pour cela. Il y a bien des ouvrages des Beaux-arts, ſurtout des arts du deſſein, très eſtimés, dans leſquels on chercheroit en vain la moindre trace de ce genre d'énergie. Je ne les mépriſe pas pour cela. Mais au lieu de les regarder avec les *connoiſſeurs* ou les *amateurs* comme des ouvrages parfaits, je les mets dans la claſſe de ce qu'on nomme *études;* ce ſont des eſſais par leſquels l'artiſte exerce une partie de ſes talens. Ce n'eſt pas dans l'*exercice mimuel* que conſiſte l'art de la guerre, quoique cet exercice y appartienne eſſentiellement. Il en eſt de même des différentes parties des Beaux-arts. Le poëte qui a fait un ouvrage brillant par la beauté des vers & des images, par la vivacité & le petillant de l'eſprit, le tout n'étant qu'un badinage, ne doit pas prétendre d'avoir fait un ouvrage qui rempliſſe le but de ſon art. Tout ce qu'il peut prétendre pour cela eſt de s'être exercé avec ſuccès dans une de ſes parties.

Voilà ce que j'avois à dire ſur l'énergie dans les objets rélatifs aux Beaux-arts. J'oſe me flatter que mes remarques ſur cette matiere pourront être utiles aux artiſtes qui voudront y réfléchir ſérieuſement. Mais ce n'eſt pas ici l'endroit pour en faire l'application. Après avoir rempli mon but principal, autant que la foibleſſe de mes lumieres & de mon ſavoir faire le permettoient, je n'ajouterai que quelques obſervations générales ſur la dignité des Beaux-arts.

Il réſulte bien clairement de tout ce que j'ai remarqué jusqu'ici, que de tous les Beaux-arts l'art *dramatique* eſt le plus important. Il n'y a aucu-

ne eſpece d'énergie qui n'ait lieu dans l'exécution d'une piece dramatique: ſa compoſition renferme tout ce que la poëſie a de plus énergique, & la bonne exécution y ajoute ce qu'il y a de plus fort dans les geſtes, dans le mouvement, dans les caracteres, & dans le ton de voix. Aucune autre production des arts ne réunit tant d'avantages. Parmi les différentes eſpeces des ouvrages dramatiques, celui qu'on nomme l'*Opéra* eſt très ſupérieur aux autres, vû que tous les beaux-arts ſans exception s'y trouvent réunis. Si tous ceux qui concourent à rendre ce ſpectacle brillant, Poëtes, Muſiciens, Acteurs, Danſeurs, Décorateurs, joignoient au caractere de grands artiſtes, les lumieres de la philoſophie, & qu'ils fuſſent bien unis dans leurs vues, ce ſpectacle entre les mains d'un Légiſlateur philoſophe deviendroit infiniment important. Mais ce même ſpectacle prouve de la maniere la plus frappante, combien les modernes ſont éloignés d'en avoir la vraye idée *). Telle eſt la frivolité de notre ſiecle qu'on a ſû avilir tous les arts à la fois, dans un genre qui ſeul pourroit les annoblir tous.

Après les ouvrages dramatiques, les autres genres de poëſie & d'éloquence maintiennent le premier rang de dignité, parce que leur empire s'étend plus loin que celui des autres arts, comme nous l'avons remarqué plus haut. Mon intention n'étant pas d'apprécier ici les différentes branches des Beaux-arts, je ne pouſſerai pas plus loin la comparaiſon. Il ſuffit à l'artiſte, quel que ſoit le genre auquel il s'eſt voué, de ſavoir que ſon art eſt ſuſceptible d'un genre d'énergie qui le rend important à la Raiſon la plus ſevere; il dépendra de lui, d'ennoblir ſon métier par des productions qui renferment des beautés ſublimes. C'eſt par ce moyen que *Phidias*, en maniant le marbre & l'ivoire, a ſû s'élever au rang d'*Homere* en donnant à ſon Jupiter Olympien une majeſté & une ſublimité, que la plus haute poëſie ne pouvoit ſurpaſſer.

*) Je parle ici des modernes pour inſinuer que les anciens, qui presque en tout ont mérité d'être nos maitres, en ont tiré un tout autre parti. Je prouverai dans un autre endroit que la tragédie greque, dans ſon bon tems, a été ce que nous nommons un Opéra, chanté d'un bout à l'autre. Or tous ceux qui connoiſſent les tragedies de *Sophocle* & d'*Euripide* ſa·ent dans quelle liaiſon intime ces drames ont été avec la religion, la politique & la morale du peuple pour lequel elles ont été faites.

MÉMOI-

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE BELLES-LETTRES.

* *
*

DES

INDUCTIONS

QU'ON PEUT TIRER DU LANGAGE D'UNE NATION PAR RAPPORT À SA CULTURE ET À SES MOEURS.

PAR M. TOUSSAINT.

On va chercher communément dans les Hiſtoriens, ou à leur defaut dans les monumens, le tableau des peuples; & l'on a raiſon: ce ſont les deux ſentiers battus qui menent naturellement à la connoiſſance de ces deux objets. Mais (pour me renfermer dans la même métaphore) comme on n'iroit pas remuer les chemins publics, pour juger de la nature du ſol d'un pays, mais plutôt les terres adjacentes, que les piés n'ont point foulées, que les charrois n'ont point comprimées, que des couches de matieres étrangeres n'ont point déguiſées ni maſquées: ainſi l'on ne doit pas apprécier ſervilement d'après les Hiſtoires & les monumens, les caracteres des diverſes nations, ſans faire entrer dans la balance pluſieurs conſidérations qui peuvent altérer la confiance que méritent ces deux eſpeces de témoignages.

Les Hiſtoriens, comme les autres hommes, ont eu une patrie & des dieux: ils ont donc été partiaux. Ils ont exalté leur pays aux dépens des autres pays; ils ont voulu établir leur culte ſur la ruine des autres cultes. Tant ceux des Grecs que ceux des Romains ne trouvoient des hommes civiliſés que parmi eux: les autres habitans

du

du Globe étoient réputés des barbares. Dans des temps poſtérieurs, les Théologiens d'une nation anathématiſoient ceux d'une autre ; & les Hiſtoriens épouſoient ces partialités dangereuſes. Quel fond peut-on légitimement faire ſur des hommes à qui on connoît ces préventions, quand on les ſuppoſeroit bien informés des faits qu'ils racontent ? Le préjugé s'imprime & ſe calque ſur tout ce qu'il touche.

Il m'eſt venu à l'eſprit une autre maniere de juger de la culture d'une nation & de ſes moeurs : c'eſt d'examiner ſon langage. Je commencerai par la culture, & finirai par les moeurs.

PREMIERE PARTIE.

Toute langue a commencé par les termes qui répondent aux premiers beſoins ; il falloit pour les premiers hommes, des vivres, des compagnes & un abri. Leur langue, ſans doute, ne s'étendoit qu'aux noms de ces ſeuls objets, & aux termes qui en déſignent l'uſage & la communication. Qui l'eût étudiée auroit aiſément deviné, que les hommes qui la parloient, vivoient de ce que la Terre produit ſans culture ; qu'ils épouſoient ſans cérémonies, & ſe logeoient ſans faſte.

Dès que les langues eurent des termes d'agriculture, de chaſſe ou d'économie rurale, c'eſt que les hommes avoient appris déjà à cultiver les campagnes, à donner la chaſſe aux bêtes des forêts, & à nourrir des beſtiaux. C'eſt là le ſecond degré de l'induſtrie humaine : voici le troiſieme.

Le partage des poſſeſſions donna naiſſance à l'arpentage ; le loiſir des pâtres à l'aſtronomie ; l'intempérie des ſaiſons à l'uſage des vêtemens, uſage qui rendit néceſſaires la préparation des peaux d'animaux, & la fabrication des étoffes ; la crainte des bêtes feroces, & peut-être auſſi la rigueur des ſaiſons, à l'architecture, dont la baſe étoit la taille de la pierre & du bois. Il fallut apprendre à polir le fer pour en faire des inſtrumens de labourage, & des outils pour les métiers.

tiers. Si donc on trouve dans la langue d'une nation, les termes de ces différens arts, c'eſt qu'elle les cultive; & l'on apprend par ſon lexique à quel point elle les a portés.

Jusqu'à cette époque incluſivement, toutes les idées étoient phyſiques, & pour ainſi dire matérielles. Le terme de *grand* répondoit aux dimenſions des corps, celui de haut à leur élévation, celui de bas à leur dépreſſion; tout étoit réputé corps, ou attribut relatif aux corps. L'homme ne ſe connoiſſoit qu'en tant que corporel. Toutes les opérations humaines étoient ſuppoſées produites par les organes: c'étoit toujours voir, entendre, toucher; comprendre même étoit un terme qui déſignoit un acte corporel. Les affections & les paſſions, dont on a fait depuis, des attributs de l'ame, n'étoient non plus pour les premiers hommes que des appétits corporels: l'amour n'étoit que l'impulſion d'un ſexe vers l'autre. L'empreſſement ou le deſir n'étoient que la faim ou la ſoif, ou autres ſemblables mouvemens de pur inſtinct. La pareſſe étoit l'inaction, la vertu même n'étoit que la force; & la force étoit la ſeule vertu des Héros.

Mais on eſt arrivé à une époque beaucoup plus parfaite lorsqu'on reconnoît par le langage, que les arts ont été réduits en principes, & aſſujettis à des regles: ce moment touche au grand développement de l'eſprit humain. Des arts raiſonnés aux ſciences les plus abſtraites il n'y a qu'un pas; & ce pas eſt bientôt franchi. Alors les ſciences de toute eſpece, qui chacune, comme les arts, ont leur langue particuliere, jettent dans la langue univerſelle, une richeſſe, une fécondité infinie: on a des mots pour toutes les choſes, pour toutes les idées; on en a même pour toutes les nuances. Et ce n'eſt pas ſeulement pour les ſavans & les artiſtes que la langue devient abondante; elle l'eſt même pour les gens du monde, qui à meſure qu'ils étendent leurs connoiſſances, empruntent des ſciences & des arts, des termes expreſſifs, qu'ils portent dans les converſations & dans les cercles. Elle l'eſt ſingulierement pour les poëtes, pour les orateurs, & pour tous les hommes de génie, qui en détournant les

mots de leur ſignification littérale, pour les élever à un ſens figuré, en forment des images agréables & des tableaux intéreſſans.

Quand une langue en eſt à ce point, on eſt ſûr que la nation qui la parle eſt cultivée à tous égards. Or pluſieurs nations en ſont venues là: mais leurs génies divers ont imprimé des caracteres différens aux arts & aux ſciences qu'elles cultivent; & c'eſt encore par leurs langues qu'on peut juger de leurs génies.

La Grecque, par exemple, par ſa richeſſe & ſes licences, ſe prêtoit à tous les genres de diction: la flexibilité de ſes expreſſions, leurs dérivations, leurs combinaiſons, la rendoient propre à peindre toutes ſortes d'images: mais la ſubtilité de ſes termes favoriſoit les ſophiſmes, les équivoques & les diſputes. On fut longtems en Grece avant d'inventer le mot νοῦς; & plus longtems encore avant d'en déterminer la ſignification. On s'accorda longtems ſur le terme d'ὁμοούσιος avant de ſe concilier ſur le dogme qu'on entendoit lui faire ſignifier. Cependant il faut avouer, que quand on fait un terme pour rendre une idée, c'eſt qu'on l'a au moins entrevûe. L'*Entelechie* avoit ſans doute un ſens quelconque dans la bouche d'Ariſtote.

Telle devoit être la langue d'une nation libre exercée dans l'art Oratoire, dans la Poëſie, dans la Philoſophie, & dans tous les genres d'érudition, mais en même tems vive, pétulante, frivole, & toujours emportée hors d'elle-même par une imagination effrénée.

La Latine, moins étendue & plus châtiée, fut longtems privée des termes conſacrés aux ſciences, parce que dans les premiers ſiecles de Rome, les Romains n'étoient pas ſavans; & lorſqu'ils le devinrent ce fut des Grecs qu'ils reçurent les termes avec les idées qu'ils exprimoient. La pureté de cette langue, ſa nobleſſe, la régularité de ſes tours, l'harmonie de ſes phraſes, annoncent une nation grave, auſtere & belliqueuſe, qui toute occupée de ſes grands projets de conquêtes & d'aggrandiſſement, ne donnoit qu'une attention fort inférieure aux ſciences, aux arts & aux lettres. Il n'y a peut-être jamais eu qu'un Sou-

Souverain dans le monde (& il étoit réſervé pour ce ſiecle & pour ce pays) qui ait ſû réunir dans ſa perſonne à l'héroïſme militaire, les études philoſophiques, l'amour & la culture des ſciences, des lettres & des arts.

Veut-on connoître combien eſt grande la différence de génie & de caractere entre les anciens Romains & les modernes: on n'a qu'à comparer la langue Latine à l'Italienne. En oppoſition à un idiome ſimple & majeſtueux, on verra un jargon tendre & maniéré, fait pour les pointes & les *concetti*, combiné pour rendre des idées galantes & quinteſſentiées; riche à la vérité par l'immenſe variété de ſes termes, la multiplicité de ſes ſynonymes, la gradation artiſtement ménagée de ſes augmentatifs & de ſes diminutifs, mais ſingulierement calculée pour la métaphyſique voluptueuſe de l'amour. On a dit de cette langue, que c'étoit celle des femmes: à quelques égards on pourroit même dire que c'eſt celle des enfans, tant elle a de mignardiſe & de puerilités. Doit-on s'attendre naturellement à trouver chez un peuple qui parle une telle langue, des braves, des philoſophes ou des ſavans profonds? On y trouvera tout au plus, des gens de lettres & des poëtes; on y trouvera tous les arts agréables, tous ceux qui ſervent d'aſſaiſonnement aux plaiſirs.

L'idiome Eſpagnol, enfant métif du Latin & de l'Arabe, n'a pas corrompu ſes ſources comme l'Italien; ſes expreſſions ſont nobles & réſervées; il conſerve ſa dignité en toute occaſion. C'eſt avec une politeſſe majeſtueuſe, que partout ailleurs on prendroit pour une ironie inſultante, qu'un officier propoſe la correction militaire à ſon ſoldat. Il ne faut que ſavoir cette langue pour juger qu'un Eſpagnol doit être un homme ſérieux, céremonieux, toujours guindé ſur l'étiquette, & vétillard ſur le point d'honneur.

La langue Françoiſe, diſtinguée entre toutes les autres par ſa clarté, par la régularité de ſa conſtruction, par la ſimplicité de ſes tours, ennemie des figures hardies, & ſpécialement des inverſions, fait ſuppoſer dans les hommes qui la parlent, une intelligence facile,

des idées nettes, des raiſonnemens conſéquens; & des connoiſſances méthodiques; & l'expérience juſtifie la ſuppoſition. Je ne prétends pas que les têtes françoiſes ſoient mieux meublées que celles des autres nations: mais ce qu'elles contiennent eſt en ordre. Toutes leurs productions en ſont foi: c'eſt le beau côté des auteurs françois.

La langue Angloiſe au contraire, informe, indigeſte & mal combinée, s'enrichiſſant journellement par ſes pirateries & ſes déprédations, prend à toutes mains, de nouveaux termes, qu'elle accumule pêle-mêle dans ſon vocabulaire, ſans daigner même déguiſer ſes larcins. Dans le déſordre, dans la hardieſſe, dans la vigueur & la fierté rogue de ſes expreſſions, on voit un peuple préoccupé par la manie de la liberté, qu'il étend juſques à ſa diction, qui ſe croiroit aſſervi s'il reconnoiſſoit un frein dans ſes diſcours; & tirannisé s'il aſſujettiſſoit ſes périodes aux regles de la logique ou de la grammaire.

La langue Allemande, la plus méthodique de toutes, la moins mélangée de mots exotiques, eſt auſſi de toutes celles dont j'ai quelqu'idée, la mieux conſervée, celle qui a ſubi moins de changemens & d'altérations. Elle annonce des hommes ſolides & ſenſés, ſur qui les inconſtances des modes, & l'influence du commerce avec l'étranger n'ont point eu de priſe. On devine encore l'Allemand qui ſe parloit il y a ſept ou huit ſiecles; il s'eſt plutôt enrichi que dénaturé. Mais ſa richeſſe ne vient pas du dehors: c'eſt de ſes racines fécondes, diverſement combinées ou conjointes, que ſont nés les accroiſſemens immenſes qu'il a pris. Il n'a pas même puiſé comme tous les autres idiomes de l'Europe, dans le Grec & dans le Latin, pour ſe procurer des termes techniques: il les a tirés de ſon propre fonds.

Et afin qu'on ne doute pas qu'il n'y ait une analogie conſtante entre la langue de chaque pays & le caractere de ſes habitans, chaque province, chaque domination en Allemagne a ſon dia-

dialecte particulier; & ce dialecte caractériſe le génie du lieu où il eſt uſité. Il eſt rude & négligé en Suiſſe & en Alſace; épais en Suabe, un peu recherché en Saxe, doux, naturel & agréable dans le Brandebourg.

SECONDE PARTIE.

Comme les moeurs émanent immédiatement des caracteres: avoir montré la connexité du langage avec le caractere ou le génie de chaque nation, c'eſt presque avoir prouvé d'avance, le rapport qu'il a conſtamment avec les moeurs. Quelques exemples mettront ce rapport dans tout ſon jour.

Si par exemple la langue d'un pays eſt molle & ſans énergie, c'eſt que les hommes y ſont lâches & effeminés. Si les applications n'étoient pas des ſatyres, je ſaurois bien comment en fournir la preuve.

Si les termes de galanterie y dominent, c'eſt que les hommes y traitent l'amour moins comme un plaiſir que comme une affaire capitale.

Si l'on y exalte par des chanſons, la ſuavité du vin, c'eſt que le climat en produit, ou qu'au moins on eſt ſenſible au plaiſir d'en boire. Au nord on chante la biere & le houblon.

Si l'on y entend célébrer avec emphaſe la débauche & les excès: on a droit de ſuppoſer que les hommes apparemment s'y font un jeu de leurs déreglemens.

Si l'on y voit ſur le théatre ou dans les Romans des entrepriſes contre l'honneur des maris, racontées ſur le pié d'aventures plaiſantes; c'eſt que le lien conjugal n'y eſt pas reſpecté; d'où l'on peut conclurre encore que la tendreſſe paternelle y languit; & par conſéquent que l'amour filial n'y eſt pas fort vif: car l'union entre les époux, & la tendreſſe reſpective des peres & des enfans ſont trois ſortes d'affections qui ſe fortifient mutuellement.

Si les imprécations & les juremens y ſont communs, c'eſt que la nation eſt groſſiere & colérique.

Si les termes de civilité ordinaire y ſont abjects & bas, c'eſt que le peuple y eſt ſerf, & que la nobleſſe y eſt inſolente.

S'il s'y trouve des expreſſions généralement adoptées qui contiennent des alluſions profanes aux myſteres ou aux dogmes, c'eſt que le peuple de ce pays n'eſt pas religieux.

De ce qu'il ne ſe trouve point de terme dans la langue Juive, qui déſigne une ame ſpirituelle, qui en exprime l'immortalité, ou qui énonce des récompenſes pour une autre vie; bien des interpretes ont conclu que les hébreux n'avoient aucune idée de ces dogmes, qu'ils n'avoient même aucune religion; car il ne leur ſembloit pas que ce fût en avoir une que de ſuppoſer que l'homme ſoit anéanti par la mort. Mais quand on voit les Phariſiens adoptant le ſtyle de Platon, joindre aux pratiques judaïques, les expreſſions du Philoſophe Grec, on a droit d'en inferer qu'ils avoient fait quelques pas de plus que les autres ſectes, & pouvoient au moins aller de pair avec les Païens, qui ſuppoſoient des champs Elyſées & un Tartare.

On fut même encore longtems, après avoir imaginé une ſeconde vie, avant de donner à l'ame une nature purement ſpirituelle; c'étoit un ſouffle, un vent, un feu léger. Le Chriſtianiſme même, qui, comme un ſoleil levant répandit ſur les objets théologiques un ſi prodigieux volume de lumiere, n'établit pourtant pas déterminément dès ſa naiſſance, la ſpiritualité de l'ame. Les premiers Peres de l'Egliſe ne l'avoient pas ſoupçonnée; il ne leur ſembloit pas même que Dieu pût être quelque choſe s'il n'étoit pas un peu matériel. Les queſtions ſur la nature de l'ame furent abandonnées aux métaphyſiciens comme des objets de pure curioſité. Et en effet, ſi l'on peut ſeulement établir que l'ame ſurvit au corps, qu'importe de quelle étoffe elle ſoit? Avec ce

point

point-là ſeul on a une morale & une religion: mais ſans ce point on n'a ni l'une ni l'autre.

Je préſumerai que les moeurs d'une nation ſont pures par les mêmes inductions tirées de ſa langue qui m'ont fait juger de ſon ignorance relativement aux ſciences & aux arts; car ſon ignorance à cet égard eſt juſtement le plus ſûr préſervatif contre la corruption, qui eſt la fille du Luxe; puiſqu'où il n'y a ni ſciences ni arts il ne ſauroit y avoir de Luxe.

Je jugerois encore favorablement des moeurs d'une nation dont la langue ne me fourniroit pas même les noms des vices qui infeſtent la plûpart de nos ſociétés. Je ſuppoſerois que le Parricide eſt ſans exemple, ou au moins fort rare, chez un peuple qui n'auroit pas ce terme ou ſon équivalent. Et comme il eſt naturel d'imaginer que les Grecs qui avoient dans leur langue, le terme de Pederaſtie, avoient auſſi ſans doute le vice qu'il déſigne, j'imaginerois au contraire, qu'une nation qui n'auroit pas de mot correſpondant à celui-là, ne ſeroit pas apparemment dans le cas d'en avoir beſoin. J'ai ſéjourné dans un pays dont la langue n'avoit pas de terme qui répondît à celui d'*auteur:* mais auſſi étoit-ce un terroir qui ne produit pas de ces êtres-là.

J'aurois encore bonne idée d'un pays où je ne trouverois pas d'expreſſions uſitées pour des ſermens: j'y ſuppoſerois plus de franchiſe & de vérité que partout ailleurs. Les ſermens n'ont, je crois, jamais ſervi qu'à donner au menſonge la couleur de la vériré: auſſi ſont-ce préciſément les hommes vrais qui en font le moins d'uſage.

Une autre preuve de la pureté des moeurs ou de leur ſimplicité, c'eſt quand une langue eſt bien garnie de ces termes ingénus que les peuples policés appellent libres ou obſcenes. Il ſemble que cette franchiſe d'expreſſion annonce qu'on ne fait rien dont on doive rougir. Nous n'avons envelopé les nôtres que pour cacher

cher nos vices. Les courtiſannes de l'ancienne Rome étoient à peu près nues: leur unique vêtement étoit une gaze tranſparente. A préſent il y a tel pays où ce ſont les ſeules femmes qui ſoient voilées: nos courtiſannes n'en ſont pas pour cela moins vicieuſes. Les annales ou le code d'aucune nation ne contiennent des détails auſſi crus ſur l'impureté, que l'Hiſtoire du Peuple de Dieu, dictée pourtant par l'Eſprit Saint. Les Ecrivains des livres ſacrés n'avoient pas ces petits ſcrupules qui inſpirent aujourd'hui la réſerve dans l'expreſſion, aux auteurs des brochures les plus profanes. Les contes de la Fontaine & ceux de Bocace, n'ont rien de deshonnête en comparaiſon du Deutero nome. C'eſt qu'apparemment les écrivains des livres ſacrés avoient dans le coeur toute la candeur & la franchiſe de leur ſiecle. Auſſi, tandisque l'Egliſe Romaine, honteuſe des tableaux qu'on trouve dans la Bible, tiroit un rideau par deſſus, & ne les laiſſoit voir qu'aux gens d'Egliſe & aux lettrés; les Réformateurs, qui ſe piquoient d'auſtérité dans les moeurs, loin de reconnoître de l'indécence dans ce que les Ecrivains ſacrés n'avoient pas cru indigne de leur plume, mirent la Bible indiſtinctement entre les mains de tout le monde. On lit dans des aſſemblées religieuſes, pour s'édifier, ce que par délicateſſe, on n'oſeroit pas proferer dans un cercle de mondains.

En un mot le langage habituel des hommes les décele & les fait connoître quoi qu'ils faſſent. Il en eſt des nations comme des coteries: on ne riſque guere de ſe tromper en jugeant par le ton qui y regne, de leurs ſentimens & de leurs moeurs. L'homme pris collectivement & l'homme individuel ne différent pas tant qu'on pourroit croire. On ſe maſque, on ſe déguiſe dans l'occaſion: mais comme le maſque gêne & incommode, le moment du beſoin paſſé on l'écarte, & on ſe laiſſe voir à viſage découvert.

Ce n'eſt pas ſeulement du caractere & des moeurs d'un peuple qu'on peut juger par ſon langage: on en peut auſſi tirer des in-

inductions par rapport à ſon origine, à ſes défaites, à ſes conquêtes, à ſes émigrations, à ſa poſition actuelle. Ce que le François, par exemple, a de commun avec le Latin atteſte l'invaſion des Gaules par les Romains; ce qu'il y a d'Arabe dans l'Eſpagnol, celle de l'Eſpagne par les Mores. Ce qu'une nation appelle *Eſt* ou *Oueſt*, *Sud* ou *Nord*, ſert à indiquer ſa ſituation. Les termes d'ultramontain, de tranſalpin, de ciſalpin, ou autres ſemblables, font comprendre quelle eſt la poſition d'un Pays relativement à un autre. Les lumieres qu'on peut tirer du fond d'une langue par rapport aux différens aſpects ſous leſquels on étudie l'Hiſtoire d'une nation, ſont innombrables.

Ce ne ſont là au reſte que des vues générales, qu'on peut étendre à l'infini en approfondiſſant les diverſes langues, & entrant dans les détails de leurs nomenclatures: mais ce travail meneroit à faire un gros livre; & je n'ai voulu faire qu'un Mémoire.

DISCOURS

DE

M. LAMBERT *).

Je ne m'arrêterai pas à Vous entretenir, Meſſieurs, ſur la liaiſon des connoiſſances, qui ſont l'objet de chacune des quatre Claſſes de cette Académie. Ces liaiſons ſont celles de toutes les Sciences, & les mêmes que celles qui enchainent les vérités, de façon qu'elles en ſont un tout étroitement uni en toutes ſes parties.

La Claſſe de Phyſique expérimentale, à laquelle j'ai cru devoir me vouer, me donnera lieu de Vous offrir un point de vue plus particulier, en ce que je vais ramener les autres connoiſſances à celle-ci, & faire voir par quelles liaiſons elles y tiennent. Comme c'eſt là la façon dont je combinerai mes occupations académiques, Vous verrez du moins, Meſſieurs, que diverſes parties de ma tâche ne me ſont point inconnues; ſi tant eſt que la briéveté à laquelle je me reſtreindrai, m'empêche de n'y faire entrer rien de nouveau.

Il eſt une Phyſique expérimentale, que je nommerai *naturelle*, & qui eſt fort étendue. En effet, dans notre enfance l'Univers entier nous eſt tout auſſi nouveau, que le fut à M. *Richer* la retardation du pendule ſous l'équateur, à *Marius*, *Galilée*, *Huyghens*, les ſatellites de Jupiter & de Saturne, à *Newton* l'attraction ou la gravitation des corps céleſtes, à *Kepler* les loix de leurs mouvemens, à *Pythagore* les différens ſons d'une même enclume, à *Guericke* l'élaſticité de l'air, & ſa peſanteur à *Torricelli*; enfin à tant d'autres Phyſiciens tant d'autres phé-

*) Prononcé le jour de ſa réception, dans l'Aſſemblée publique du 24. Janvier, 1765. Il a déjà été imprimé ſéparement. On en retranche ici tout ce qui eſt de pur compliment, l'uſage étant de n'inſérer dans les Mémoires que ce qui ſe rapporte aux Sciences & aux Belles-Lettres.

phénomenes & effets de la Nature. Toutes nos connoiſſances commencent par les ſens; & les repréſentations de l'ame ſont toujours étroitement liées à quelques ſenſations. Nous n'appellons les premieres abſtraites, que lorsque les dernieres commencent à être imperceptibles.

J'en conclus, que cette Phyſique expérimentale naturelle nous fournit & nous occaſionne les premieres notions, la premiere baſe de nos connoiſſances, en un mot les premieres *données*, dont nous devons partir, pour parvenir à des conſéquences plus reculées & plus éloignées de ces commencemens. Heureux quiconque a reçu de la nature une ſenſibilité telle, qu'en contemplant les objets du Monde phyſique, il s'apperçoive chaquefois de tout ce qui s'y préſente de nouveau, & une mémoire qui lui en reproduiſe le ſouvenir toutes les fois qu'il en beſoin! Il ſera riche en connoiſſances; il abondera en tout ce qui en fait la premiere baſe. Et s'agît-il de pourſuivre un raiſonnement long & ſuivi, il ne manquera jamais de retrouver les liaiſons néceſſaires pour le conduire au but qu'il ſe propoſe.

Mais avouons, Meſſieurs, que, quelque grande que puiſſe être cette perfection d'un homme, il ne ſera jamais dans tous les points de vue où il faut être, pour ſe procurer toutes les données que demande une connoiſſance complette de la Nature. Qu'on y ſupplée même, autant qu'on veut, par le raiſonnement: ce ſera ſans contredit le moyen d'aller bien loin. On peut ſe diſpenſer de voir, à meſure qu'on apprend à penſer juſte, & à étendre le fil d'un raiſonnement exact & bien lié. Mais, outre que dans le raiſonnement, de même que dans le calcul, une ſeule circonſtance omiſe gâte tout le reſte, & qu'une ſeule donnée qui manque, le ſuſpend néceſſairement; il s'en faut de beaucoup que nous ayons toutes ces données, & que nous nous aviſions de nous-mêmes de toutes les combinaiſons dont elles ſont ſuſceptibles. Et jusques-là nous reſterions bien en arriere, ſi nous voulions en revenir au premier des moyens, dont nous nous ſervons pour apprendre à connoître ce que le Monde nous offre.

Je n'ai pas beſoin d'en appeller à ces tems barbares, où, au lieu de la Nature, on ne conſultoit qu'*Ariſtote*. A peine ce préjugé fut levé par *Bacon*, que la Phyſique ne tarda pas de parvenir à cet état brillant où nous la voyons. Ce grand homme ouvrit la véritable carriere, où l'on peut toujours aller plus loin, & en toute ſûreté. Car enfin, c'eſt le même chemin qui nous conduit dès notre enfance, & que le Créateur nous a ouvert pour un âge où il faut apprendre ſans le ſecours de la réflexion & du raiſonnement.

Dans un age plus mûr, aidés de ces facultés de l'ame, & munis de quelques principes univerſels; nous pouvons y marcher à plus grands pas, & les accélérer même. Sans nous borner à contempler la Nature agiſſante par elle-même, ou à ne nous arrêter qu'aux dehors qu'elle nous offre, nous pouvons nous munir d'inſtrumens, pour lever le voile qui cache ſes ſecrets, pour ouvrir les portes de ſon ſanctuaire, où elle garde ſes myſteres, & les loix éternelles qui réglent ſes pas. Sans nous arrêter à n'écouter que ce qu'elle dit, nous pouvons l'interroger: ſes oracles ne ſont ni ambigus ni obſcurs, dès que nos queſtions ſont bien conçues, & duement propoſées. Mais voilà la grande étude d'un véritable Phyſicien. Il convient, Meſſieurs, de m'y arrêter un moment.

Ces expériences faites à deſſein, & dans des circonſtances choiſies, ſont autant de problemes que nous propoſons à la Nature. Ses loix ſont individuelles & immuables. Les réponſes qu'elle donne, y ſont exactement conformes. Elle répond préciſément, non à ce que nous croyons demander, mais à ce que nous demandons en effet. A moins donc que d'être éludés & trompés dans notre attente, il faut s'aſſurer rigoureuſement des conditions que le probleme préſuppoſe, afin de choiſir les circonſtances, & d'y adapter l'expérience qu'on veut faire. Autrement on ſe trouve dans le cas de ceux qui, diſpoſant leurs alembics, ou leurs creuſets, en ſorte qu'ils ſe flattent que la Nature y opérera ſelon les mêmes loix qu'elle ſuit pour produire de l'or, n'en voyent ſortir que ce qu'admettoient la préparation & les ma-

marieres, je veux dire, de la porcelaine, du phoſphore, ou quelque mixtion médecinale. Ils ſont même heureux, s'il n'en retirent rien de pis. Tant il importe de ſavoir préciſément ce qu'on demande à la Nature; juſques-là même qu'on peut dire, qu'une expérience bien imaginée, & dont l'exécution remplit toutes les conditions qu'elle exige, peut toujours aller de pair avec le probleme le plus ingénieux & le plus difficile qu'un habile Géometre puiſſe réſoudre. Cette égalité va encore à ce point, que l'Algebre, comme la Nature, répond aux vrayes conditions du probleme, & élude l'attente du Géometre, dès qu'il s'eſt figuré ces conditions différentes de ce qu'elles ſont.

La Phyſique expérimentale ſe rend abſolument néceſſaire par tout où il n'y a pas moyen de voir le mécaniſme par lequel la Nature opere, & ſurtout par conſéquent dans la Chymie, & dans pluſieurs branches de l'Anatomie. Au contraire on y joint le calcul, on y applique les principes de la Mécanique, là où ce mécaniſme ſe dévélope aſſez pour être vu, ou qu'il eſt aſſez ſimple pour être conçu. C'eſt donc là, où la Phyſique expérimentale ſe rapproche & ſe lie à la théorie & aux Mathématiques. Mais c'eſt auſſi là, où les difficultés que rencontrent le Phyſicien & le Géometre, s'accumulent en ſe combinant, & où il eſt principalement beſoin de ne négliger, ni le calcul, ni l'expérience. En voici le parallele.

Le calcul y fournit la préciſion & l'univerſalité. L'expérience vérifie l'une & l'autre, & découvre chaque circonſtance omiſe, ou fauſſement admiſe. En négligeant le calcul, & la théorie qui lui ſert de baſe, on fait les expériences ſans choix & ſans deſſein. En négligeant les expériences, on court riſque de donner dans la chimere, & de produire des calculs applicables à tout autre Monde, qu'à celui où nous ſommes. On peut dire, que ſi jamais la Phyſique n'a pas fait autant de progrès qu'elle auroit pu en faire, c'eſt qu'on a négligé d'obſerver cette maxime. Des expériences mal faites ne laiſſent pas de garder encore quelque reſte de cette autorité abſolue, qu'elles

pourroient s'arroger, ſi elles étoient bienfaites; & par là elles empêchent les progrès d'une bonne théorie, & la gâtent, dès qu'on les y employe ſans en connoitre les défauts. Au contraire, les calculs, & les hypotheſes hazardées avant que d'avoir aſſez conſulté la Nature, & ſoutenues par cet amour qu'on a pour ſes propres productions, & plus encore par la crainte ſecrete de les voir renverſées en peu de tems, excitent dans l'eſprit de leurs auteurs cette averſion naturelle pour les expériences, dès qu'on n'oſe riſquer cette épreuve déciſive. Il ne doit pas être indifférent au Géometre de s'être trompé; mais, s'il ne s'intéreſſe à ſon erreur, que pour la ſoutenir par un principe de fauſſe gloire, il ſe fait à ſoi-même une illuſion vicieuſe, & qui le détourne de la vérité, qu'il vouloit chercher en imaginant ſon ſyſteme. Qu'il eſt beau de ſe poſſéder ſoi-même, & d'avoir cette retenue ſi louable & ſi avantageuſe, qui arrête & rallentit des pas trop précipités, & qui fait qu'on prefére un moindre nombre de vérités, qu'on ne trouve qu'à pas ſûrs & meſurés, à un grand nombre d'erreurs qui ſe trouvent aiſément, & qui éblouiſſent l'inventeur trop avide de la nouveauté, par quelque apparence du vrai!

Ce parallele fait voir en même tems la néceſſité de combiner les calculs, les théories, & les expériences; de même que l'étroite union qui ſe trouve entre les Mathématiques & la Phyſique expérimentale, & les ſecours mutuels qu'elles ſe prêtent. Mais la Phyſique n'eſt pas moins liée à la Philoſophie. Les connoiſſances du Philoſophe commencent par les ſens, tout de même que celles que renferment les autres Sciences. Elles partent toutes des mêmes commencemens. La différence ne conſiſte que dans la marche, & ſi j'oſe employer ce terme, dans la direction des différentes routes. Le Phyſicien reſte, pour ainſi dire, plus près des premieres ſources. Il recherche avec une attention plus particuliere ce que la Nature n'offre pas d'abord au premier coup d'oeil. Le Philoſophe arrange les idées que lui procurent les ſenſations; il en examine la dépendance & la ſubordination; il remonte & pénetre à celles qu'on peut appeller ſimples

ſimples & premieres, desquelles il faut partir, & qui ſont comme les ingrédiens, dont toutes les autres ſe compoſent. Ces idées ſont exemtes de contradiction, par là même qu'elles ſont ſimples. Elles peuvent être penſées, ſans qu'on ait recours à d'autres, qui en ſont compoſées, & dont il faut prouver la poſſibilité de la compoſition, avant que d'en rien conclure. Le Philoſophe s'en ſert, pour en faire la baſe de ſes connoiſſances, & pour en tirer ces axiomes & demandes, dont il faut partir dans le raiſonnement qui ſuit l'ordre & la rigueur géometrique. De là ces principes univerſels, généralement appliquables, que nous doit fournir la Métaphyſique, & dont on tire un grand ſecours, lorſqu'il s'agit de lier les expériences, & de donner à la Phyſique un ordre & une connexion véritablement ſcientifique. Auſſi faut il dire, qu'elle reſte en arriere, à meſure que le Philoſophe ne fournit point aſſez de ces principes univerſels, & qu'il n'y ſubſtitue que des raiſonnemens vagues, qui tiennent à de ſimples hypotheſes, & à une terminologie vuide de ſens.

En Métaphyſique on n'eſt encore gueres parvenu plus loin. Mr. *Locke* commença par débrouiller les idées ſimples, mais ſans y appliquer la méthode que je viens d'indiquer, & qui lui auroit fourni les axiomes & les demandes, je veux dire la baſe des Sciences qui ſe réſolvent en ces idées, quand on en fait l'anatomie à la maniere de Mr. *Locke*.

Voilà donc la Philoſophie étroitement liée à la Phyſique expérimentale. La Phyſique donne à la Philoſophie les matériaux, toutes les premieres idées & connoiſſances. Mais elle en attend en échange les principes néceſſaires, pour être rendue ſyſtématique, & pour prendre la forme de Science démonſtrative. J'ajouterai encore, que le Philoſophe s'égarant quelquefois, & même aſſez facilement, dans ſes méditations abſtraites, ne ſauroit mieux faire que d'en revenir à ces premiers commencemens que lui offre la Phyſique, afin de voir de quelle maniere il s'eſt écarté. S'il veut éviter le reproche qu'on fait aſſez ordinairement aux Philoſophes, de ce qu'ils ne s'attachent qu'à

qu'à des ſpéculations abſtraites & inutiles, il lui convient de les rapprocher de la pratique; & par conſéquent, de l'expérience & des circonſtances individuelles de la Nature, qui lui ſerviront comme de pierre de touche, dès qu'il s'agit d'en faire voir & ſentir même la juſteſſe, & l'uſage qu'on en peut faire.

Mais que dirai-je de l'Hiſtoire & des Belles-Lettres? Ont-elles quelque rapport à la Phyſique? On ne peut en diſconvenir. L'Hiſtoire nous offre des faits & des phénomenes des tems précédens; & en la prenant dans ſa véritable étendue, l'Hiſtoire naturelle en fait une grande partie. Qui nous fournira les données, pour apprendre à connoître les loix qui s'obſervent dans la ſucceſſion des cauſes & des effets, & pour les prévoir? C'eſt à l'Hiſtoire à nous tenir regître de ce qui s'eſt paſſé, afin de pouvoir le comparer avec le préſent, & en déduire les loix pour l'avenir. Remarquons encore, que réciproquement l'Hiſtoire elle-même ne ſauroit mettre ſes régîtres en ordre, & fixer ſes époques, que d'après les grandes révolutions que la Phyſiſte céleſte lui offre dans le mouvement des Aſtres, & dont elle caractériſe & calcule les momens.

Je ne dirai qu'en paſſant, que les Belles-Lettres, entant qu'elles embraſſent la théorie & l'étude des langues, contribuent à fixer & à conſerver la ſignification des noms que nous donnons à tout ce qui ſe rencontre dans la Nature. Mais j'obſerverai, que la baſe de toutes les langues, je veux dire, les paroles primitives & radicales, ſont préciſément celles dont on ſe ſert dans ce que j'ai appellé ci-deſſus la Phyſique expérimentale naturelle. Les Langues ne commencent pas par des idées abſtraites, on ne pourroit les indiquer; mais par ces choſes que nous voyons dès notre premiere enfance, & dont nous acquérons à la fois & les noms & les idées, en voyant les choſes devant nous. Cette liaiſon entre la Phyſique & la théorie des Langues eſt la plus étroite qu'il puiſſe y avoir; juſques-là même, que les Philologues, les Grammairiens, & les Lexicographes, tombent dans des fautes de choſes & de mots, unique-

quement parce qu'ils négligent l'étude de la Phyſique & de l'Hiſtoire naturelle, qui leur fourniroient des idées nettes de la plus grande partie des radicaux des langues.

Ce n'eſt pas cependant à l'Hiſtoire & aux Langues que ſe bornent les Belles-Lettres. L'art de l'Orateur & la Poëſie en ſont les plus belles parties. Mais que de matériaux ne leur fournit pas la Phyſique, ſi les Poëtes veulent chanter les merveilles de la Nature, & s'appliquer à une connoiſſance plus étendue des objets de l'Univers, que ne le ſont le vin & le beau ſexe! Quel goût, quel feu, quel enthouſiaſme, que celui dont ils ſont ſaiſis, dès que la Nature leur fait connoître & ſentir ſes beautés, ſes merveilles, ſes abymes, ſes vaſtes régions parſemées d'étoiles rayonnantes! Etudes trop longues pour la plûpart des hommes, & qui demandent une attention trop continue. C'eſt aux Poëtes à les mettre à la portée de tout le monde. Que peuvent-ils faire de mieux, de plus digne de leurs talens, de plus eſſentiel à leur art, que d'imiter la belle Nature, de nous en offrir des tableaux, qui élévent nos penſées aux perfections infinies du Créateur? La Nature eſt un bien; elle offre des beautés, dont tout le monde a le droit de jouir: & dès-là c'eſt une des plus belles tâches des Poëtes, de procurer cette jouïſſance à tous ceux qui n'ont, ni le tems, ni les talens, pour les étudier à fond. On jouit mieux des agrémens du Printems, quand on a appris à les apprécier dans *Tompſon* & dans *Kleiſt*.

Tel eſt en racourci, Meſſieurs, le tableau des rapports, qui ramenent & lient les autres branches de vos occupations à la Phyſique expérimentale, & à la connoiſſance de la Nature. Elle nous fournit les premieres idées & les premiers noms des choſes; elle nous offre la baſe de toutes nos connoiſſances. Nous y revenons, toutes les fois que le moyen de les avancer par le calcul, & par le raiſonnement, requiert de nouvelles données. La Nature féconde & inépuiſable en productions, aura toujours des replis plus cachés, qui ne ſe dévelopent qu'après ceux qui ſervoient à les voiler & les ſouſtraire à nos yeux.

C'eſt un champ pour de nouvelles découvertes, qui s'étend à perte de vue, & dont l'étendue croit à meſure qu'on s'éleve pour y promener ſes regards.

Je m'y voue, en embraſſant la Claſſe de Phyſique expérimentale, & je devrois le faire, quand même, d'entre ces ſujets innombrables qu'elle offre, je n'en prendrois d'autre que la théorie de la chaleur & du feu, en pourſuivant ce que depuis pluſieurs années j'ai commencé, pour rendre plus complette & ſyſtématique la *Pyrométrie*, où il s'agit de faire, à l'égard des forces du feu & de la chaleur, ce que, depuis *Archimede*, les Mathématiciens & les Phyſiciens ſont parvenus à faire à l'égard des forces mouvantes, & de la nature de l'eau. Occupation vaſte & compliquée, ſi jamais il y en eût! Champ peu cultivé, & inconnu juſqu'aux premiers principes qui y ſervent de baſe! Etude, qui demande une combinaiſon également délicate & difficile des expériences, des calculs, & les notions les plus cachées à nos ſens; ſi l'on veut pénérer à ce qui s'y trouve de ſimple & de premier, & le conduire juſqu'à ces applications que demandent la vie commune, les Manufactures, la Pyrobolique, la Météorologie, la Science de l'économie de la chaleur animale, la Chymie, & tant d'autres branches de la connoiſſance de la Nature. Car y a-t-il un ſeul corps, où les effets & les changemens du chaud & du froid ne ſe remarquent?

DIS-

DISCOURS DE RECEPTION,

OU L'ON TRAITE DES PRINCIPAUX AVANTAGES, QUE LES ACADÉMIES OFFRENT À CEUX, QUI EN SONT MEMBRES;

PAR M. THIEBAULT *).

Les Sciences ſont bien plus étroitement unies qu'on ne le penſe communément: elles ſont comme les branches d'un ſeul & même arbre, comme les membres d'un même corps. De plus, elles tendent à un but qui leur eſt commun: toutes cherchent la vérité; & la vérité eſt une.

Mais cette vérité eſt retenue captive par tant d'ennemis ligués contre ſes amateurs! Des monſtres redoutables défendent le terrain: des ténebres affreuſes l'environnent: Les avenues ſont étroites, difficiles, croiſées à chaque pas par des fauſſes routes bien plus battues que la bonne: pour une ſeule route qui mene au terme, combien qui conduiſent dans des abymes, dans des régions peuplées de ſpectres & de phantômes qui reſſemblent aſſez à la réalité, pour tromper quelquefois les plus clair-voyants & les plus attentifs! Et quel courage, quelle attention, quelle adreſſe, que de ſecours ne faut-il pas pour affronter tant de périls, éviter tant de pieges, & forcer tant d'obſtacles! Qu'il eſt difficile d'y réuſſir! Il l'eſt déjà tant de le bien vouloir! Peut-on prendre de trop grandes précautions, de trop juſtes meſures, contre les préjugés qui ſans ceſſe bourdonnent autour de nous; contre la crainte, la laſſitude, le découragement, la folle préſomption? (L'énumération ſeroit infinie!) Voyons ce qui arrive le

*) Prononcé le 25 d'Avril. On a fait à ce Diſcours les mêmes retranchemens qu'au précédent.

plus ſouvent; & rapportons-nous en à l'expérience. On attaque les préjugés; & l'on tombe dans un autre excés qui éloigne peut-être encore plus du but où l'on doit tendre: on ſe roidit contre l'amour propre, & l'on devient puſillanime; contre la crainte, & l'on devient téméraire. Tel qui ne vouloit qu'éviter le ridicule d'être eſclave des opinions & des uſages des autres hommes, devient cynique. Eloignez vous de Sylla, & toujours vous retrouvez Caribde.

Ajoutez à toutes les autres difficultés, la crainte de cette critique honteuſe & maligne, qui ne reprend pas pour corriger, mais qui mord pour déchirer; de ce talent ſi commun qui n'eſt jamais celui d'un bon coeur, & qui eſt rarement celui d'un eſprit capable de quelque choſe de mieux; de cette critique qui a tant de charmes pour les jeunes gens, & qui ſéduit encore quelquefois les vieillards; de ce vice qui fut toujours à la mode, parce qu'il flatte & conſole l'amour propre; de cet ennemi du vrai mérite, qui ſouvent ne donne pour juges, que de lâches rivaux qui n'oſent entrer dans la carriere.

Ajoutez l'abondance des livres: ſi tous ne ſont pas bons, leur multitude ne porte pas moins à croire que *tout eſt dit:* Au moins prouve-t-elle que le plus aiſé eſt fait. Et pour ce qui eſt un peu plus difficile, on ne ſe flatte pas de faire mieux que tous les autres; & l'on ne veut pas être plagiaire. On ſent qu'il n'y a gueres que le génie à qui une certaine confiance, une certaine hardieſſe aille bien. Mais tous ceux qui, ſans être des génies, ont cependant aſſez de juſteſſe & de ſolidité d'eſprit pour ſentir toutes les difficultés; c'eſt à dire, le plus grand nombre de ceux qui travailleroient avec ſuccès, ne doivent-ils pas être retenus par toutes ces conſidérations? Et pour les animer, malgré tous ces obſtacles, quelle émulation ne faut-il pas exciter dans leur ame?

Mais ne ſéparons pas, Meſſieurs, l'émulation d'avec les ſecours: ſans eux, elle ne produiroit que des efforts infructueux, que des travaux pénibles & ingrats: les ſciences ne ſeroient alors qu'un dédale où l'on s'engageroit imprudemment, & dans lequel on ne pour-

pourroit que s'égarer, faute de ce fil ſecourable qui tient à l'iſſue, & qui dirige tous les pas. Un homme, avec l'étude la plus opiniâtre, ne parviendroit qu'à reſſembler à un enfant encore foible qui s'agite & s'épuiſe pour marcher, & qui ne fait que des chûtes auſſi fréquentes que dangereuſes, parce qu'il n'a perſonne qui lui donne la main. En vain cet homme réuſſiroit-il à s'élever juſque dans les cieux! Nouvel Icare, on le verroit bientôt tomber, faute d'un guide qui lui montrât la route. En vain monteroit-il ſur le char du ſoleil! En vain tiendroit-il les rênes! Nouveau Phaéton, il ne feroit que hâter ſa perte; parce qu'il ſeroit ſeul à conduire des courſiers fougueux qui ne connoîtroient encore ni ſa main, ni ſa voix, & que lui-même ne connoîtroit pas davantage: Il ignoreroit la route dans laquelle il ſe ſeroit engagé; & même la vive clarté dont il ſeroit environné, plus forte que ſes yeux qui n'y auroient point été préparés, lui deviendroit auſſi funeſte que les ténebres.

D'un autre côté, les ſecours ſans émulation, ſans une émulation forte, puiſſante, & ſouvent ranimée, ne ſeroient que des ſecours perdus, qu'un tréſor enfoui, & dont le poſſeſſeur n'oſeroit faire aucun uſage. Ce ſeroient, ſi vous le voulez, des armes d'une bonne trempe; mais entre les mains d'un lâche.

Au reſte, je ne parle pas ſeulement des ſecours que nous peuvent donner ceux qui courent la même carriere que nous: mais je parle principalement de ceux qui réſultent de la réunion de toutes les ſciences. Les ſciences, comme nous l'avons déjà obſervé, quelqu'éloignées, quelque diſtinctes qu'elles paroiſſent être l'une de l'autre, ſe rapprochent & ſe touchent par mille côtés divers, juſqu'à ſe confondre. Il n'en eſt aucune par conſéquent, qui n'ait preſque à chaque pas un beſoin réel, un beſoin preſſant de toutes les autres: d'où l'on peut voir qu'en un certain ſens, le mot *tout ou rien*, n'eſt pas tant la deviſe d'un ambitieux outré, que celle d'un homme d'étude qui veut avoir quelques ſuccès; que quiconque n'eſt pas *tout*, n'eſt effectivement *rien*; c'eſt à dire, que quiconque n'a pas fait au

moins quelques courſes, ou plutôt, quelques voyages, quelques ſéjours dans le pays de chaque ſcience en particulier, n'en poſſede réellement aucune dans une certaine perfection.

En effet, eſt-il quelque ſcience où l'homme de lettres ne puiſſe trouver, & n'aille quelquefois chercher de ces ſujets utiles, agréables, & dignes de toutes les fleurs dont il ſait les parer & les embellir; de ces ſujets qui ne ſortent de ſes mains que pour être l'amuſement le plus noble & le plus parfait des ames délicates, en même tems qu'ils renferment l'inſtruction la plus utile & la plus ſolide? Mais auſſi ne s'acquitte-t-il pas envers les autres ſciences, & ne devient-il pas leur bienfaiteur à ſon tour, par les principes de l'élocution qu'il développe, & dans leſquels il fait ſentir toute l'importance des maximes fondamentales du langage; maximes qui d'abord paroiſſent n'avoir jamais beſoin d'être citées, tant le bon ſens les met à portée de tout le monde; & que cependant l'on feroit bien de répéter ſouvent à bon nombre de ſavants, à n'en juger du moins que ſur l'expérience? Ne s'acquitte-t-il pas en établiſſant & en répandant les loix du ſtyle & du goût; deux qualités eſſentielles à tout auteur, & qui réunies, guident dans le choix & l'ordonnance d'un ſujet, dans la liaiſon & l'expreſſion des détails: le ſtyle & le goût, qui non ſeulement maintiennent de concert l'unité, la variété, la ſymmétrie, la proportion, & tous les principes conſtitutifs de la beauté; mais qui communiquent encore à tout le tableau cet air de vie & de chaleur, qui en fait la perfection: le ſtyle qui forme les traits, & qui diſtribue les couleurs; & le goût qui juge du mérite de ceux-là par leur reſſemblance, & qui meſure le degré de force de celles-ci, en ordonne & limite la variété, en preſcrit les nuances douces & délicates qui les lient en les fondant, & les paſſages rapides qui les font trancher: le ſtyle qui va puiſer dans les tréſors de l'imagination, ces tours & ces expreſſions figurées qui font la richeſſe & l'agrément du langage; & le goût qui examine tous ces ornements au flambeau de la raiſon, n'en conſerve que ceux qui conviennent, préſerve de cette enflure que l'on confond quelquefois

fois avec l'embonpoint, & qui ſouvent eſt un plus grand mal que la maigreur & la ſéchereſſe: le ſtyle qui peint le ſentiment, & rend le ton animé de la paſſion; & le goût qui va ſonder le coeur, pour voir ſi le portrait eſt fidele, & qui porte la ſévérité juſqu'à ſupprimer ce que le coeur ſent réellement, quand il ne devroit pas le ſentir: le ſtyle & le goût qui donnent à un ouvrage cette marche légere, dégagée & ſoutenue, ce mouvement aiſé, naturel & régulier, qui font un des principaux mérites des productions de l'eſprit humain: enfin, le goût qui regle le ſtyle, & le ſtyle qui caractériſe le goût? Ne peut-on pas dire auſſi que l'homme de lettres s'acquitte d'une maniere bien généreuſe, en mettant les découvertes des ſavans à la portée d'un plus grand nombre de lecteurs, & en les enrichiſſant de tous les charmes que l'élocution peut fournir; avantage que les ſavans n'ont pas toujours le loiſir ou le talent de ſe procurer, & qui contribue ſouvent plus à la réputation d'un livre, que l'importance même de la matiere?

N'eſt-ce pas l'Hiſtorien qui apprend aux artiſtes & aux ſavans ce qu'étoient autrefois les objets de leurs travaux & de leurs recherches; quel uſage on a fait des matieres qu'ils emploient; en un mot, quels ont été les progrès, & les variations des ſciences & des arts? Et qui pourroit dire combien cette connoiſſance eſt utile; combien d'idées nouvelles elle fait naître? Mais auſſi l'Hiſtorien pourroit-il juger & faire l'hiſtoire des progrès & des opinions des anciens, s'il ne s'étoit attaché qu'à étudier ſimplement les faits? D'ailleurs, n'eſt-ce pas à la phyſique, qu'il eſt redevable de quelques unes des regles par leſquelles il peut conſtater l'antiquité des monuments? N'eſt-ce pas d'après les calculs que l'Aſtronome nous donne des phaſes de quelques corps céleſtes, de leurs conjonctions, de leurs éclipſes; qu'il peut fixer d'une maniere infaillible les époques les plus reculées & les plus incertaines? N'eſt-ce pas dans les écrits des mêmes auteurs, qu'il apprend ce qu'il doit dire & penſer de ces phénomenes que les anciens appelloient des *prodiges*, & qui ne ſont plus que des *phénomenes?*

nes? N'eſt-ce pas dans les méditations des Philoſophes, qu'il trouve les principes ſur leſquels il doit juger des loix & des abus, des vertus & des vices, des peuples & des rois? N'eſt-ce pas dans les dévelopemens que l'Anatomiſte nous fait de l'organiſation de nos corps, que le Philoſophe ira méditer ſur la nature de l'ame? Quelles lumieres ce dernier ne pourra-t-il pas encore acquérir en comparant les caracteres des nations, les moeurs & les gouvernemens des peuples, avec les diverſes températures & les qualités des climats différens; en combinant les cauſes phyſiques avec les cauſes morales?

Et n'eſt-ce pas dans l'examen de l'évenement le plus commun ſur notre Atmoſphere, de la chûte d'un corps, que Newton apprit à calculer les loix & les degrés des forces combinées qui portent la lune autour de notre globe; qu'il trouva le principe de l'accord permanent qui ſe voit entre les mouvemens de la terre & des cieux? N'eſt-ce pas à des jeux d'enfans, que l'Aſtronome doit ces machines admirables qui étendent ſa vue presque à l'infini; ou plutôt, qui lui donnent d'autres yeux, lui font voir les corps qu'il ne voyoit point, & lui découvrent dans ceux qu'il croyoit voir le mieux, mille choſes qui lui échappoient? Ne fut-ce pas peut-être l'Algebre qui donna au grand Leibnitz, la premiere idée d'une langue univerſelle & commune à tous les ſavans?

Combien de ſciences, d'ailleurs, qui en ſéparent d'autres, tiennent le milieu entr'elles, & ſont également du reſſort des unes & des autres? La Géographie, par exemple, entre la Géométrie & l'Hiſtoire; la Chronologie entre l'Hiſtoire & l'Aſtronomie; la Méchanique entre la Phyſique & les Mathématiques? Les recherches ſur la nature des paſſions de l'homme, & ſur l'inſtinct des animaux, ne ſont-elles pas également du reſſort du Philoſophe & du Phyſicien? La ſanté elle-même n'eſt-elle pas un réſultat du bon état de l'ame, auſſi bien que de l'équilibre des humeurs? En un mot, tout eſt lié dans l'univers: le moral tient au phyſique: l'un & l'autre tiennent à la métaphyſique la plus abſtraite, & à l'aſtronomie la plus ſublime.

Pour

Pour donner encore plus de force aux preuves de cette grande vérité, je ne chercherai point à montrer dans de grands détails, à quoi ſe réduiroit la Science même la plus étendue & la plus féconde, ſi on vouloit élever entr'elle & ſes voiſines, un mur de ſéparation qui bornât la vue, & qui coupât toute communication. Je ne parlerai point des difficultés que l'on y rencontreroit à chaque pas, ni des ronces qui étoufferoient le germe des vérités que cette ſcience doit fournir. En voulant peindre un Hiſtorien ſuperſtitieux ou ſans morale, en un mot ſans diſcernement; un Mathématicien ſec ou diffus, & qui jamais ne ſauroit ramener ſa Théorie à cette pratique qui en fait l'agrément & l'utilité; un Phyſicien ſuperficiel ou ſans vues, ſans cet eſprit de combinaiſon qui rapproche les expériences, & les concilie; un Philoſophe obſcur ou verbeux, ſophiſtique ou ſans ſtyle; un Littérateur qui n'auroit que de l'élégance & des mots; je n'offrirois que des traits inconnus ici, que des copies dont les originaux ſont étrangers. Il convient beaucoup mieux à mon deſſein de revenir aux ſervices que les ſciences ſe rendent réciproquement, quand elles ſont réunies. En parcourant les chefs-d'oeuvre que cette réunion produit, j'aurai l'avantage de ne parler que de ce qui eſt connu du public: la facilité de faire l'application de tout ce que je dirai, ſera un plaiſir que tous pourront partager, & qui doublera l'intérêt. On aime la peinture même foible de ce qui dans la réalité emporte le ſuffrage du coeur & de l'eſprit. D'ailleurs, Meſſieurs, quelle preuve plus lumineuſe des brillans effets que l'émulation & les ſecours produiſent!

Car c'eſt à ces avantages précieux, qu'il faut attribuer l'habileté de ces hommes qui raſſemblent des ſyſtemes oppoſés, recueillent toutes les raiſons qui peuvent ſervir d'appui ſoit, aux uns, ſoit aux autres; leur font ſubir l'épreuve de la confrontation; les mettent, pour ainſi dire, en préſence, tels que des armées ennemies, entre leſquelles ils engagent un combat général, pour mieux découvrir le degré des forces de l'un & de l'autre parti, & s'inſtruire autant par la

défaite de celui-ci que par la victoire de celui-là; à peu près comme on voit, dans un tems orageux, les vents aſſembler les nuages, les condenſer de maniere que d'abord les ténebres s'épaiſſiſſent; mais que bientôt après, la nuée s'ouvre, verſe l'abondance, ſe diſſipe, & nous découvre un ſoleil plus brillant, un ciel plus ſerein; qu'elle nous donne, en un mot, un plus grand jour que nous ne l'avions auparavant.

En remontant à la nature des mêmes ſecours, on ne ſera point ſurpris de trouver dans une Académie où ils ſont ſi heureuſement réunis, des hommes qui, ne paroiſſant occupés qu'à lire ſur les monumens ce qu'ils ne trouvent pas dans les livres; qu'à juger de la vérité des faits plus récents par les preuves qui nous en reſtent, comparées avec une tradition ſoumiſe à la critique la plus judicieuſe & la plus ſévere; qu'à juger des faits plus éloignés, en rapprochant & en confrontant les paſſions, les lumieres, la réputation & les récits des auteurs qui en parlent; des hommes, dis-je, qui ſachent auſſi mettre ces faits en parallele avec les regles éternelles de la vertu, pour en faire ſortir de nouvelles vues ſur nos devoirs, & ſur notre nature; qui ſachent auſſi, en donnant à ces recueils indigeſtes de faits contraires & bizarres, une forme naturelle, un ordre ſuivi, un ſtyle aiſé, pur & décent, en faire le tréſor des ſciences & des arts, l'école des grands & des petits, & la preuve trop peu équivoque des vices des hommes, & des foibleſſes de l'humanité.

Par cette heureuſe réunion de toutes les ſciences en un corps, on voit les ſavans qui recueillent les faits que nous offre le ſpectacle du monde; on les voit forcer adroitement la nature à agir lorſqu'elle paroit morte; découvrir avec ſagacité les opérations qu'elle ſemble vouloir dérober à nos regards; pénétrer juſque dans ſes ſecrets les plus cachés; mais ſurtout ſaiſir le corps entier, pour en mieux connoître chaque partie, & pour en mettre tous les reſſorts au jour. On les voit joindre, mais avec ſobriété, le génie de ſyſtême à celui d'obſervation; répandre partout les vues philoſophiques; lier des phénomenes

menes oppoſés; faire l'hiſtoire de la matiere organiſée, comme de celle qui ne paroit avoir que de l'inertie; de la matiere qui ſe dérobe à nos ſens par ſa fineſſe & par ſa ſubtilité, comme de celle qui par ſa maſſe, ſon volume & ſes couleurs ſe rend ſenſible, viſible & palpable: on les voit ſuivre cette marche ſoutenue de la nature, qui de la collection de tous les êtres, ne fait qu'une eſpece unique & générale, dont tous les individus ne différent entr'eux que par une nuance à peine perceptible: c'eſt par là que ces ſavans parviennent à nous montrer cette affinité qui enchaîne tous les êtres; à développer cette gradation qui conduit depuis les élémens les plus décompoſés & les plus ſimples, juſqu'aux corps organiſés les plus parfaits; depuis l'atôme juſqu'aux cieux; ſans que l'on remarque un point où la ſimilitude ſouffre une altération plus grande, où il ſe faſſe un bond, un ſaut plus conſidérable: en un mot, c'eſt par là qu'ils trouvent entre les qualités variées de tous les êtres phyſiques, cette horreur du vuide, qui n'entraîne pas les mêmes abſurdités que celle des anciens, & qui ne peut au contraire que rendre le ſyſteme actuel plus admirable, & nous en faire mieux concevoir toute la richeſſe.

Sans cette eſpece de communauté des biens, verroit-on ceux qui meſurent l'étendue par les nombres, abrégent les calculs par l'Algebre, repréſentent par des figures ſenſibles l'action réciproque des corps, fixent ſur des lignes immobiles les divers degrés de la viteſſe & la quantité du mouvement, auſſi bien que la durée de ce tems que nous croyons toujours tenir, & qui nous échappe toujours: ceux qui par une route auſſi ſûre qu'étonnante, parcourent l'eſpace compris entre l'infiniment petit & l'infiniment grand, les uniſſent par une ſérie qui abrege la diſtance de l'un à l'autre, qui du moins les met à notre portée, malgré toute la ténuité par laquelle l'un ſe dérobe à nos ſens, & malgré l'immenſité qui défend l'autre contre nos efforts: les verroit-on, dis-je, donner, en s'élevant juſque dans les cieux, des loix générales à tous ces corps lumineux que nous appercevons à peine; les ſoumettre à un ordre ſuivi; les faire ſervir à l'utilité des navigateurs; marquer la liaiſon qui ſe trouve entre la cauſe de leurs mouvemens & celle du mou-

vement de notre globe, l'influence réciproque de leurs atmoſpheres & de la nôtre; trouver, je ne dis pas, dans les accords de la muſique, l'image de l'ordre qui regne entr'eux; mais dans l'ordre de leur cours, dans les loix de leurs mouvemens, des preuves de la puiſſance & de la ſageſſe du Dieu qui les meut & qui les ſoutient?

A quelle autre cauſe devons-nous attribuer les ſuccès de ceux qui prenant un autre ciel pour objet, meſurant une autre ſorte d'étendue, approfondiſſant d'autres ſyſtemes; ſe ſervent auſſi d'autres yeux, d'autres moyens & d'autres inſtrumens; je veux dire, de ceux qui étudient, non point la nature des corps, mais la nature, l'origine, la génération des idées, le ſyſteme des êtres abſtraits; des êtres dans leſquels la figure, le mouvement, les couleurs & les dimenſions ſont remplacées par les qualités, les facultés, les principes d'activité; des êtres qu'on appelle *eſprits*; l'ame humaine, & Dieu l'ame de l'univers? De ceux qui, s'engageant dans des routes ſi éloignées de nos ſens, vont à la découverte d'un monde différent en tout de ce monde viſible; en remarquent les loix; en recueillent les ſingularités; le mettent, pour ainſi dire, à contribution; & reviennent riches de dépouilles; rompent les barrieres qui nous en ſéparoient; & ne font, ſi l'on peut parler ainſi, qu'un même continent de ce nouveau monde & du nôtre? De ceux qui ſondant les profondeurs du coeur humain, en parcourent les détours; en éclairent les abymes; pénétrent dans le labyrinthe des paſſions; diſtinguent les foibles veſtiges de la loi éternelle parmi les traces profondes que les préjugés, l'éducation, l'intérêt, la vanité y laiſſent tous les jours; traces ſans ceſſe multipliées & rafraichies, qui croiſent les veſtiges antiques & reſpectables de la nature, juſqu'à ſe confondre avec eux, & presque juſqu'à les effacer? De ceux qui déchiffrent dans le coeur de l'homme, l'inſcription que le doigt de Dieu y a miſe; qui la déchiffrent malgré la rouille & l'altération que l'ignorance & le tems y ont apportées? De ceux qui nous expliquent la nature des penchants, & la force de l'inſtinct; nous démontrent les notions du devoir, & les principes de la vertu; établiſſent les regles de l'honnête; la légitimité des loix, l'accord de la liberté avec la dépendance & la ſoumiſſion; font connoître l'eſſence du beau & du bon, les fon-

fondemens de la morale de l'homme, de la morale du citoyen, des moeurs & de la politique?

Dans des ſuccès ſi brillants, qui pourroit ne pas voir les avantages de l'Académie, les effets de l'émulation jointe aux ſecours?

Je ſais, Meſſieurs, qu'on pourroit m'objecter que les livres procurent les mêmes avantages, ou du moins y ſuppléent. Mais ils ne les procurent pas tous; & combien de fois n'ont-ils pas beſoin de commentaires pour être entendus? Perſonne ne peut avoir tous les livres; & le ſeul qui manque, eſt ſouvent celui dont on peut le moins ſe paſſer. Les eût-on tous, combien de choſes qu'on n'y trouve point, ou qu'on n'y trouve qu'après avoir eſſuyé l'ennui d'une recherche auſſi longue que rebutante? Quelquefois les livres ne font qu'oppoſer les unes aux autres, des raiſons & des preuves contraires; & finiſſent au moment d'une déciſion que vous cherchez. Quand ils traiteroient en entier de tout ce qu'il vous eſt utile de ſavoir; combien de petites difficultés que l'auteur lui même leveroit ſouvent d'un mot, & que ſon ouvrage ne réſoudra point? Enfin, quelques lumieres que nous puiſſions trouver dans les livres, nous n'y pouvons au moins puiſer qu'une émulation foible & languiſſante: leur langage muet fera toujours ſur nous bien moins d'impreſſion, que des modeles vivans, que nous avons ſans ceſſe ſous les yeux, qui nous parlent, & à qui nous pouvons nous adreſſer avec aſſurance d'être toujours écoutés, & ſouvent pleinement ſatisfaits.

Mais il ſeroit ſuperflu de répondre à de frivoles objections, que perſonne ſans doute ne penſe à me faire.

ELOGE
DE
M. DE PREMONTVAL *).

ANDRÉ PIERRE LE GUAI DE PRÉMONTVAL nâquit à Charenton, le 16 Fevrier, 1716. Il fut fils unique d'un pere qui jouiſſoit d'une fortune aſſez médiocre, mais ſuffiſante pour le faire vivre honnêtement des revenus de ſa Charge. Je commence dès à préſent à ſuivre le fil des Mémoires de ſa propre Vie, que M. *de Prémontval* a publiés; & j'en adopterai même pour l'ordinaire les expreſſions, ne pouvant avoir de meilleur garant de ce que j'ai à dire ſur notre Confrere défunt que lui-même.

Il fut deſtiné à la profeſſion d'Advocat, & s'y prêta d'abord avec ardeur, juſqu'à la Rhétorique qu'il fit avec tout l'éclat & le ſuccès imaginables, ayant fait en François, à l'âge de 15 à 16 ans, ſans le ſecours de ſes Maitres, des Diſcours publics qui furent extraordinairement applaudis. M. *de Prémontval* le pere, rempli des plus flatteuſes eſpérances de voir ſon fils devenir un *Terroſſon*, ou un *Cochin*, lui fit faire deux Cours de Rhétorique; mais, pour regagner le tems qu'ils exigeoient, il vouloit que l'Etudiant ſautât la Philoſophie & paſſât immédiatement au Droit. Ce ſaut pouvoit paſſer pour périlleux, puiſque l'art de parler, s'il n'a pas pour ſoutien celui de raiſonner, expoſe aux plus lourdes chûtes. Auſſi prit-on un tempérament: ce fut de faire commencer à l'Eleve ſon Droit & ſa Philoſophie tout à la fois.

C'étoit le moment que la Nature attendoit pour ſe déclarer. Le jeune *Prémontval*, né Philoſophe, ſe trouva dans ſon élément, dès qu'on lui eût ouvert les portes de l'Auditoire philoſophique, & ne voulut plus en ſortir. Il ne lui fut pas même poſſible de ſe partager:

*) Lû dans l'Aſſemblée du 24 Janvier.

ger: les nouveaux objets qu'il avoit juſqu'alors négligés, parce qu'ils lui étoient inconnus, eurent toutes ſes veilles & ſon application. Son pere ne s'apperçut pas d'abord de cette eſpece d'apoſtaſie; mais il fallut enfin qu'il en fût inſtruit: & comme il étoit d'une humeur violente, le fils prit le parti de lui écrire, du College où il demeuroit, des lettres ſi fortes qu'à la fin elles l'ébranlerent. Il conſentit que ſon fils renonçât à l'Eloquence du Barreau, pourvu qu'il ſe conſacrât à celle de la Chaire, lui ordonnant d'opter entre ces deux partis, ſous peine d'encourir ſon indignation.

De pareils moyens ne pouvoient que produire un effet tout contraire à leur fin. Le pere & le fils ſe reſſembloient trop par la fermeté, & même par la véhémence de leurs diſpoſitions naturelles, pour que l'un pût vaincre l'autre. Soutenu par ſon caractere inflexible, (on ſe ſouviendra, & je n'en avertirai plus, que je parle d'après M. *de Prémontval*,) le jeune homme ne s'allarma point: il tint ferme contre les menaces de ſon pere, & contre toutes ſortes de mauvais traitements. Rebuté pourtant à la fin par leur longueur, il opta pour le parti d'Ingénieur, réſolu d'aller chercher dans ce métier ſi périlleux, ou l'occaſion de ſervir ſa Patrie, ou la fin d'un vie triſte & déſagréable. Madame *de Prémontval* la mere ne contribuoit pas moins que le pere, à jetter leur fils dans cette eſpece de déſeſpoir. Elle exigeoit d'un Ecolier, & d'un Ecolier ſtudieux, qui n'avoit encore aucun uſage du monde, la politeſſe & les manieres d'un homme du bel air; elle avoit l'injuſtice de le mépriſer, de le haïr même, à cauſe que cet extérieur lui manquoit, ſans faire aucune compenſation en faveur de ſa ſupériorité dans un genre plus ſolide.

La demande d'être Ingénieur fut exaucée, mais à cette dure condition, que ſi, dans un an, à compter du jour de l'accord, il n'étoit pas reçu Ingénieur, ou que ſes nouvelles études ne lui euſſent pas procuré un emploi, il ſeroit abandonné à ſa mauvaiſe fortune, & n'auroit qu'à ſortir de la maiſon paternelle pour n'y rentrer jamais. M. *de Prémontval* accepta le défi, bien réſolu de tenir parole à la rigueur. Il s'enferma dans ſa chambre, & ſe mit ſur le pied d'y travail-

vailler quinze à ſeize heures par jour, & ſouvent davantage, pendant le courant de cette année. Les progrès répondirent au travail; mais il en réſulta un mal dont aucun progrès ne ſauroit dédommager, ce fut la ruine du tempérament, & la perte d'une ſanté juſqu'alors floriſſante. La pâleur & la maigreur ſuccéderent à l'embonpoint & aux plus belles couleurs. L'empreinte d'une vieilleſſe prématurée devint ineffaçable; & tous ceux qui, depuis ce tems-là, ont connu M. *de Prémontval*, l'ont cru beaucoup plus avancé dans ſa carriere qu'il ne l'étoit.

Ce qu'il y eut d'accablant, c'eſt que tant de peines furent entierement perdues. Les places d'Ingénieur ſont fort briguées en France; &, malgré le credit de pluſieurs amis, l'aſpirant ne put pas obtenir une ſimple Lettre d'examen: de ſorte qu'il fallut renoncer à toute vue de ce côté-là. On ſe ſouvient de l'arrêt comminatoire dont l'exécution étoit fixée au bout de ce terme. Sans ſignification expreſſe, un redoublement de duretés en tint lieu, & détermina M. *de Prémontval* à quitter la maiſon de ſes parens, n'étant pas encore âgé de 21 ans.

Ici s'ouvre une nouvelle ſcene. M. *de Prémontval* ſachant bien tout ce qu'il avoit appris, ſe crut capable de l'enſeigner, & s'érigea en profeſſeur public. Après s'être eſſayé quelque tems en raſſemblant chez lui de jeunes gens, auxquels il démontroit gratuitement des Cours d'Arithmétique, d'Algebre, & de Géometrie, il loua une Sale publique, & fit répandre dans la ville des Billets imprimés, par leſquels il annonçoit des Leçons gratuites de Mathématiques, trois fois la ſemaine, où la jeuneſſe, & en général des perſonnes de tout état & de toute profeſſion, étoient invitées. Dès cette premiere année le ſuccès fut très grand; & l'on compta chez le jeune Profeſſeur quatre-vint ou cent perſonnes, c'eſt à dire, plus que tous les Profeſſeurs de Mathématiques de Paris enſemble n'auroient pu fournir.

Les applaudiſſemens qui accompagnoient ces leçons, reveillerent le deſir qu'avoit M. *de Prémontval* le pere, de voir ſon fils briller en Chaire ou au Barreau. Il crut réuſſir à lui faire prendre l'un de ces partis en le privant de quelques ſecours pécuniaires qu'il lui avoit juſqu'alors accordés. On comprend bien que cela ne fit qu'achever d'aigrir

grir les choſes, & conſommer la rupture. M. *de Prémontval* demeura privé de tout ſecours; toute union ceſſa auſſi, tout commerce fut rompu entre ſa famille & lui: & il fut plus de deux ans ſans en entendre non plus parler, que s'il eût été rélégué loin d'elle au bout de l'Univers.

Après avoir été réduit à ſubſiſter quelque tems par de legers ſecours que lui procuroient ſes amis, M. *de Prémontval* eut des Ecoliers, & même de la premiere diſtinction, dont les honoraires firent tout à coup changer ſa fortune de face. Il ſe trouva bientôt trop employé. Comme il étoit redevable à ſes Conférences de cette célébrité naiſſante, il crut devoir les reprendre, & y joindre plus d'apparat. Ayant pluſieurs fois changé de demeure, il loua enfin, pour la ſomme de 800 livres par an, un grand appartement & une Sale fort belle, où l'on compta, pendant une bonne partie des deux dernieres années de ces Conférences, plus de quatre cens perſonnes. Dans l'eſpace de près de huit ans, M. *de Prémontval* parcourut les parties les plus conſidérables des Mathématiques, toujours dans un détail où les Profeſſeurs publiés n'ont pas coutume d'entrer, faiſant toutes les ſéances au moins de deux heures, & les pouſſant quelquefois juſqu'à trois. Il traita auſſi la Phyſique tant ſyſtématique qu'expérimentale; & il n'a point fait de cours qui ait été plus conſtamment ſuivi. C'eſt à l'occaſion de ces Conférences que parurent quatre Diſcours par leſquels M. *de Prémontval* fit ſon entrée comme Auteur dans la République des Lettres, & qui ne le firent pas connoître moins avantageuſement que ſes leçons. Ils furent imprimés dans les années 1742 & 1743, & ont pour titre: *Diſcours ſur l'utilité des Mathématiques: De la nature des quantités que les Mathématiques ont pour objet: Notions préliminaires à l'Etude des Mathématiques:* & *De la nature du nombre.*

Je n'entrerai pas dans de plus grands détails ſur cette brillante époque de la vie de notre Académicien. Les Journaux en parlerent plus d'une fois avec éloge; & les Muſes même la chanterent. Il n'eſt pas ſurprenant que M. *de Prémontval* ſe ſoit toujours rappellé d'auſſi agréables tems avec plaiſir, & qu'il nous en ait quelquefois entretenu avec

cette effusion de coeur qui animoit toutes ses expressions, lors-même qu'il ne s'agissoit pas de choses qui le touchassent d'aussi près.

Cependant il n'avoit pas encore éprouvé la plus ravissante de toutes les impressions dont l'homme soit susceptible, surtout lorsqu'elle est excitée par un objet qui réunit tout ce qui peut charmer à la fois les yeux, l'esprit, & le coeur. Pour assister à la naissance de cette intéressante passion, & en voir les accroissemens, il faut reprendre le fil des Conférences. C'est au milieu même des leçons, & tandis que M. *de Prémontval* ne pensoit qu'à démontrer, qu'il reçut une leçon ineffaçable du Dieu qui fait aimer, & qu'il apprit qu'il y a une passion plus vive que celle de la science, une force plus victorieuse que celle des démonstrations.

Marie Anne Victoire Pigeon d'Osangis, aujourdhui Madame de Prémontval, prend ici une place distinguée sur le devant du Tableau que j'ai entrepris de tracer; son histoire devient intimement liée à celle de M. *de Prémontval*, par la conformité de leurs talens & de leurs sentimens, qui ne tarda pas à produire l'union de leurs coeurs, suivie enfin de celle de leurs personnes par ce noeud que la mort a seule le pouvoir de rompre.

Cette aimable personne étoit fille de M. *Pigeon*, très habile Méchanicien & Astronome, Membre de la Société des Arts, célebre par la construction d'une magnifique Sphere mouvante selon l'hypothese de Copernic. Se trouvant l'ainée des onze enfans que son pere avoit eus dans un âge avancé, sa jeunesse fut employée à servir ce respectable Vieillard, & à élever cette famille en bas âge. M. *de Prémontval* fut conduit chez M. *Pigeon*, par le même motif qui y attiroit alors tout ce qu'il y avoit à Paris d'Etrangers & de Citoyens lettrés, l'envie de voir la Sphere. Mademoiselle *d'Osangis* étoit alors dans la premiere fleur d'une brillante jeunesse, entre 16 & 17 ans. L'impression qu'elle fit sur M. *de Prémontval* ne fut pourtant pas celle de ce premier coup d'oeil qui enflamme. Pendant environ deux ans, la liaison commencée dans cette premiere visite continua sur le pied de l'amitié. Les deux ou trois années suivantes virent l'ami devenu Tuteur, ou Maître, & même un Maître que le Public accusoit d'être bien austere. Je suis obligé, faute

de

de tems, de renvoyer ici aux Mémoires. On y verra la jeune Eleve ſe former d'abord, par une application incroyable, en peu de mois, de maniere à ſaiſir tout ce que l'Arithmétique, l'Algebre, & la Géométrie, ont de plus épineux; & cela par la méthode la plus rebutante, à cauſe des difficultés affectées pour éprouver ſa conſtance. On la verra enſuite aſſiſter aux leçons publiques avec d'autres Dames; & enfin, y parler de la maniere la plus propre à ſe faire écouter. Eſt-il beſoin de dire combien ce nouveau Docteur attira de ſpectateurs & d'auditeurs? Mais hâtons-nous de venir au dénouement.

Le Maitre & le Tuteur diſparurent pour faire place à l'Amant. La gravité, la ſévere exactitude, les diſcours auſteres, pouvoient rendre moins aimable; mais ils ne purent garantir d'aimer. Heureuſement le coeur du Maitre & celui de l'Eleve ſe trouverent également pris. Il falut pourtant une occaſion déciſive pour amener la déclaration. Le poſte d'Inſtituteur du fils du Prince de *Moldavie* fut propoſé à M. *de Prémontval.* Ce fut pendant que cette affaire ſe traitoit, & qu'il attendoit de moment à autre l'heure de ſon départ, que ne pouvant plus ſoutenir le feu qui le dévoroit, il prit enfin la réſolution de le laiſſer éclater. L'affaire échoua; mais le feu ne s'éteignit point: tout au contraire il ne fit que s'accroître.

Depuis cette époque, M. *de Prémontval* paſſa encore dix-huit mois à Paris, mais dans une ſituation violente. Il avoit eu de bonne heure des ennemis, dont le nombre & l'animoſité s'accrurent dans les derniers tems d'une maniere exceſſive. Il aſſure qu'il ſe vit vint fois ſur le point de ſuccomber ſous des embûches de toute eſpece, & que tout ſembloit avoir conjuré ſa perte. Il y a ſans doute de la réalité dans ces aſſertions; mais nous ſavons que M. *de Prémontval* ſe repréſentoit quelquefois trop fortement les objets, que ſon imagination ardente les groſſiſſoit, & que l'énergie de ſes expreſſions alloit au moins de pair avec la vivacité de ſes ſentimens.

Ceux qui lui en vouloient, étoient, ſelon lui, quelques Profeſſeurs, & la plûpart des Maitres de Mathématiques, qui portoient envie à l'éclat de ſes Conférences; c'étoit la Cabale Jéſuitique, déchaînée par des raiſons auxquelles nous reviendrons tout à l'heure; c'étoient

enfin les partiſans de M. *Rollin*, traité avec peu de ménagement dans *l'Eſprit de M. de Fontenelle*, qui venoit de paroître, & l'Abbé *des Fontaines*, qui, s'étant reconnu dans le même Livre, valoit bien ſeul une Légion d'adverſaires. Au reſte cet *Eſprit de Fontenelle* eſt une des meilleures collections de ce genre qui ayent été faites: il faloit bien de l'eſprit, & du meilleur, pour ſaiſir & rédiger ainſi celui du plus ſpirituel, peut-être, de tous les Ecrivains.

Les Jeſuites, ſi puiſſans & ſi redoutables alors, s'étoient apperçus que M. *de Prémontval* qu'ils avoient eu pour diſciple, n'étoit pas des plus attachés à l'Egliſe Romaine; car, dans plus d'une occaſion, il avoit non ſeulement laiſſé tranſpirer de ſimples doutes, mais il avoit donné l'eſſor aux objections les plus hardies. Cependant il auroit pu devenir ſuſpect, ſans être formellement haï & perſécuté, s'il n'avoit eu une Controverſe avec le plus accrédité des Membres de la Société, & n'eût compoſé à cette occaſion un Ecrit, dont le titre ſeul ne permet pas de douter combien il dut déplaire. Ce ſont les *Lettres contre le Dogme de l'Euchariſtie, tel qu'il eſt enſeigné par l'Egliſe Romaine, adreſſées en* 1735 *au fameux Pere* Tournemine *Jéſuite, par* André Pierre le Guaï de Prémontval, *pour lors âgé de* 19 *ans, Etudiant en Philoſophie au College du Pleſſis Sorbonne à Paris.* Quelque raiſon que pût avoir le jeune Antagoniſte dans le fond même de la diſpute, il paroiſſoit avoir trop de tort dans la maniere de l'expoſer, pour que cette démarche ne lui fût pas imputée à titre de pé hé irrémiſſible.

Dans une pareille criſe le plus ſûr étoit de s'éloigner; & c'eſt auſſi le parti que prit M. *de Prémontval*. Mais déjà uni par des liens, ſinon ſacrés, du moins indiſſolubles, avec l'objet auquel étoit attaché le bonheur du reſte de ſa vie, les deux Amans quitterent Paris enſemble, & partirent à pied, n'emportant pour toute reſſource qu'une ſomme très modique, provenue de la vente de leurs meilleurs effets. M. *de Prémontval* avoit pris un paſſeport pour un domeſtique & pour lui. Le domeſtique fut ſa tendre compagne juſqu'à Geneve, où elle prit la qualification de Neveu, juſqu'à ce qu'elle eût acquis celle d'Epouſe. Les riſques & les fatigues de ce voyage figu-

re

reroient dans un Roman, & y exciteroient l'intérêt le plus attendriſſant. On en trouve le détail dans les Mémoires de Mr. *de Prémontval*, qui a jugé à propos de les enveloper ſous le voile d'un récit allégorique.

Arrivés à Geneve dans l'Eté de 1744. le couple fidele quitta cette Ville pour aller à Bâle vers la fin de Décembre. Ils furent deux ans errans de Ville en Ville, & gagnerent leur vie en donnant des leçons à la jeuneſſe. L'idée de leurs beſoins n'étoit pas celle qui les affectoit le plus; ils aſpiroient avec ardeur à ſerrer ſolemnellement les noeuds de leur union au pied des Autels: & après avoir ſurmonté divers obſtacles, ils eurent enfin cette raviſſante ſatisfaction. Ce fut le digne Mr. *Buxtorff*, Paſteur de Bâle, qui leur donna la bénédiction nuptiale, à *Locrach*, petite Ville d'Allemagne, diſtante de Bâle de deux lieues, ſur les terres & ſous l'autorité de S. A. S. Monſeigneur le Prince de Bade Dourlach, le 30 Juin, 1746. Ils avoient abjuré précédemment les erreurs de l'Egliſe Romaine pour ſe ranger au Proteſtantiſme. On s'empreſſa de tendre une main ſecourable à des Proſélytes de l'acquiſition desquels on avoit tout lieu de ſe féliciter. Ils trouverent dans Mr. d'*Eſchiſchens* un Patron généreux dont leur coeur reconnoiſſant n'a pas négligé d'exalter les bienfaits. Mrs. *Bernoulli*, dont le nom ſeul a toujours fait l'éloge, paroiſſent auſſi avec diſtinction dans la liſte de ces illuſtres Bienfaiteurs que Mr. *de Prémontval* a lui-même placés au Temple de Mémoire.

Le plus long ſéjour de Mr. *de Prémontval* en Suiſſe a été dans la Ville de Morges, où il fut chargé de fonctions publiques. Il adreſſa un Diſcours aux Citoyens de cette ville en Septembre 1741. Il étoit à *Eſchiſchens* le 16 Fevrier 1749. Il a daté la troiſieme Partie de ſes Mémoires de ce lieu, & de ce jour auquel finiſſoit ſa trente-troiſieme année. Et c'eſt ici où je perds le ſecours de ces Mémoires qui ne s'étendent pas plus loin.

Des raiſons dont le détail ne m'eſt pas ſuffiſamment connu, engagerent Mr. & Me. *de Prémontval* à quitter la Suiſſe, & à paſſer en Hollande. Ils arriverent à la Haye le 17 Septembre 1749, & y ont toujours ſéjourné, à l'exception d'une quinzaine de jours paſſés à Amſterdam. Les talens diſtingués & les qualités eſtimables de Mr. & de

Mme. *de Prémontval* les firent bientôt connoître & rechercher. Ils eurent des amis & des protecteurs; & les disciples ne leur manquerent pas. Tous les états ressembloient pour eux à l'abondance, parce que disposés naturellement, & exercés par un long usage, à une frugalité qui n'en cédoit rien à celle qu'on admira le plus dans quelques Philosophes de l'Antiquité, ils avoient très peu de besoins, & encore moins de desirs.

Ce fut peu après son arrivée en Hollande que Mr. *de Prémontval* fit imprimer les Mémoires dont nous avons déjà fait plus d'une fois mention, & qu'il répandit le Projet d'un Ouvrage, déjà fort avancé quant à la composition, mais dont la publication n'a été terminée que depuis son arrivée à Berlin. C'est *la Monogamie*, dont je donnerai le plan dans les propres termes de l'Auteur. „Je fais voir, dit-il d'a„bord, sur quelles autorités de l'Ecriture toutes les Sectes Chrétien„nes, peut-être sans le savoir, s'accordent à rejetter la Polygamie. „Ensuite, je prouve combien les ennemis du Christianisme ont tort „de nous reprocher l'abolition de cet usage. Pour cela, j'étale aux „yeux toute l'injustice & toutes les conséquences funestes de la plura„lité des femmes, dont l'une des moindres est d'être aussi contraire à „la propagation qu'on croit communément qu'elle y est favorable: ce „que je démontre, tant par le raisonnement que par l'expérience, & par „l'exemple même de la Chine, que les Incrédules objectent sans cesse „avec une hauteur que j'espere rabaitre un peu. Je répons aussi à tou„tes les difficultés qu'ils opposent, & surtout à celle des transmigrations „des Peuples du Nord, qui, n'ayant cessé que depuis l'introduction „du Christianisme chez ces Peuples, semblent prouver qu'ils sont de„venus moins nombreux, & cela par l'abolition de la Polygamie. En„fin, je mets les choses dans un tel jour que, bien loin d'avoir servi la „Religion, je lui aurois porté le coup le plus terrible, si je ne faisois „voir le parfait accord de l'Ancien Testament sur cet article avec le „Nouveau, en démontrant sans réplique que, bien loin que la Loi de „Nature, & celle de Moïse, ayent jamais toléré ce pernicieux & dé„testable usage, elles l'ont condamné d'une maniere encore plus expres„se que n'a fait le Christianisme." Il y a dans cet Ouvrage, comme

dans

dans tous ceux du même Auteur, des choſes bien vues & bien préſentées; mais il y manque une eſpece de dénouement, ou de derniere ſolution, qu'il avoit promiſe, & qu'il n'a pas donnée.

Une mépriſe aſſez ſinguliere fit enfanter à Mr. *de Prémontval*, pendant ſon ſéjour en Hollande, une brochure dont je ne crois pas même devoir rapporter le titre. La plûpart des démêlés réels entre les gens de lettres méritent de reſter enſévelis dans l'oubli: à plus forte raiſon les démêlés imaginaires.

Quels que ſoyent les agrémens qu'offrent les Provinces-Unies à ceux qui les habitent, & en particulier à ceux qui cultivent les Lettres, Mr. *de Prémontval* tournoit ſes vues de divers autres côtés; & elles commençoient à ſe fixer ſur l'Angleterre, qui a toujours eu beaucoup d'attraits pour ceux qui aiment la liberté de penſer. Il y avoit cependant une contrée où il lui convenoit encore mieux d'achever ſa carriere. C'eſt celle qui a le bonheur de vivre ſous la domination d'un Monarque, plus grand encore par ſes lumieres & ſes vertus que par ſon rang & ſes exploits. Notre Académie en particulier, depuis ſon renouvellement, offroit à Mr. *de Prémontval* une Compagnie où il ſeroit à portée de mettre ſes talens en pleine valeur. Mais il faloit quelques facilités à venir former ici un établiſſement; & voici celles qui applanirent la route.

Madame *de Prémontval* avoit eu l'honneur, & ce qui vaut encore mieux, le bonheur de faire la connoiſſance de Madame la Comteſſe *de Kamcke* à la Haye, chez Madame l'Ambaſſadrice Comteſſe *de Golowkin* ſa mere, & de l'y voir presque journellement. L'état des Epoux étoit alors aſſez triſte, n'ayant rien de fixe, & ne vivant que de quelques leçons. Madame *de Kamcke*, qui avoit conçu pour Madame *de Prémontval* des ſentimens conformes au mérite de l'une & de l'autre, prit un tendre intérêt à cette ſituation, & propoſa à Mr. & à Mme. *de Prémontval* de s'adreſſer à quelque ami puiſſant à Berlin, au cas qu'ils y en euſſent. Madame *de Prémontval* ſe rappella auſſi-tôt que Mr. *de Maupertuis* étoit ſouvent venu chez ſon pere, & l'y avoit vue fort jeune. Guidée donc par les conſeils de la Comteſſe, elle écrivit à notre Préſident, demandant une place pour ſon Epoux. Mr. *de Maupertuis* répondit de la façon

çon la plus obligeante, assurant qu'il en parleroit à S. M. Peu de tems après, une seconde Lettre fit connoître que la tentative n'avoit pas réussi, & qu'il falloit prendre patience. Un an s'écoula sans entendre parler de rien; mais, au bout de ce terme, il vint tout à la fois des Lettres de Madame la Comtesse & de Mr. *de Maupertuis*, qui offroient à Madame *de Prémontval*, de la part de S. A. R. Monseigneur le Prince HENRI, une pension de deux cens écus, & quatre cens écus pour le voyage. Sous de si glorieux auspices, Mr. & Mme. *de Prémontval* partirent de la Haye le 14 Fev. 1752, & furent accueillis à Berlin, comme ils l'auroient mérité indépendamment de toute considération externe. Mr. *de Maupertuis* en particulier, qui étoit aussi propre à juger du mérite que disposé à le favoriser, ne tarda pas à ouvrir les portes de l'Académie à Mr. *de Prémontval*, qui fit son Discours de réception le 6 de Juillet de la même année.

Ce nouvel état fournit de nouvelles vues au nouvel Académicien. Quoiqu'il eût fait jusqu'alors de la Philosophie son principal objet, il n'avoit pas eu occasion de se mettre au fait d'une des doctrines, qui sont aujourdhui du nombre de celles qu'on peut appeller régnantes, & qui a l'Allemagne pour siege de son empire, c'est celle de *Leibnitz*. Attaché à la Classe de notre Académie qui a pour objet la Philosophie spéculative, il se jetta, pour ainsi dire, à corps perdu dans les abîmes de la Métaphysique, & porta partout une sonde qu'il manioit avec beaucoup de dextérité. Cherchant le foible des hypotheses les plus accréditées, il savoit l'exposer avec beaucoup de force; & il rencontroit peu d'édifices qu'il n'ébranlât à force de les sapper. Frappé de la multitude d'assertions gratuites, d'inconséquences, d'équivoques, de fausses vues, qui regnent dans les Ouvrages qu'on regarde comme les plus philosophiques, il auroit voulu les détruire, les pulvériser en quelque sorte, afin d'élever sur leurs ruines un Temple simple & majestueux à la Vérité. C'est au moins ainsi qu'il nous a toujours annoncé ses entreprises; & il faut avouer qu'il tenoit une bonne partie de ce qu'il promettoit. Personne ne savoit mieux que lui suivre le fil d'une analyse, manier les distinctions, & tirer quelquefois l'or de la boue, mais beaucoup plus souvent la boue de ce qui avoit jusqu'alors passé pour de l'or.

Deux

Deux choſes ſeulement empêchoient que ſes recherches ne produiſiſſent tout l'effet dont elles étoient ſuſceptibles. La premiere, c'eſt que s'y livrant d'abord avec une extrême ardeur, qui étoit chez lui ce que la verve eſt chez les Poëtes, il ne pouvoit s'en occuper qu'autant que cette verve duroit ; de ſorte que, lorsqu'elle ne le ſoutenoit pas jusqu'au bout, l'ouvrage demeuroit imparfait. Nous l'avons remarqué à l'égard de ſa Monogamie ; & c'eſt le cas de pluſieurs autres de ſes Ecrits. Le ſecond inconvénient qui traverſoit ſes ſuccès, c'eſt que ne pouvant presque travailler de ſang-froid, (& en diſant cela, je ne fais que répéter ce qu'il a ſouvent déclaré,) il s'exagéroit trop fortement à lui-même l'importance des matieres qu'il traitoit, ou les défauts des Ouvrages dont il faiſoit l'objet de ſa critique. Au lieu de s'en tenir à ce conſeil que dicte l'humanité, & peut-être encore plus l'amour propre ſuffiſamment éclairé ; *Non ego paucis offendar maculis :* il vouloit du parfait à la rigueur, & ne rabattoit abſolument rien de ſes prétentions. Mais, ſi après avoir tant détruit, il avoit aſſez vêcu pour édifier, il auroit vu ſans doute que ceux qui ont réuſſi dans ce genre méritent de l'indulgence, & que le meilleur Ouvrage n'eſt jamais un Ouvrage accompli, mais ſeulement celui qui a le moins de défauts ; *optimus*, dit le même Oracle, *qui minimis urgetur vitiis.* Quoiqu'il en ſoit, les productions de Mr. *de Prémontval* étoient recommandables à pluſieurs titres ; le fond en offroit toujours du neuf, de l'intéreſſant ; on y voyoit la pénétration alliée à la profondeur : & la forme même attachoit par un ton d'enthouſiasme philoſophique, d'où naiſſoient pluſieurs tours originaux. Les *Penſées ſur la Liberté*, le *Traité du Hazard ſous l'Empire de la Providence*, & *le Diogene de d'Alembert, ou Penſées libres ſur l'homme*, parurent en 1754. Le dernier de ces Ouvrages fut réimprimé en 1755. augmenté de près d'un tiers.

Dans cette derniere année, Mr. *de Prémontval* fut diſtrait de ſes études par une eſpece de procès au ſujet de l'éducation d'un enfant qu'il avoit comme adopté, dans le deſſein de l'initier aux connoiſſances dont il le trouveroit capable. Le Factum qu'il publia ſur ce ſujet eſt propre à juſtifier l'extreme deſir que Mr. *de Prémontval* le pere auroit eu de pouſſer ſon fils au Barreau.

La Métaphyſique reprit le deſſus; & notre Académicien raſſembla pluſieurs Pieces rélatives aux objets de cette Science, dont il forma deux Volumes, ſous le titre de *Vues philoſophiques, ou Proteſtations & Déclarations ſur les principaux objets des connoiſſances humaines.* Ils furent imprimés à Amſterdam, en 1757. Il y eſt principalement queſtion du Leibnitianisme & du Wolfianisme, dont les principales doctrines excitoient dans Mr. *de Prémontval* un ſentiment qui tenoit de l'indignation. Il vouloit frapper de grands coups; mais il ne faiſoit pas toujours attention qu'en y mettant trop de force, il en diminuoit l'effet, parce qu'il faiſoit ſoupçonner quelque paſſion. Il penſoit auſſi, (& ce deſir eſt très légitime en ſoi,) à ſe faire une réputation, ou à augmenter celle qu'il poſſédoit déjà. Mais c'eſt un de ces cas où il faut paroître demander le moins pour obtenir le plus. Au fond perſonne ne ſavoit mieux que Mr. *de Prémontval*, ce qu'il y a de fortuit & de capricieux dans les réputations; il a fait là deſſus quelques morceaux pleins de génie & de fineſſe.

Mr. *de Prémontval* étoit un Académicien zélé & laborieux; toujours livré à la méditation, toujours enfoncé dans ſon Cabinet, il n'en ſortoit presque que pour nous entretenir; & il auroit été difficile de ne pas l'écouter, tant il mettoit d'action dans ſes lectures, & ſavoit faire paſſer le feu dont il étoit rempli dans l'ame de ſes Auditeurs. Nos Mémoires contiennent pluſieurs de ſes Diſſertations; & l'on inſérera celles qui n'ont pas encore paru dans les Volumes dont l'impreſſion vient de recommencer, & ſera continuée ſans interruption.

Je me rappelle auſſi qu'il a eu part à un Ouvrage périodique qui paroiſſoit à Berlin, & qui avoit des Auteurs d'un mérite diſtingué.

M. *de Prémontval* ſembla changer d'objet vers la fin de l'année 1758. Il répandit l'annonce d'un nouvel Ouvrage, où il ſe propoſoit de maintenir les prérogatives & la pureté d'une Langue qui a en effet de très grands avantages ſur la plûpart des autres, & qui a fourni des chefs-d'oevre presque dans tous les genres. Il eſt naturel qu'une ſemblable Langue s'altere dans des lieux éloignés de ſon ſéjour natal, & que des Ecrivains qui ne l'ont pas appriſe en naiſſant, & puiſée à ſa ſource, s'écartent, tantôt de ſes régles, tantôt de ſon génie. Je ne ſai

pour

pourtant ſi ce n'eſt pas en France même qu'il faudroit aller chercher les premieres cauſes de la corruption de la Langue Françoiſe ; au moins ſeroit-on tenté de le croire, quand on lit les vifs reproches que les meilleurs Ecrivains & les Critiques les plus eſtimés ne ceſſent de ſe faire les uns aux autres ſur ce ſujet, au ſein de la Nation, & au milieu de la Capitale. Quoiqu'il en ſoit, le projet du *Préſervatif* étoit judicieux, l'exécution pouvoit en être utile, & elle étoit très bien entre les mains de Mr. *de Prémontval*, qui avoit ſoigneuſement étudié les plus habiles Grammairiens, & qui, joignant les connoiſſances philoſophiques aux connoiſſances grammaticales, avoit par là une ſupériorité bien marquée. Il y auroit de l'affectation à paſſer ici ſous ſilence la part que j'eus, contre mon attente, à cet Ouvrage, & la place que j'y occupai. J'ai toujours été dans l'idée que je n'avois, ni aſſez de célébrité pour qu'on dût ſe borner à inſtruire le public à mes dépens, ni aſſez de défauts pour être immolé comme victime à la Critique. Mais j'en dis plus dans ce moment que je n'en ai dit pendant toute la publication du *Préſervatif*, où je me ſuis impoſé la loi du plus parfait ſilence, & où mon coeur lui-même, quoiqu'il dût ſembler ulcéré, s'eſt tû, puisque je n'ai jamais ceſſé d'eſtimer non ſeulement dans Mr. *de Prémontval* l'Ecrivain, mais même d'aimer l'homme. A la fin j'ai eu la ſatisfaction de l'en voir convaincu, & de le ſerrer dans mes bras auſſi cordialement qu'il s'y eſt jetté. Pourquoi faut-il que j'aye ſi peu joui de ce retour ?

Le *Préſervatif* avoit changé d'objet aſſez longtems avant le fait que je viens d'indiquer. Mr. *de Prémontval* y fit entrer ſes idées ſur l'éducation, parce qu'ayant des talens décidés pour former la jeuneſſe, il avoit conſenti à ſe charger de quelques Eleves, & que, ſuivant ſa coûtume, il s'étoit livré & conſacré tout entier à ce travail. On a vu avec étonnement les progrès que de jeunes gens d'un naturel très différent ont fait ſous ſa direction, & ſous celle de Madame ſon Epouſe, dont les talens & le caractere combinés avec les ſiens formoient le juſte tempérament propre à produire une éducation d'un ordre auſſi diſtingué. Les examens de ces Eleves, faits en préſence des perſonnes les plus capables d'en juger, ont excité des applaudiſſemens auſſi vifs que ſin-

ceres. C'eſt ce qui donna lieu à Mr. *de Prémontval* de remonter aux premiers principes de cet art, le plus intéreſſant de tous, & de mettre au creuſet ce qu'en avoient dit les Auteurs les plus célébres dans ce genre. C'eſt le ſujet des derniers Diſcours qu'il a lûs dans nos Aſſemblées, & des dernieres Parties du *Préſervatif.* Toujours vigoureux dans ſes attaques, il ne portoit gueres de coups à faux; mais il ſe mettoit ſouvent hors de meſure par la maniere dont il les portoit.

Tant de force annonçoit une longue vie ; mais elle pouvoit auſſi en préſager la fin. Mr. *de Prémontval* avoit perdu, comme nous l'avons vu, dès l'entrée de ſa carriere les ſecours qu'un tempérament très heureux auroit pu lui fournir jusqu'à la vieilleſſe, s'il avoit ſu le ménager. Depuis ce tems là, (comme il l'a ſouvent répété de vive voix & par écrit,) il n'a rien fait qu'avec effort, aux dépens de ſa tête, de ſes yeux, de ſon ſommeil. Cet effort multiplié par celui que produiſoient ſa façon d'enviſager les objets & ſa facilité à ſe paſſionner, ne pouvoit que devenir ruineux. Il avoit le foible de croire qu'on le haïſſoit, qu'on vouloit lui nuire, qu'on cabaloit même contre lui, (ce ſont les derniers mots de ſa derniere lecture à l'Académie,) tandis qu'on étoit très diſpoſé à l'eſtimer & à l'aimer, à l'obliger & à lui rendre ſervice. Je ne ſai ſi la fermentation de toutes ces idées a eu quelque influence ſur la maladie imprévue à laquelle il a ſuccombé; mais, le Samedi 18 Aouſt, après avoir dîné chez Mr. le Prince *Dolgorucki*, il rentra chez lui legèrement indiſpoſé, & le mal ayant fait des progrès les jours ſuivans, avant qu'on eût pu y porter obſtacle, ou plutôt parce qu'il ſe refuſa lui-même aux premiers ſecours de l'art, une fievre inflammatoire prit ſon ſiege dans le cerveau, & ne lui laiſſa presque plus aucun intervalle de liberté d'eſprit. Après quelques jours paſſés dans une léthargie à peu près continuelle, il mourut le 2 Septembre 1764, dans ſa 49 année. Il ne laiſſe point d'autre poſtérité que celle de ſon eſprit; mais, s'il a du regretter quelque choſe ici bas, c'eſt la ſociété délicieuſe d'une Epouſe, qu'on peut inconteſtablement appeller ſon plus bel Ouvrage.

ELOGE

ELOGE

DE

M. LE BARON DE DANCKELMANN *).

Ce n'eſt pas ſimplement pour ſuivre un uſage reçu que nous commençons par l'extraction du digne Miniſtre que l'Académie ſe félicite d'avoir compté au nombre de ſes membres; & en parlant de la famille *Danckelmann*, je n'ai pas deſſein de vous préſenter un ſimple Arbre Généalogique. Ce ſera plutôt cet Arbre dont une Lyre inſpirée a dit qu'il étoit planté au bord des eaux courantes, qu'il rendoit du fruit en ſa ſaiſon, & que ſon feuillage ne ſe flêtriſſoit jamais. S'il y eût jamais une tige & des rameaux qu'on puiſſe reconnoitre à ces caracteres, c'eſt ici que nous les rencontrerons. Je ne remonterai point pourtant à la tige proprement dite. On la trouve en Weſtphalie, où les *Danckelmanns* étoient déjà fort conſidérés parmi l'ancienne Nobleſſe, avant que la Cour Electorale de Brandebourg fût témoin d'une eſpece de prodige dont le ſouvenir mérite d'être tranſmis à la poſtérité la plus reculée. C'eſt de voir ſept freres occuper en même tems les charges les plus importantes de l'Etat, n'en être redevables qu'à leur mérite, les exercer avec autant de fidélité que de capacité, & ſe montrer plus grands encore dans les revers que l'envie leur ſuſcita que dans leur élévation. Ce fut pendant le brillant période de celle-ci qu'un des plus habilles Médailleurs d'alors, *Raymond Faltz*, grava une Médaille, où l'on voit d'un côté les Pleïades dans le firmament, avec ce mot d'*Horace*, *Intaminatis fulget honoribus*, & au revers cette Inſcription: *Pleïadi fratrum qui Principi Opt. Max.* FRIDERICO III. *Elect. Brand. ſe ſunque omnia priſca ſolduriorum lege devoverunt.* Le célebre Profeſſeur à Goettingue, M. *Jean David Koehler*,

*) Lu dans l'Aſſemblée publique du 6 Juin.

en donnant l'explication de cette Médaille, a rapporté toutes les particularités hiſtoriques qui ſervent à faire connoitre Meſſieurs les ſept freres *de Danckelmann*; & je renvoye ceux qui veulent s'en inſtruire à l'Original Allemand, ou à la traduction que j'en ai donnée en 1740. Je n'ai pas plus de tems qu'il ne m'en faut, ſi je veux demeurer dans les bornes ordinaires des Eloges académiques, en m'attachant à bien faire connoitre l'objet de celui-ci.

Charles Ludolphe, Baron de Danckelmann, Miniſtre d'Etat & de Guerre, Chef du Departement Eccléſiaſtique, Préſident du Conſiſtoire ſupréme Luthérien, du Directoire des Egliſes Reformées, du Conſiſtoire de la Marche Electorale, du Directoire des Egliſes des pauvres, de celui de l'Egliſe du Dôme & du College de Joachim, Curateur en chef & Directeur de toutes les Univerſités & de tous les Colleges, auſſi bien que de la Bibliotheque, Préſident du Conſiſtoire ſupérieur françois, du grand Directoire François, & du Mont de piété, Seigneur héréditaire de Lodersleben, Ophauſen, & autres lieux, Honoraire de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres, nâquit à minuit entre les mois de Septembre & d'Octobre 1699. v. ſt. de *Nicolas Barthélemi*, Baron de *Danckelmann*, Miniſtre d'Etat du Roi, & Préſident de la chambre des Finances du Duché de Magdebourg, Baron de *Prangin*, *dans* le païs de *Vaux*, Seigneur de *Siſpitz*; & de *Sophie Magdelaine de Brömſe*, Dame de *Burggrube*, Terre immédiate en Franconie, acquiſe depuis par le Prince *de Schwartzemberg*. M. *de Danckelmann* le pere étoit le ſixieme Aſtre de la Pleïade dont nous avons parlé; le plus rayonnant avoit été le quatrieme, *Eberhard*, premier Miniſtre & grand Préſident, mort en 1721, à l'âge de 79 ans.

La fécondité de Madame *de Danckelmann* lui couta la vie. Elle avoit eu trois fils & trois filles avant *Charles Ludolphe*, & elle mourut le 4 Juin en couche d'une fille, qui a été mariée en 1728 à *Jean George* Comte de *Solms*. Les trois Freres ainés de M. *de Danckelmann* ayant payé le tribut encore avant leur Mere, il ſe trouva fils uni-

unique avec trois ſoeurs ainées, qui ſont mortes toutes trois à l'âge de 26 ans, la premiere & la troiſieme ayant été mariées ſucceſſivement à *Jean Adam*, Baron *d'Ende*, Conſeiller à la Régence de Magdebourg & Capitulaire de la Cathédrale d'Halberſtadt; & la ſeconde à *Philippe Antoine de Grumkow*, Miniſtre d'Etat, premier Préſident de la Poméranie, & Chevalier de l'Ordre de l'Aigle noire.

L'éducation de M. *de Danckelmann* fut confiée en 1708 à M. *Heinius*, depuis Conſeiller Provincial de Poméranie & Sindic de Colberg, frere ainé de M. le Docteur *Heinius*, l'un des Directeurs de l'Académie, & Recteur du College de Joachim, qui ne recevra peut-être jamais d'éloge plus touchant pour lui, & mieux mérité, que celui que je vais copier d'un Manuſcrit original de M. *de Danckelmann*, que j'ai ſous les yeux, & qui me guide dans la compoſition de cet éloge, mais ne me conduira pas juſqu'à la fin. „Le Docteur *Hei-*„*nius*, dit l'illuſtre défunt, ayant été appellé quelques années après „en qualité de Profeſſeur à Halle, je profitai des inſtructions de ce „Savant ſolide, qui depuis ce tems-là m'a toujours conſervé ſon ami-„tié." Heureux & remarquable effet de la ſolidité de l'eſprit & des connoiſſances, qui décide de celle des ſentimens & des liaiſons!

En 1711 M. *de Danckelmann* le pere envoya ſon fils avec ſon gendre le Baron *d'Ende* à *Torgau* pour y aſſiſter à la célébration du mariage du Czarowitz avec la Princeſſe de Brunſwick-Blanckenburg. Le coup d'oeil de cette ſolennité ne pouvoit être plus brillant. Outre le Czar & la Reine de Pologne, on y vit le Duc *Antoine Ulric* de Brunſwick avec ſon fils le Duc *Rudolphe Auguſte*, & la Ducheſſe ſon Epouſe. Quelque jeune que fut alors M. *de Danckelmann*, il fut accueilli de la maniere la plus gracieuſe par toute la Séréniſſime Maiſon de Brunſwick, à la Cour de laquelle ſon pere avoit été pluſieurs fois envoyé par le Roi. Il fut préſenté au Czar par ſon Conſeiller privé le Baron *d'Hauſſen*, qui avoit été auparavant Gouverneur du Conſeiller Impérial Aulique *de Danckelmann*, couſin du nôtre. Le Czar ne tenant pas une place moins diſtinguée parmi les grands hommes que

parmi

parmi les puiſſans Monarques, ſes dits & geſtes méritent d'être recueillis, quand l'occaſion s'en préſente. Dans la penſée qu'on lui préſentoit un fils du grand Préſident, il dit en Hollandois; *C'eſt un bien brave homme; mais comment a-t-il un fils ſi jeune?* Là deſſus M. *d'Huyſſen* ayant répondu que c'étoit un fils du Préſident de Halle, qui avoit eu l'honneur d'être connu de S. M. Imp. à Ryſwiek, le Czar repliqua: *C'eſt auſſi un brave homme: ils ſont tous de braves gens;* & fit quelques careſſes affectueuſes au jeune *Danckelmann*, dont il venoit de louer ſi énergiquement la famille.

Une fête plus auguſte encore, le Couronnement de l'Empereur CHARLES VI. conduiſit Mrs. *de Danckelmann* & *d'Ende* vers la fin de 1711 à Francfort ſur le Main, d'où ils furent de retour au commencement de 1712.

Au Printems ſuivant, M. *de Danckelmann* le pere mena ſon fils avec lui dans un voyage qu'il fit en Weſtphalie. Ils paſſerent quelques jours au Château de Salzdahl, comblés des bontés du Duc *Antoine Ulric.*

Les humanités de Mr. *de Danckelmann* étant finies, il fut queſtion de ſes études académiques. On vouloit l'envoyer à Utrecht; mais le Roi FRÉDERIC GUILLAUME, qui regnoit depuis un an, en refuſa la permiſſion. Il fallut donc s'en tenir à l'Univerſité de Halle, & aux inſtructions de Mrs. *Thomaſius*, *Gundling*, *Boehmer*, & *Ludwig*. Comme M. *de Danckelmann* avoit du goût & de la facilité pour l'étude des langues, il employa ſes momens de loiſir à apprendre l'Italien, l'Eſpagnol, & Anglois, qui lui ont été utiles dans la ſuite.

En 1715, le jour de l'anniverſaire de la naiſſance de GEORGE I. Roi de la grande Bretagne, M. *de Danckelmann* prononça le Panégyrique de ce Prince; & quelque tems après, ayant ſubi les examens accoutumés, il ſoutint ſans Préſident une Theſe *de pactis & mandatis Principis captivi.* La lecture de l'hiſtoire de FRANÇOIS I. avoit fait naître l'idée de cette matiere à l'Auteur de la diſſertation; mais on

s'aviſa

s'aviſa d'en faire des applications à un événement qui fixoit alors l'attention de toute l'Europe, à la détention de CHARLES XII. à *Bender*, & il ne tint pas à quelques mal-intentionnés que M. *de Danckelmann* n'eût des déſagrémens à ce ſujet.

Les voyages, dans le plan ordinaire de l'éducation, ſuivent les études, quoiqu'on n'ait pas encore décidé de la validité des raiſons ſur leſquelles ce plan eſt fondé. C'étoit encore une grace difficile à obtenir du Monarque, M. le Chancelier *de Grumbkow*, pendant un ſéjour que FREDERIC GUILLAUME fit à *Lupow*, petite ville de Poméranie qui lui appartenoit, ſollicita une permiſſion pour ſon beau-frere, & réuſſit, à condition que le voyage commenceroit par une Campagne contre les Turcs, où M. *de Danckelmann*, non moins obſervateur qu'acteur, feroit des obſervations dont il enverroit régulierement les rapports. La paix de *Paſſarowitz* qui fut conclue ſur ces entrefaites fit évanouir ce projet. Mais le Comte de *Virmont* ayant été nommé en 1719 pour l'ambaſſade de *Vienne* à *Conſtantinople*, M. *de Danckelmann* le pere obtint que ſon fils ſeroit de la ſuite, & tous les arrangemens furent pris en conſéquence.

Avant que d'entreprendre ce voyage, M. *de Danckelmann* fit un tour à *Stargard*, pour y voir ſa Sœur *de Grumbkow*; & à ſon retour à Berlin, il eut la ſatisfaction d'y trouver ſon Oncle le grand Préſident, & anciennement premier Miniſtre de FRÉDERIC I. que le Roi avoit fait revenir de *Peitz*, où il avoit été confiné lors de ſa disgrace.

Oppoſons ici un trait de la modeſtie & de la ſageſſe qui ont caractériſé M. *de Danckelmann* juſqu'à ſa fin à la préſomption & à la légereté ſi ordinaires dans la ſituation & à l'âge où il ſe trouvoit alors. Au lieu de s'empreſſer à jouïr du privilege qu'exprime le *cuſtode remoto* d'*Horace*, il avoit prié Monſieur ſon Pere de permettre que ſon Gouverneur *Heinius* l'accompagnât dans ſes voyages; mais le pere, jugeant par cette demande même qu'il étoit ſuperflu de l'accorder, mitigea cependant ſon refus, en liant ſon fils à un Compagnon de voyage,

lui fut auſſi agréable, ſans lui être moins utile; c'étoit M. *de Wülcknitz*, *de Reinsdorff*, depuis Miniſtre d'Etat & Préſident de la Régence à *Caſſel*, & actuellement Miniſtre plénipotentiaire du Landgrave à la Diete de Ratisbonne. Mrs. *de Danckelmann* & *de Wülckenitz*, peres, étoient d'anciens amis; leurs fils avoient étudié enſemble, celui de M. *de Wülckenitz* avoit quelques années de plus, & toutes les convenances ne pouvoient être plus heureuſement aſſorties.

On trouve peut-être que j'inſiſte un peu trop ſur les préliminaires du voyage de M. *de Danckelmann;* mais c'eſt pour préparer en quelque ſorte & amener le récit d'un coup imprevû qui le rompit, & dont la premiere ſurpriſe fut bien douloureuſe. Le rendez-vous pour le départ étoit Wetzlar, & M. *de Danckelmann* s'y rendit après avoir pris congé de ſon pere à *Magdebourg*, où la Regence de ce Duché dont il étoit Préſident avoit été transférée de *Halle*. Un procès de famille qui étoit pendant devant la Chambre Impériale, arrêtoit pour quelques jours M. *de Danckelmann* à *Wetzlar*, lorsque M. *de Cannengieſſer* qui y réſidoit de la part du Roi, & qui étoit de ſes amis, lui fit part d'une lettre qu'il venoit de recevoir de *Magdebourg*, par laquelle un de leurs amis communs le chargeoit d'apprendre à M. *de Danckelmann* que ſon pere avoit été arreté à ſa terre de *Freyenſelde*, près de *Halle*, & conduit priſonnier à *Magdebourg*, d'où il avoit été tranſporté à *Spandau*. On ajoutoit, que ſa ſanté ni ſa tranquilité ne paroiſſoient point avoir été altérées par cette cataſtrophe. M. *de Danckelmann*, en apprenant cette ſiniſtre nouvelle, comprit pourquoi il n'avoit pas encore reçu les derniers ordres du Roi au ſujet du voyage de *Conſtantinople*, qu'il attendoit depuis quelque tems. N'ayant d'ailleurs aucune Lettre de ſa famille qui lui donnât plus de lumieres ſur la cauſe de cette détention, ce ſilence l'étonna; & il prit le parti d'aller voir lui-même ſur les lieux dequoi il s'agiſſoit. Il ne dit adieu qu'au Grand-Juge *de Fürſtemberg;* & comme il étoit à table chez lui, ce Prince reçut des avis qu'il y avoit des défenſes très ſéveres en Pruſſe de mander rien de ce qui s'y paſſoit.

M.

M. *de Danckelmann* quitta *Wetzlar*, l'eſprit auſſi fortement agité qu'on peut ſe le repréſenter dans de pareilles conjonctures; il arriva la ſeconde fête de Noël à *Merſebourg*, & ayant dépêché de là un homme de confiance à ſon beau-frere, M. le Baron *d'Ende* à *Halle*; à ſon retour il fut pénétré de la plus vive ſatisfaction, en apprenant que ſon Pere avoit été remis en liberté le troiſieme jour de ſon arrivée à *Spandau*, qu'il s'arrêtoit à Berlin par ordre du Roi, & que dans peu il retournoit à Magdebourg, pour reprendre l'exercice de toutes ſes Charges. Comme en y allant il devoit paſſer par une terre de M. *d'Ende* en Saxe; le fils avec le gendre s'y rendirent pour goûter la douceur d'un embraſſement qu'une revolution ſi prompte & ſi favorable rendoit délicieux. La nature parle toujours dans de pareilles occaſions, & exerce les droits ſur les coeurs les plus ſenſibles. Quels ne devoient pas être ſes effets ſur ceux d'une famille auſſi bien née! Qu'on en juge par la mort de Madame *de Grumbkow*, qui ayant appris la disgrace de ſon pere comme elle étoit ſur le point d'accoucher, y ſuccomba.

Perſuadé que l'intérêt de ce récit affecte encore dans ce moment ceux qui m'écoutent, je ne crois pas le devoir laiſſer imparfait. Après les premiers transports de la réunion, Mr. *de Danckelmann* le pere raconta à ſon fils, & à ſon gendre, que s'étant rendu de *Magdebourg* à ſa terre de *Freyenfelde* pour y paſſer les vacances de Noël, il n'y étoit que depuis un jour lorsqu'on lui annonça, la nuit du 10 au 11 Decembre, le Major *de Clermont* du Regiment du vieux Prince d'Anhalt. Comme cet Officier étoit connu dans la maiſon, Mr. *de Danckelmann* ſe leva pour le recevoir, mais non ſans lui témoigner quelque ſurpriſe d'une viſite ſi imprévue & à pareille heure. Là-deſſus Mr. *de Clermont* lui montra l'ordre du Roi, & lui temoigna combien il étoit fâché d'avoir été choiſi pour l'exécuter. Il ajoûta que les relais étoient commandés ſur la route, & qu'il faloit faire mettre inceſſament les chevaux au caroſſe pour ſe rendre au premier de ces relais. Mr. *de Danckelmann* ne demanda que le tems de s'habiller & de prendre ce

dont il avoit le plus de beſoin; après quoi, le ſcellé ayant été appoſé à ſon cabinet, il partit avec deux officiers dans le caroſſe & un à cheval qui l'accompagnoient. On avoit pris des précautions fort ſuperflues pour l'arrêter; toute la cour & les avenues du jardin étoient entourées de ſoldats qu'on fit retirer dès qu'on vit qu'il n'y avoit pas la moindre ombre de réſiſtance. Les Officiers demandoient ſouvent ſur la route où ils étoient, ce qui fit comprendre à Mr. *de Danckelmann* qu'ils craignoient que dans l'obſcurité de la nuit on ne prit la route de la Saxe; mais il leur dit en riant qu'ils ſe tranquiliſaſſent, & qu'ils avoient la Saxe derriere eux. L'état de ſa conſcience lui laiſſoit la ſérénité la plus parfaite, & ne l'obligeoit point à ſe ſouſtraire aux recherches intentées contre lui.

Arrivé à *Magdebourg*, Mr. le Lieutenant-Général *de Stille*, Commandant de la Ville, le vint voir, & lui permit de paſſer la nuit dans ſa maiſon ſous bonne garde. On raſſembla les papiers de ſon cabinet & de tous ſes appartemens, pour les envoyer à *Berlin*. On l'y conduiſit enſuite lui-même; & en changeant de chevaux à *Wuſtermarck*, il apprit que Mr. *de Kamecke*, Miniſtre d'Etat, & Madame *de Blaspiel*, venoient d'être conduits à *Spandow*, ou il arriva peu après. Il y fut deux jours ſans voir perſonne. Le troiſieme, Mrs. *d'Ilgen*, *de Knyphauſen*, & *de Katſch*, Miniſtres d'Etat, ſe firent annoncer. Mr. *de Danckelmann* ne douta pas que ce ne fût pour l'examiner. Mais Mr. *d'Ilgen* lui dit en entrant qu'ils venoient lui annoncer la liberté, & que le Roi l'ayant trouvé innocent, l'aſſuroit de ſes bonnes graces; qu'il étoit le maître de ſe rendre à *Berlin* où il s'arrêteroit cependant juſqu'à nouvel ordre. Mr. *de Danckelmann*, en témoignant combien il étoit ſenſible à la juſtice du Monarque, pria les Miniſtres de l'inſtruire, avant qu'il quittât *Spandau*, des raiſons pour leſquelles on l'y avoit mené. Ils lui répondirent qu'il les apprendroit à Berlin, & qu'il verroit que S. M. s'étoit trouvée dans la néceſſité de s'aſſurer de ſa perſonne. En effet, étant rentré dans la Capitale dès le même ſoir, il ſçût que c'étoit ſur les accuſations du malheureux *Clément* qu'on l'avoit arrêté;

rêté ; mais, dès que *Clément* qu'on gardoit depuis quelque tems à Spandau, avoit appris que Mr. *de Danckelmann* y avoit été conduit, il s'étoit formellement dédit, déclarant qu'il avoit voulu en impoſer, & qu'il ne ſavoit rien à la charge de ce Miniſtre. Un ſemblable déſaveu garantit quelques autres perſonnes de diſtinction d'eſſuyer la même épreuve. Mr. *de Danckelmann* en ſortit avec tout l'éclat de l'innocence pour rentrer dans la confiance de ſon maître dont il a encore joui longtems, étant mort dans un âge très avancé.

Ici finit le Mémoire original dont j'ai ſuivi le fil jusqu'à préſent ; ce qui me reſte à dire, ſera puiſé dans ceux que la famille a bien voulu me fournir, & qui ne ſont pas moins authentiques. Le voyage de *Conſtantinople* ayant manqué par une ſuite des conjonctures qu'on vient de rapporter, Mr. *de Danckelmann* en fit d'autres, depuis 1719 jusqu'en 1723, en qualité de Gentil-homme de la Chambre de GEORGE I. Roi d'Angleterre ; & il parcourut l'Allemagne, la Hongrie, l'Italie, la France, la Grande-Bretagne, la Hollande & les Païs bas. Un diſcernement exquis, joint à des connoiſſances fort étendues, lui firent retirer de la vue de ces contrées tous les avantages qui peuvent en réſulter.

A' ſon retour il fût pourvû en 1724 d'un Decret d'expectance pour le poſte de Conſeiller Aulique de l'Empire, & déſigné ſucceſſeur de ſon couſin, le Baron *de Danckelmann*, fils du grand Préſident, qui ſe trouvoit alors à *Vienne* revêtu de cette charge.

Comme on ne ſauroit avoir entrée au Conſeil Aulique ſans s'être préalablement qualifié en faiſant les fonctions d'Aſſeſſeur dans quelque autre College de Juſtice, Mr. *de Danckelmann* choiſit pour cet effet la Cour de Juſtice de *Marbourg* qui dépend des deux Maiſons de Heſſe-Caſſel & de Heſſe-Darmſtadt. Il y fut fait Conſeiller en 1725, & demeura dans ce poſte jusqu'en 1731. Pendant cet eſpece de tems il ſe maria d'abord en 1727 avec *Antoinette Eliſabeth de Borcke*, fille du Feld-Maréchal & Miniſtre du Ca-

binet, Comte *de Borcke*, qui au bout d'un an mourut en couche d'une fille, à préſent Epouſe de Mr. *de Wedel*, ci-devant Major dans les Gardes. Mr. *de Danckelmann* paſſa en 1730 à de ſecondes noces avec *Lucie Sophie de Freyberg*, fille du Conſeiller privé de ce nom, Dame d'honneur de Madame la Margrave *Albert*, avec laquelle il a fini ſa carriere dans la plus douce union, dont il reſte cinq fils & deux filles à qui une excellente éducation a transmis l'héritage des vertus qui ont toujours fait la principale illuſtration de cette reſpectable famille.

Entre tant d'excellens principes de Gouvernement, qui ont fait la gloire du Regne précédent, & qui ont préparé celle dont nous avons le bonheur d'être témoins, un des plus marqués & des plus importans étoit de ne jamais perdre de vue les ſujets d'un mérite diſtingué, qui par leur naiſſance appartenoient à l'Etat, & de ne pas permettre qu'ils conſacraſſent leurs talens à d'autres ſervices qu'à celui de leur Souverain. En partant de là, Frédéric Guillaume ne pouvoit négliger Mr. *de Danckelmann*; & en effet en 1731 il le declara Conſeiller privé de Juſtice, & le nomma pour ſuccéder au défunt Miniſtre d'Etat *de Broich* dans la qualité de ſon Miniſtre plénipotentiaire à la Diete de l'Empire à *Ratisbonne* au College des Electeurs & des Princes. Il étoit naturel de ſuivre une vocation auſſi honorable; & Mr. *de Danckelmann* s'étant auſſitôt rendu à *Ratisbonne*, y fit les fonctions de ſa charge avec autant d'application que de ſuccès. Mais une maladie véhémente & opiniâtre qui l'accabla pendant les années 1735 & 1736, & le mit à deux doigts de la mort, ne lui permit pas de ſoutenir le travail: & comme il n'auroit pû attendre ſa guériſon d'un ſimple intervalle de relâche, il ſollicita ſa démiſſion avec des inſtances réïterées, qui la lui firent enfin accorder, & feu Mr. *de Pollmann* le remplaça.

Rendu à lui-même, Mr. *de Danckelmann* quitta *Ratisbonne* vers la fin de 1736 avec ſa famille qui ne conſiſtoit que dans ſes trois fils aînés, & fixa ſon domicile à *Cöthen*, Ville du païs d'Anhalt,

halt, où il ſe trouvoit le mieux à portée de toute ſa parenté. Il y paſſa deux ans ſans en ſortir que pour deux affaires d'héritage qui l'appellerent en Weſtphalie. Il ſe transporta de *Cöthen*, à une terre voiſine nommée *Alt-Jesnitz*, & ſituée dans le Cercle Electoral de Saxe, qui appartenoit à ſon beau frere le Baron *d'Ende*. Il y demeura une année entiere, pendant laquelle il perdit en Octobre 1739 Mr. ſon pere, vénérable Neſtor, parvenu à la quatre-vingt-dixieme année de ſon âge. Cette mort lui ayant fait échoir la Seigneurie de *Lodersleben* dans la Principauté de *Querfurt*, il alla bientôt après s'y établir, & régler le partage des terres avec ſes cohéritiers.

Le Conſeiller Aulique *de Danckelmann*, par ſon decés arrivé l'année d'auparavant, avoit laiſſé ſa charge à la bienſéance de ſon ſucceſſeur déſigné. Mais celui-ci ne la trouva plus acceptable, & lui préféra les offres qu'il reçut dans le même tems de la part du Prince GUILLAUME, Stadthouder du Landgraviat de *Heſſe-Caſſel*, qui, en le déclarant ſon Conſeiller privé, le mettoit à la tête de tous les Colleges de ſa Comté de *Hanau*, où Mr. *de Danckelmann* ſe rendit, toujours accompagné de ſa famille, au mois de Septembre 1740. Ici ſes talens & l'excellence de ſon caractere ſe développerent à plein, lui concilierent une eſtime univerſelle, & le firent tendrement aimer de tout le païs. Il auroit été bien doux pour lui de joüir longtems de ces agrémens, ſi ſupérieurs à ceux de la ſimple décoration auxquels les Grands ont coutume de ſe borner; mais des ſoins eſſentiels au bien de ſes affaires domeſtiques ne lui permirent abſolument pas d'y joindre une adminiſtration publique. Il s'agiſſoit également de la régie de ſes poſſeſſions & de l'éducation de ſa famille, deux objets plus que ſuffiſans pour abſorber ſon tems & ſes forces. Il quitta donc *Hanau* vers la fin de Mai 1742, regrettant un Etat & un Prince dont il n'étoit pas moins regretté, & retourna ſur ſes terres à *Lodersleben*, fermement réſolu de n'en jamais ſortir. Il n'y fût pas oiſif un ſeul moment pendant ſix années, qui s'écoulerent par conſéquent pour lui avec une extreme rapidi-

rapidité, & qui ſont celles où le Sage ne ſe montre par moins admirable dans la vie privée que le Miniſtre l'a paru dans l'exercice de ſes grands Emplois. De ces ſix années il n'y eut que ſept mois en 1745 & 1746, pendant lesquels la guerre qu'eſſuyoit alors la Saxe l'obligea de demeurer à *Erford*.

La Providence avoit cependant encore des vues ſur lui, & il falloit qu'elles s'accompliſſent. Si FRÉDERIC GUILLAUME avoit connu l'importance des ſervices que Mr. *de Danckelmann* étoit capable de rendre, auroit-elle echapé au plus pénétrant des Monarques, (en déſignant ainſi le nôtre, je doute que quelqu'un puiſſe le méconnoitre.) Des amis de Mr. *de Danckelmann* lui écrivirent de Berlin qu'on ſongeoit à l'appeller au Miniſtere. Il fit ſincérement tout ce qui dépendoit de lui pour éviter une place qui eſt ſi enviée; mais il ſe vit à la fin obligé de déférer aux volontés auſſi gracieuſes que preſſantes du Roi. Le plus grand avantage perſonel qu'il trouvoit dans ce changement d'état, c'étoit d'achever l'éducation & de procurer dans la ſuite l'établiſſement d'une nombreuſe famille. Le meilleur de tous les peres ne pouvoit être inſenſible à ce motif.

Il vint donc à *Berlin* comme Miniſtre d'Etat au commencement de 1739, & ſuccéda d'abord à feu Mr. *d'Arnim*, dans la Préſidence du Conſeil privé de Juſtice & du Département des Fiefs & des Colonies Palatines. Mr. *de Brand* étant venu à décéder peu après, le Roi confia à Mr. *de Danckelmann* toutes les affaires dont ce Miniſtre avoit été chargé. Et feu Mr. *de Cocceji* lui remit auſſi dans la ſuite la fonction de Curateur ſupreme des Univerſités.

Ceux en préſence de qui j'ai l'honneur de parler, ſont préſentement inſtruits du reſte de la carriere de Mr. *de Danckelmann*, ſans que j'aye beſoin d'entrer à cet égard dans aucun détail. Ils ont vû en lui, pendant quinze ans environ, le caractere le plus ſoutenu, le modele le plus accompli d'un digne Miniſtre. Les lumieres & les vertus, une application infatigable, une droiture exemplaire, cette ſageſſe aſſaiſonnée de douceur qui conſtitue la décence, & d'ou naît la vraye dignité, toute oppoſée à celle qu'on place ſi ſouvent & ſi mal à pro-

pos

pos dans une vaine repréſentation, & qu'on ne fait ſentir que par la hauteur & par la dureté ; voilà ce qu'on trouvoit tous les jours, à toutes les heures, dans Mr. *de Danckelmann*, parce que ces qualités faiſoient, pour ainſi dire, le fond & l'eſſence de ſa grande ame; diſons mieux, parce qu'il les puiſoit dans une ſource d'où il ne peut rien ſortir que de pur & de précieux, dans la Religion qu'il connoiſſoit, qu'il aimoit, qu'il pratiquoit, dans la Religion qui a fait le bonheur de ſa vie & de ſa mort, qui a rendu également ſalutaires pour lui toutes les proſpérités & toutes les adverſités que la Providence lui a diſpenſées. Tout le monde a pu voir le Miniſtre, & jusqu'à un certain point le Chrêtien ; mais que de bonnes oeuvres faites dans le ſilence & enſévelies dans l'oubli par cette charité qui ne permet pas à la main gauche de ſavoir ce que fait la droite! Quand je ne ferois que rapporter celles qui, malgré toutes les précautions, ont tranſpiré, je vous pénétrerois de la plus tendre vénération pour le bienheureux défunt! Mais il me ſemble que ce ſeroit offenſer ſon humilité dans le Monument même où il eſt ſi vrai de dire qu'il ſe repoſe de ſes travaux, & que ſes oeuvres le ſuivent. Laiſſons lui en recueillir le ſeul fruit auquel il ait aſpiré ; & que le voile dont nous n'avons fait que lever un coin, retombe jusqu'au grand jour où il ſera pleinement levé.

Mr. *de Danckelmann*, quoique d'une conſtitution délicate, avoit joui d'une ſanté aſſez égale, à la grande maladie près dont nous avons fait mention. Il ne reſſentoit gueres que quelques attaques de rhumatiſme, lorsqu'il s'étoit expoſé au froid. Ce ne fût que vers l'année 1759, c'eſt à dire, à l'âge de 60 ans, qu'on vit décliner ſes forces à peu près épuiſées par le nombre & par le genre de ſes occupations qui l'aſſujettiſſoient à une vie retirée & ſédentaire. Une attaque d'apoplexie le mit hors de combat en Janvier 1763, & il ne balança pas à réſigner une partie de ſes charges, eſſayant de profiter de quelques lueurs de rétabliſſement pour vaquer à celles qu'il s'étoit réſervées. Mais trop conſcientieux pour ne remplir qu'imparfaitement quelque devoir que ce fût, il deman-

da ſon entiere démiſſion, & l'obtint en Novembre 1763. On peut bien mettre au nombre des cauſes qui affoiblirent ſon tempérament, ſa ſenſibilité aux calamités publiques qui, en prenant ſa ſource dans la bonté de ſon coeur, ne préjudicioit d'ailleurs en rien à la fermeté de ſon ame & à ſa parfaite réſignation. Il eut le ſort ordinaire des Juſtes; il fut viſité & affligé par des épreuves accumulées; & dans le tems même qu'il luttoit contre des infirmités qui creuſoient le tombeau ſous ſes pas, il eut des afflictions domeſtiques qui acheverent de le convaincre qu'il avoit choiſi la bonne part, en s'attachant conſtamment à l'Etre immuable, à la ſource des biens ſeuls à l'abri de toutes les atteintes. Penſant, ainſi il ſentit moins l'amertume de la ſéparation qui le priva de ſa digne Epouſe, qu'il n'anticipa les douceurs d'une prochaine réunion. Cette Dame décéda dans le cours de l'Eté dernier, & fut inhumée le jour même où auroit été célebré le 34 anniverſaire de ſon mariage. Mr. *de Danckelmann* ne fit que languir depuis cette perte; il eut de vives ſouffrances vers la fin; mais le 15 jour de Décembre, en lui ouvrant les portes de l'éternité, ne priva la terre d'un ſi bel ornement que pour le faire briller de tout ſon éclat au plus haut de l'Empirée.